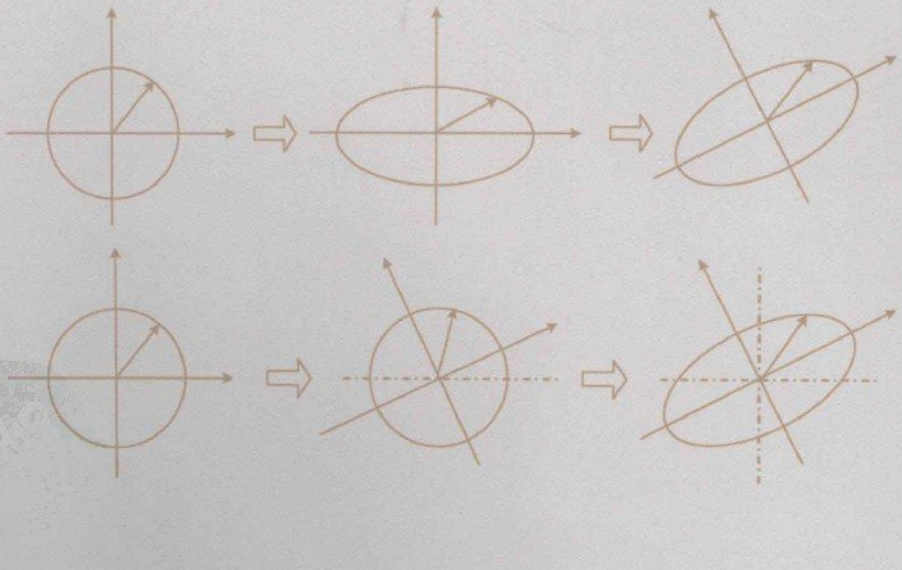
"十二五"国家重点图书出版规划项目

中国科学技术大学精品教材

张量初步和近代连续介质力学概论

李永池 编著



中国科学技术大学出版社

“十二五”国家重点图书出版规划项目
中国科学技术大学精品教材

张量初步和近代连续介质力学概论

上架建议：物理类

定价：48.00 元

ISBN 978-7-312-03071-0

责任编辑 蒋劲柏
封面设计 黄 彦 刘俊霞

“十二五”国家重点图书出版规划项目

中国科学技术大学精品教材

张量初步和近代连续介质力学概论

Introduction to Tensor Analysis and Modern Continuum Mechanics

李永池 编著

中国科学技术大学出版社

内 容 简 介

本书是作者自1984年以来为中国科学技术大学近代力学系研究生所开必修课“高等连续介质力学”教学内容的结晶。全书力图以流体和固体相统一、静态和动态相结合的思想系统地介绍近代连续介质力学的基本知识，并希望在将这些知识与本构理论和波动力学等的研究相结合方面能够向读者提供帮助。

本书在内容叙述上，注重基本概念的准确性和理论体系的严密性，注意将严谨的数学推导和清晰的物理内涵阐述相结合，同时书中还包括了作者本人及所在课题组近些年来在动态本构理论和波动力学方面的一些研究成果。书中给出的习题，大部分围绕力学基本概念、基本原理和基本方法而设计。

本书可作为力学、工程热物理、材料科学、工程科学和应用数学等专业的研究生教材，也可作为与力学有关的相关专业师生和科技工作者的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

张量初步和近代连续介质力学概论/李永池编著. —合肥：中国科学技术大学出版社，2012.8

（中国科学技术大学精品教材）

“十二五”国家重点图书出版规划项目

ISBN 978-7-312-03071-0

Ⅰ.张…　Ⅱ.李…　Ⅲ.①张量—研究生—教材　②连续介质力学—研究生—教材　Ⅳ.①O183.2　②O33

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第186183号

中国科学技术大学出版社出版发行

地址：安徽省合肥市金寨路96号，230026

网址：http://press.ustc.edu.cn

中国科学技术大学印刷厂印刷

全国新华书店经销

开本：710×960　1/16　印张：26　插页：2　字数：497千

2012年8月第1版　2012年8月第1次印刷

定价：48.00元

总　　序

2008年，为庆祝中国科学技术大学建校五十周年，反映建校以来的办学理念和特色，集中展示教材建设的成果，学校决定组织编写出版代表中国科学技术大学教学水平的精品教材系列。在各方的共同努力下，共组织选题281种，经过多轮、严格的评审，最后确定50种入选精品教材系列。

五十周年校庆精品教材系列于2008年9月纪念建校五十周年之际陆续出版，共出书50种，在学生、教师、校友以及高校同行中引起了很好的反响，并整体进入国家新闻出版总署的“十一五”国家重点图书出版规划。为继续鼓励教师积极开展教学研究与教学建设，结合自己的教学与科研积累编写高水平的教材，学校决定，将精品教材出版作为常规工作，以《中国科学技术大学精品教材》系列的形式长期出版，并设立专项基金给予支持。国家新闻出版总署也将该精品教材系列继续列入“十二五”国家重点图书出版规划。

1958年学校成立之时，教员大部分来自中国科学院的各个研究所。作为各个研究所的科研人员，他们到学校后保持了教学的同时又作研究的传统。同时，根据“全院办校，所系结合”的原则，科学院各个研究所在科研第一线工作的杰出科学家也参与学校的教学，为本科生授课，将最新的科研成果融入到教学中。虽然现在外界环境和内在条件都发生了很大变化，但学校以教学为主、教学与科研相结合的方针没有变。正因为坚持了科学与技术相结合、理论与实践相结合、教学与科研相结合的方针，并形成了优良的传统，才培养出了一批又一批高质量的人才。

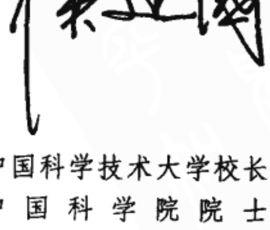
学校非常重视基础课和专业基础课教学的传统，也是她特别成功的原因之一。当今社会，科技发展突飞猛进、科技成果日新月异，没有扎实的基础知识，很难在科学技术研究中作出重大贡献。建校之初，华罗庚、吴有训、严济慈等老一辈科学家、教育家就身体力行，亲自为本科生讲授基础课。他们以渊博的学识、精湛的讲课艺术、高尚的师德，带出一批又一批杰出的年轻教员，培养

了一届又一届优秀学生。入选精品教材系列的绝大部分是基础课或专业基础课的教材，其作者大多直接或间接受到过这些老一辈科学家、教育家的教诲和影响，因此在教材中也贯穿着这些先辈的教育教学理念与科学探索精神。

改革开放之初，学校最先选派青年骨干教师赴西方国家交流、学习，他们在带回先进科学技术的同时，也把西方先进的教育理念、教学方法、教学内容等带回到中国科学技术大学，并以极大的热情进行教学实践，使“科学与技术相结合、理论与实践相结合、教学与科研相结合”的方针得到进一步深化，取得了非常好的效果，培养的学生得到全社会的认可。这些教学改革影响深远，直到今天仍然受到学生的欢迎，并辐射到其他高校。在入选的精品教材中，这种理念与尝试也都有充分的体现。

中国科学技术大学自建校以来就形成的又一传统是根据学生的特点，用创新的精神编写教材。进入我校学习的都是基础扎实、学业优秀、求知欲强、勇于探索和追求的学生，针对他们的具体情况编写教材，才能更加有利于培养他们的创新精神。教师们坚持教学与科研的结合，根据自己的科研体会，借鉴目前国外相关专业有关课程的经验，注意理论与实际应用的结合，基础知识与最新发展的结合，课堂教学与课外实践的结合，精心组织材料、认真编写教材，使学生在掌握扎实的理论基础的同时，了解最新的研究方法，掌握实际应用的技术。

入选的这些精品教材，既是教学一线教师长期教学积累的成果，也是学校教学传统的体现，反映了中国科学技术大学的教学理念、教学特色和教学改革成果。希望该精品教材系列的出版，能对我们继续探索科教紧密结合培养拔尖创新人才，进一步提高教育教学质量有所帮助，为高等教育事业作出我们的贡献。



中国科学技术大学校长
中国科学院院士
第三世界科学院院士

序

《张量初步和近代连续介质力学概论》一书是李永池教授自1984年以来为中国科学技术大学近代力学系研究生所开设的必修课“高等连续介质力学”教学内容的结晶。近30年来，该课程也一直受到中国科学院力学研究所、岩土力学研究所，中国工程物理研究院流体物理研究所，西北核技术研究所等国内多家研究院所代培研究生的欢迎。其间李永池教授始终注意学习国内外同行的长处，特别是学习优秀教材的成功经验。现本书已入选“中国科学技术大学精品教材”系列，并列入“‘十二五’国家重点图书出版规划项目”。本书具有以下特色：

(1) 注重基本概念的准确性和理论体系的严密性，注重将严格的数学推导和清晰的物理概念相结合，力图使读者既不停留在繁琐的数学公式推导之中，也不停留在粗浅的物理现象描述上，而是能清晰认识数学公式所包含的深刻物理实质。这在力学守恒定律的表述及场方程组的推导、热力学势概念的引入和阐述等方面都有所体现。

(2) 除了注意系统介绍近代连续介质力学的基础理论以外，还对发展这些理论所基于的思维方法和研究方法也给予较多注意，以期启发学生提出新模型和新概念的理论创新能力。如广义开口体系概念的提出及对波阵面守恒条件的应用，胀缩导数和等容导数概念的提出和对力学守恒定律的应用，对Drucker公设的讨论和普适增量型塑性本构关系的提出等等，都是启发学生创新思维的例子。

(3) 加强本构理论与典型本构关系内容的介绍，推动力学和材料科学的结合。除对本构方程一般理论进行较严格又较易接受的介绍以外，把现已广泛应用的和正在发展着的几类典型本构关系纳入本构理论的一般框架之内，并说明其物理实质。在基础知识和科学研究之间搭起了一座桥梁。

(4) 贯穿流体与固体相结合的思想。通过本书，读者可以深入了解流体和固体的特异和转化，同时较全面地获得流体力学和固体力学的基础知识。这加深了读者对力学这一学科科学本质的认识，对那些在科研工作中同时需要流体力学和固体力学知识(特别是从事爆炸与冲击力学、安全科学、材料科学研究)的同志，更有直接的帮助。

(5) 贯彻力学与热学相结合、静态和动态相结合、宏观和细观相结合的思想，促进材料的多耦合因素含损伤动态本构理论的发展。除了对连续介质热力学的基本理论进行较多关注以外，对国内外同行特别是作者所在课题组近年来的一些最新研究成果(如含损伤的热塑性、热黏塑性本构关系及计算流程方面的最新成果和三维固体冲击波的理论等)在书中也给予了适当介绍。

书稿完成后，我通读了一遍，感到获益良多。期望本书的出版有助于提高我国力学学科的教学与科研水平。

黄克智

清华大学教授
中国科学院院士
俄罗斯科学院外籍院士
2012年8月

前　　言

从传统意义上讲,"连续介质力学"主要是研究连续介质(主要是流体和固体)在外部(主要是力的和热的)作用下的变形、损伤和破坏的宏观规律的。在连续介质力学中,人们把物质看做是一系列微观上足够大而宏观上足够小的"粒子"或"微团"的连续集合,从而可以认为每一"粒子"在每一时刻占有一个几何上的点并具有相应的各种物理量的统计平均宏观值,因此可以应用场论和张量分析的工具来研究介质的运动规律。尽管细观力学作为一门学科已经兴起,连续介质力学在其发展中也在逐渐吸收其中的一些成果,并引入一些物质运动的细观描述,但从总体上讲连续介质力学所应用的研究方法仍然是宏观描述的方法。尽管与包括气态、液态的流体和固态的固体一样,等离子体同时也是物质的单独一态;尽管外部作用除了力的和热的作用之外,还包括电磁的、光的、化学的、生物的等等的作用,但传统的连续介质力学以及本书将基本上不涉及这些复杂的内容。这一课程之所以重要,主要是因为该课程的基本理论框架涉及变形体力学的最重要的基本知识,如张量分析的基本知识,介质运动、变形和受力的描述方法,连续介质的守恒定律和场方程组,材料本构关系的基本理论等,这些知识对力学以及相关的工程学科都是很重要和不可或缺的。现代科学技术的发展不仅没有降低该课程的地位和重要性,而且随着新的科技成果的不断出现,该课程的理论框架和主要内容也在不断完善、充实和提高中得到发展,并在解决新的科学问题方面发挥了越来越重要的作用。在很长的时期内特别是近几十年来,随着科学技术的发展和进步,"连续介质力学"与其他各类重要学科不断交叉和渗透,因此"连续介质力学"课程不但一直是理论和应用力学专业的必修专业基础课,而且成为工程热物理、机械工程、航天工程、生物医学工程、材料科学等很多相关学科和专业的重要专业基础课。在国内外几乎所

有著名大学的这些相关专业的课程表上都有“连续介质力学”课程或以该课主要知识为内容的类似课程。“连续介质力学”课程的基本内容是与时俱进的,随着近现代科学技术的发展而不断完善和发展着,在近些年来的研究生教材中较多地采用了“非线性连续介质力学”的名称(见书后的参考文献目录),以强调其区别于经典线弹性力学和流体力学的特点。本书的基本内容框架是与这些著作大体一致的,但希望在课程内容的组织上、在基本原理的准确语言表达上、在力学公式的数学表述及其和物理内容的紧密结合上、在最新研究成果的介绍和应用上等方面能有自己的特点,并使读者可以获得新的感受和裨益。

本书取名为“张量初步和近代连续介质力学概论”,一方面是因为张量工具在力学乃至在整个自然科学中具有基石的作用,希望读者可以用较少的时间很自然、很顺利地获得张量一般理论的主要知识并加深对张量工具本身及对力学知识的理解,而不必花很多时间吃力地去读很多张量分析方面的浩瀚书籍,反而冲淡了对力学知识的理解,故在书中对张量知识做了深入浅出的、对力学工作者来讲足够用的较系统的初步介绍,故曰“张量初步”;另一方面,总体说来本书基本上不涉及对某些力学实际问题的具体求解,而是偏重于以作者本人多年来在科研和教学实践中与学生及同行讨论时所获得的新感受新认识为基础,对近几十年来连续介质力学和本构关系的基本原理和基本方法做一概述性的介绍,并加入了本人及所在课题组多年来的一些新的研究成果,希望能对读者的科学研究有所助益,故曰“近代连续介质力学概论”。

我们认为,“近代连续介质力学”课程之所以重要,主要是因为它的主要内容顺应了当代力学研究的发展趋势,其特点可以简单地概括为如下几个方面:

(1) 流体力学和固体力学的结合。在通常的力学系的教学中,一般是将流体力学和固体的弹塑性力学分开来讲解的,这样虽然在使读者获得流体和固体的专业知识方面存在其优点,但在使学生获得全面的连续介质力学基础知识和研究方法并使之融会贯通方面却存在着缺陷,这不利于读者辩证地认识流体和固体的统一、特异和转化,也不利于提高读者综合利用力学知识解决复杂科学问题的能力。一个最典型的例子就是核爆炸的问题,即使是在岩石中的地下核爆炸问题中,人们也将同时遇到近区的流体动力

学波、中区的塑性或黏塑性波以及远区的纯弹性波传播的问题，这就同时需要流体力学和固体力学的知识。另外，人们日常生活中以肉眼观察介质是否能够流动来区分流体和固体的方法也是不够科学的，其中一个最典型的例子就是，当常规概念中是“固体”的穿甲弹以接近 2 km/s 或更高的速度撞击常规概念中也是“固体”的钢甲坦克等目标时，由于撞击压力很高，而对材料塑性变形起重要作用的应力偏量却受到材料屈服准则的制约，其值与极高的压力之比则很小，故在撞击初期将看上去很“硬”的弹、靶都作为流体来处理并不会产生很大的误差，这说明我们不能以简单的、常识的和僵死的观点来看待流体和固体，而应该根据介质在一定具体环境下的行为特点即其本构形式来判断此时它们是流体还是固体。基于这些原因，我们将以流体和固体相结合的观点和方法来系统介绍其基本理论和方法，这也是本书内容组织上的一个特点。

(2) 对大变形和非线性行为的特别关注。在经典弹性理论所处理的问题中，以普通金属材料为例，其变形在约 0.2% 的屈服应变的小变形范围内，线性工程应变的描述方法和线性胡克定律的本构描述可以足够精确地满足工程的需要。但随着工程和现代高科技的发展，在爆炸冲击力学的很多问题中，材料可产生接近 10% 甚至更高的应变，在塑性加工成型等特殊问题中材料可产生更高乃至 1000% 的超塑性应变，此时不但需要引入对材料大变形行为进行精确描述的所谓几何非线性效应，而且需要引入对材料本构行为非线性特性进行精确描述的所谓本构非线性(或物理非线性)效应。此外，当介质粒子的迁移十分明显，而人们又采用 Euler 描述方法时，还需要引入对材料运动迁移中非线性特性进行描述的所谓运动学非线性效应(这一点即使在经典的流体动力学中也已经广泛采用)。对本构非线性行为的引入需要通过本构理论、实验和计算相结合的研究工作来解决；对运动和变形中非线性行为的引入可以采用有限变形的理论，也可以采用增量变形的理论，在工程实践和计算中当前应用更多的还是后者，这可能是因为增量理论更容易与计算力学的研究相结合。

(3) 对复杂环境、极端条件以及与此相关联的多重因素的耦合作用的关注。现代高科技常涉及一系列新的复杂环境和极端条件，这主要包括高(低)温条件、高压条件、高速条件等等，如在化学爆炸、核爆炸以及武器高速撞击、天体撞击等问题中，可以出现几千乃至几万摄氏度的高温或零下几十

摄氏度乃至更低的温度,达到几十万乃至上千万大气压的高压或者每秒几百米乃至几公里的高速度。大的温度跨度的出现将引起材料的热效应以及与此相关联的热-力耦合效应的问题,所以热力学理论本身以及热力耦合本构关系的研究将变得十分重要。高压的问题,则涉及材料高压状态方程的研究以及材料在不同压力范围内的不同形式本构关系的研究。与高速(甚至低速)问题相关联的就有时间因素和时率效应的问题,所谓时间因素是指连续介质力学中的大多数问题在本质上不是与时间无关的静力学问题,而是与时间有关的动力学问题,这些动力学问题又可大致分为材料和结构前期响应和局部响应的波动问题以及结构后期响应和总体响应的振动问题,而不论对哪一种问题,反映材料和结构响应的各种物理量都是与作为自变量的时间 t 明显有关的;所谓时率效应是指材料和结构的响应一般是依赖于其本身的变形速率或外载的加载速率的,这也就是所谓应变率效应和应变率历史效应的问题。除了前述的温度效应和应变率效应以外,材料和结构的响应还与其变形中的应变硬(软)化效应、损伤软化效应等复杂因素有关。因此,与极端条件和复杂环境相关联,材料的本构关系必须能够反映材料的热-力耦合效应、应变硬(软)化效应、应变率效应、损伤软化效应等等多种因素的影响以及它们之间的相互耦合效应,对这些多耦合因素本构关系的研究将是连续介质力学的一个重要发展趋势。本书在介绍这些多耦合因素本构理论的同时,还希望能通过对本课题组近年来研究成果的简要介绍而顺应这一发展趋势。

(4) 结构型力学和本构型力学的结合。经典的连续介质力学如弹性力学和流体力学主要是针对给定简单本构关系(如胡克弹性固体、理想弹性流体、牛顿黏性流体等)的材料,研究其在一定外部因素(主要是力)的作用下材料和结构的响应,即所谓的正问题,可简称为"结构型力学"。随着科技和工业的进步,有大量新材料出现,材料本身的多样性以及其在不同环境下的多样性表现,使得对材料本身的行为即对其本构关系进行系统的研究和分类就成为一个新的迫切任务,而要得到材料的本构关系,我们常常又是以材料或结构在外部作用下的某种已知响应作为出发点的,这就是所谓的反问题,也可以称之为"本构型力学"。结构型力学和本构型力学二者是紧密相关和互为因果的,二者的研究成果需要相互印证。近代连续介质力学正是适应这一要求,才把对本构关系的基本理论和几大类重要的本构关系内涵

的介绍作为其重要内容的。

(5) 宏观力学和细观力学的结合。连续介质力学的基本理论框架是从宏观的观点研究材料和结构的性质及其响应规律的,但其宏观的性质是与构成材料的细(微)观单元如晶格位错直至分子等的构成特征紧密相关的,因此对材料本构关系的研究需要与对材料本身的组织结构的研究相结合。物理力学试图从微观(分子、原子等)角度研究材料的宏观力学性质,但是材料内部缺陷的存在使得其预测结果与工程实际常有较大差别,这促成了细观力学和损伤力学的发展,即从细观(晶粒、粒子团、位错等)角度研究材料的行为。纳米材料等精细材料的出现以及金相显微镜和扫描电镜技术的发展更促成了细观力学和损伤力学的发展,乃至分子动力学计算方法的发展。可以说近代连续介质力学已发展到引入细观力学的成果并与之相结合的新阶段。但是受篇幅的限制和作者学识方面的限制,本书只是在介绍内变量理论以及含损伤本构关系的时候,说明了内变量和损伤等的细观背景,而并未介绍其细观结构的细节,从总体上讲本书的内容基本上仍然是在宏观连续介质力学的框架之内,但是作为一个发展趋势,我们仍然指出这一点,有兴趣的读者可以参考细观力学或材料动力学方面的书籍。

本书内容共分为 9 章。第 1 章为“张量知识基础”,是从力学和物理学的需要出发,用尽可能少的篇幅介绍在一般曲线坐标中张量理论的基础知识,并说明其和笛卡尔张量理论的关系,为此,本书没有再重复介绍矢量空间的一般理论,而是假设读者已具有矢量分析的基本知识,直接从现实的三维欧几里德空间出发,首先从一点讲起,再推广到整个空间,最后再简单地提及非欧几里德空间的概念。由于其在应用上的重要性,这里我们也讲述了若干数学方面的补充知识。第 2 章为“连续介质的运动和变形”,主要从描述介质复杂运动和大变形非线性特征的需要出发,以两点张量场的一般张量理论体系进行了较系统的介绍。第 3 章为“应力原理”,从精确描述大变形介质的内部受力情况的角度出发,介绍了 Cauthy 应力张量、第一类和第二类 Piola-Kirchhoff 应力张量、应力张量本构导数以及运动方程和动量矩守恒方程。第 4 章为“变形热力学”,系统介绍了热力学第一和第二定律的含义以及在连续介质场中的表现形式,即场的能量方程和熵不等式。第 5 章为“本构方程的一般理论”,主要是在简要介绍本构理论公理体系八大原理的基础之上,重点介绍了最重要的构架无关原理、局部作用原理、许可

性原理和材料对称性原理，根据叙述的方便在不同的地方分别采用了泛函表述或内变量表述。第6章至第9章分别介绍了几大类具体的常用材料的本构关系形式，即“热弹性材料”、“弹塑性材料”、“黏性流体和黏弹性材料”、“黏塑性材料”。其中“热弹性材料”一章中除了深化热力学势的概念以外，还特别介绍了几类在爆炸与冲击中应用较多的状态方程。第8章则在简单介绍黏弹性行为一般表述的基础上，重点介绍了常用的线性黏弹性体的微分型和积分型本构关系。在第7章和第9章中除了以内变量理论体系为基础对弹塑性和黏塑性本构理论进行了一般的介绍以外，还对本人及所在课题组近些年来的一些研究成果进行了介绍，这些知识读者是可以直接应用到科研中去的。各章的最后是习题，习题的编入原则是：不求多、不求难，而重在希望通过习题加深读者对基本概念、基本理论和基本方法的理解，以及有利于实际应用。

本书在章节体系和内容组织等方面曾得到朱兆祥教授的指点和帮助，特此致谢，并以此书作为对朱先生在天之灵的慰藉。

由于作者水平有限，书中存在错误和不当之处在所难免，欢迎读者和专家指正。

编　者

凡　　例

本书所用主要符号如下：

一般用白斜体希腊或英文字母表示标量，例如 φ、Φ、u、U 等。

一般用黑斜体小写英文字母表示矢量，例如 $\boldsymbol{v}$、$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 等。

一般用黑斜体大写英文字母表示2阶及高阶张量，例如 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 等。

$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$：2阶张量 $\boldsymbol{A}$ 的转置(transpose)。

$[\boldsymbol{a}]=\boldsymbol{a}$：矢量 $\boldsymbol{a}$ 的列阵。本书将矢量 $\boldsymbol{a}$ 与列阵相对应，故也以 $\boldsymbol{a}$ 本身表示其列阵。

$\{\boldsymbol{a}\}$：矢量 $\boldsymbol{a}$ 的行阵，$\{\boldsymbol{a}\}^{\mathrm{T}}=[\boldsymbol{a}]=\boldsymbol{a}$。

$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{a}$：矢量 $\boldsymbol{a}$ 对2阶张量 $\boldsymbol{A}$ 的右点积，其矩阵记法为：$\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{a}$ 或 $[\boldsymbol{A}][\boldsymbol{a}]$。

$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{A}$：矢量 $\boldsymbol{a}$ 对2阶张量 $\boldsymbol{A}$ 的左点积，其矩阵记法为：$(\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\circ\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\circ\boldsymbol{a}$ 或 $(\{\boldsymbol{a}\}[\boldsymbol{A}])^{\mathrm{T}}=[\boldsymbol{A}]^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{a}]$。

$\boldsymbol{A}:\boldsymbol{B}$：2阶张量 $\boldsymbol{A}$ 和2阶张量 $\boldsymbol{B}$ 的第一种二次点积。

$\boldsymbol{A}\cdot\cdot\boldsymbol{B}$：2阶张量 $\boldsymbol{A}$ 和2阶张量 $\boldsymbol{B}$ 的第二种二次点积。

$\dfrac{\partial\Phi}{\partial t}$：量 Φ 的局部导数(local time derivative)。

$\dfrac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}=\dot{\Phi}$：量 Φ 的随体导数(material time derivative)。

$\dfrac{\mathrm{D}\Phi}{\mathrm{D}t}$：量 Φ 对时间的全导数(time derivative)。

∇：E氏梯度算子(Euler gradient operator)。

∇_i：E氏协变算子(Euler covariant operator)。

∇^i：E氏逆变算子(Euler contravariant operator)。

∇：L氏梯度算子(Lagrange gradient operator)。

∇_I：L氏协变算子(Lagrange covariant operator)。

∇^I：L氏逆变算子(Lagrange contravariant operator)。

$\boldsymbol{F}$:变形梯度张量(deformation gradient tensor)。

$\boldsymbol{B}$:左柯西-格林张量(left Cauchy-Green tensor)或左变形张量(left deformation tensor)。

$\boldsymbol{C}$:右柯西-格林张量(right Cauchy-Green tensor)或右变形张量(right deformation tensor)。

$\boldsymbol{V}$:左伸缩张量(left stretch tensor)。

$\boldsymbol{U}$:右伸缩张量(right stretch tensor)。

$\boldsymbol{R}$:旋转张量(rotational tensor)。

$\boldsymbol{E}$:拉格朗日应变张量(Lagrange strain tensor)或格林应变张量(Green strain tensor)。

$\boldsymbol{e}$:欧拉应变张量(Euler strain tensor)或阿尔曼西应变张量(Almansi strain tensor)。

$\boldsymbol{L}$:质点速度空间梯度张量,或简称质点速度的E氏梯度张量(Euler gradient tensor)。

$\boldsymbol{D}$:伸缩率张量(stretching rate tensor)或变形率张量(deformation rate tensor)。

$\boldsymbol{W}$:旋转率张量(spinning rate tensor 或 rotational rate tensor)。

$\boldsymbol{F}_t(\tau)$:τ 时刻相对于 t 时刻的相对变形梯度张量(relative deformation gradient tensor)。

ρ:瞬时质量密度(current mass density)。

ρ_0:初始质量密度(original mass density)。

$\boldsymbol{b}$:比体积力(specific body force)。

$\boldsymbol{\sigma}$ 或 $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}})$:柯西应力张量(Cauchy stress tensor)。

$\boldsymbol{S}$:第一类 Piola-Kirchhoff 应力张量,简称第一类 P-K 应力张量。

$\boldsymbol{\Sigma}$:第二类 Piola-Kirchhoff 应力张量,简称第二类 P-K 应力张量。

T:绝对温度。

$\boldsymbol{g}$:温度的空间梯度或E氏梯度。

$\boldsymbol{G}$:温度的物质梯度或L氏梯度。

$\boldsymbol{h}$:E氏热流矢量。

$\boldsymbol{H}$:L氏热流矢量。

K:体系的动能(kinetic energy)。

k:比动能(specific kinetic energy)。

U:体系的内能(internal energy)。

u:比内能(specific internal energy)。

ψ:比自由能(specific free energy)。

H:比焓(specific enthalphy)。

G:比自由焓(specific free enthalphy)或比吉布斯焓(specific Gibbs enthalphy)。

S:体系的熵(entropy)。

s:比熵(specific entropy)。

W^*:某一过程中体系接受的外功量(outside works)。

w^*:比外功(specific outside works)。

Q:某一过程中体系接受的外热量(outside heat)。

W:某一过程中体系接受的外变形功(outside deformation works)。

w:比变形功(specific deformation works)。

目　　录

第 1 章　张量知识基础

张量分析和量纲分析是自然科学的两大基石，具有十分重要和基本的意义。自然界中各种物理量都可以纳入张量的框架来统一描述，或者说只有当把它们作为张量来描述时才能清楚地揭示这些物理量的与具体坐标系无关的不变性本质，并揭示联系各种物理量间相互关系的物理定律的不变性本质，这就是张量概念和张量方程概念的基本价值。张量工具长期以来就在自然科学中起着这样核心的作用，通过爱因斯坦(Einstein)建立狭义相对论特别是建立广义相对论的过程和功绩，更加显示并奠定了张量分析在自然科学中不可替代、不可或缺的基础性地位。但是本书不是从纯数学的角度介绍张量的知识，而是从连续介质力学和物理学的应用和需要的角度介绍张量的知识，因此我们将本着“既多又少”的原则来讲张量的基础知识。“多”是指对力学应用的需要够用，“少”是指尽量不涉及那些与力学应用关系不大的过于抽象的数学内容。为此目的，也为了读者容易接受，我们将主要地从现实的三维欧几里德(Euclid)空间出发，并首先从空间一点讲起，然后推广到整个空间介绍张量分析的主要内容，只是在适当的时候简要地提出黎曼(Riemann)等类空间及其中张量的概念，并说明相互间的关系。我们假设读者是掌握了高等数学中矢量代数和矢量分析的有关知识的，并且不再赘述有关矢量空间的系统理论，而是直接以矢量代数和矢量分析的知识为基础逐步深入地介绍张量分析的基础理论和方法。

1.1 矢量的逆变分量和协变分量

1.1.1 指标记法和求和约定

在解析几何中，矢量(vector)被定义为一个有向线段，这是一个纯几何的定义，不依赖于坐标系的选取。但是为了更清楚地认识矢量的本质，以便对其进行量的描述和运算，我们又常常引入一定的坐标系，并将矢量在此坐标系中的分量作为它的表象(representation)。在较多的场合下，人们所用的是所谓直角笛卡尔坐标系(rectangular Cartesian coordinates system)。在三维欧几里德(Euclid)空间中，以 x^j $(j=1,2,3)$ 表示 3 个相互垂直的坐标轴和相应的点的坐标，沿 3 个轴的 3 个单位矢量 $\boldsymbol{i}_j$ $(j=1,2,3)$ 两两正交组成了一组所谓的幺正基(unitary basis)或法化基(normalized basis)，于是空间中的任一矢量 $\boldsymbol{a}$ 可以沿着这组幺正基 $\boldsymbol{i}_j$ 进行长方体式的线性分解，而且这种分解是唯一的。以 a^j $(j=1,2,3)$ 表示相应的分解系数，我们可以写出下式，并简洁地写出下式的最后一式：

$$\boldsymbol{a} = a^1 \boldsymbol{i}_1 + a^2 \boldsymbol{i}_2 + a^3 \boldsymbol{i}_3 \equiv a^j \boldsymbol{i}_j \tag{1.1.1}$$

在张量分析的普遍理论中，广泛地采用指标记法(index notation)和上标(superscript)、下标(subscript)，上式中 a^j 和 $\boldsymbol{i}_j$ 中的 j 即分别为上标和下标。在张量分析中还广泛地采用所谓的求和约定(summation convention)，例如在式(1.1.1)中就采用了求和约定，其含义是：如果在一个单项式中有一个上标和下标重复出现，则表示要对此指标从 1 到 3 遍历取值，并对所得的 3 项求和。同样的约定对 n 维空间将是从 1 到 n 遍历取值，并对所得的 n 项求和。我们把上下重复出现的指标叫做哑标(dummy or dumb index)，哑标并不代表 1 到 n 中某个特定的值，而是要遍历地取 $1,2,3,\cdots,n$ 并对所得的各项相加求和，所以哑标只有形式的意义，改变哑标并不改变求和的结果。例如式(1.1.1)可以写成如下各种形式：

$$\boldsymbol{a} = a^j \boldsymbol{i}_j = a^k \boldsymbol{i}_k = \cdots$$

如果我们定义

$$\boldsymbol{i}^j = \boldsymbol{i}_j \quad (j = 1,2,3)$$

则 $\boldsymbol{i}_j$ 组成幺正基的条件可以在数学上表达为

$$\boldsymbol{i}^i \cdot \boldsymbol{i}_j = \delta^i_j = \begin{cases} 1, & \text{当 } i = j \\ 0, & \text{当 } i \neq j \end{cases} \quad (i = 1,2,3; j = 1,2,3) \tag{1.1.2}$$

式(1.1.2)中的"·"表示矢量的点积，δ^i_j 称为克罗尼科尔记号(Kronecker symbol 或 Kronecker delta)，它正好与单位矩阵对应：

$$[\delta^i_j] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

另外，式(1.1.2)中的指标 i 和 j 与式(1.1.1)中的指标 j 不同，它们没有出现上下重复，不是哑标。我们将类似式(1.1.2)中不出现上下重复的这种指标称为自由指标(free index)，它们可以取1、2、3中的任何一个确定的值，故式(1.1.2)代表9个式子，而式(1.1.1)只代表1个式子，其右端为3项之和。在张量分析中，清楚地区分哑标和自由指标并明确它们的不同作用是十分重要的，许多运算错误和混乱都是因为没有分清哑标和自由指标，或者是因为新指标选取不当导致哑标和自由指标混乱而造成的。

利用 δ^i_j 的定义和求和约定的规则，容易证明如下各式：

$$\begin{cases} \delta^i_i = 3 \\ a^j \delta^i_j = a^i \quad (i = 1,2,3) \\ A_{ij}\delta^j_k = A_{ik} \quad (i = 1,2,3; k = 1,2,3) \end{cases} \tag{1.1.3}$$

式(1.1.3)说明，Kronecker 记号作为一个因子起一个改换指标的作用，即将与 δ^i_j 相乘的另一个因子中与 δ^i_j 中重复出现的哑标，改换为 δ^i_j 中的另一指标。这样，δ^i_j 的出现常常可以简化运算。

我们可以很容易地求出式(1.1.1)中矢量 $\boldsymbol{a}$ 的分解系数 a^j，为此只需要以 $\boldsymbol{i}^i$ 与其两端进行点积，即可得

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{i}^i = a^j \boldsymbol{i}_j \cdot \boldsymbol{i}^i = a^j \delta^i_j = a^i, \quad a^i = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{i}^i$$

这里我们利用了式(1.1.2)中 δ^i_j 的定义以及描述 δ^i_j 所起改变指标作用的式(1.1.3)。

将上式和式(1.1.1)写在一起，即有

$$\begin{cases} \boldsymbol{a} = a^i \boldsymbol{i}_i & (1.1.4\text{a}) \\ a^i = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{i}^i & (1.1.4\text{b}) \end{cases}$$

1.1.2 矢量的逆变分量和协变分量

除了引入一些术语、记号和约定之外，迄今为止我们并未讲述任何新的知识。

现在我们转到矢量 $\boldsymbol{a}$ 在空间任意一组基 $\boldsymbol{e}_j$ 上的平行六面体式线性分解(parallelepiped linear decomposition)的问题上来。设 $\boldsymbol{e}_j(j=1,2,3)$是空间的任意一组基,即它们是线性无关的(即不共面的),则由解析几何知识可知,空间中的任一矢量 $\boldsymbol{a}$ 可以沿基矢为棱的平行六面体进行线性分解,且这种分解是唯一的,仍以 a^j 记其分解系数,则由求和约定可得

$$\boldsymbol{a} = a^j\boldsymbol{e}_j \tag{1.1.5}$$

由于现在 $\boldsymbol{e}_j$ 未必是幺正基,所以如果我们仍像笛卡尔基的情况一样再设 $\boldsymbol{e}^i=\boldsymbol{e}_i$ 并以 $\boldsymbol{e}^i$ 点乘(1.1.5)式两端便得不到 $\boldsymbol{e}^i\cdot\boldsymbol{e}_j=\delta^i_j$,也就不能像上面一样由 δ^i_j 的改换指标的作用来求出 a^j 了。但是如果我们设想空间中有另外 3 个矢量 $\boldsymbol{e}^i$ 满足

$$\boldsymbol{e}^i\cdot\boldsymbol{e}_j = \delta^i_j \quad (i = 1,2,3;j = 1,2,3) \tag{1.1.6a}$$

则以 $\boldsymbol{e}^i$ 点乘式(1.1.5)两端并重复前面的运算,则可与前面完全一样的得出

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}^i = a^j\boldsymbol{e}_j\cdot\boldsymbol{e}^i = a^j\delta^i_j = a^i$$

故我们必有

$$\begin{cases} \boldsymbol{a} = a^i\boldsymbol{e}_i & (1.1.7a) \\ a^i = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}^i & (1.1.7b) \end{cases}$$

式(1.1.7)在形式上和式(1.1.4)完全类似,只不过 $\boldsymbol{e}_i$ 并不是幺正基,$\boldsymbol{e}^i\neq\boldsymbol{e}_i$ 罢了。这样我们便解决了我们的问题。我们称 a^i 为矢量 $\boldsymbol{a}$ 的逆变分量(contravariant components),称参考基 $\boldsymbol{e}_i$ 为协变基,而称分解式(1.1.7a)为矢量 $\boldsymbol{a}$ 沿参考基矢 $\boldsymbol{e}_i$ 的逆变分解。术语含义和几何意义以后再加以说明。

但是迄今为止,我们的问题应该说只是获得了形式上的解决,而并未完全解决。这是因为我们并未求出由式(1.1.6a)所定义的三个矢量 $\boldsymbol{e}^i$,甚至连它们的存在性也未可知。现在我们就来求出它们,这样同时也就证明了其存在性。以 $\boldsymbol{e}^3$ 为例,它满足

$$\boldsymbol{e}^3\cdot\boldsymbol{e}_1 = 0,\quad \boldsymbol{e}^3\cdot\boldsymbol{e}_2 = 0,\quad \boldsymbol{e}^3\cdot\boldsymbol{e}_3 = 1 \tag{1.1.6b}$$

此式的前两式说明 $\boldsymbol{e}^3$ 垂直于 $\boldsymbol{e}_1$ 和 $\boldsymbol{e}_2$ 决定的平面,故可设其为

$$\boldsymbol{e}^3 = k\,\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_2$$

其中“×”表示矢量的叉乘,而 k 为待定因子。以 $\boldsymbol{e}_3$ 点乘此式并利用式(1.1.6b)之第三式,即有

$$1 = \boldsymbol{e}^3\cdot\boldsymbol{e}_3 = k(\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_2)\cdot\boldsymbol{e}_3 = k\,\boldsymbol{e}_3\cdot(\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_2)$$

故有

$$k = \frac{1}{\boldsymbol{e}_3\cdot(\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_2)},\quad \boldsymbol{e}^3 = \frac{(\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_2)}{\boldsymbol{e}_3\cdot(\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_2)}$$

类似地,我们可以得到 $\boldsymbol{e}^1$ 和 $\boldsymbol{e}^2$ 的表达式,将它们合在一起即有

$$\boldsymbol{e}^1 = \frac{(\boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3)}{V}, \quad \boldsymbol{e}^2 = \frac{(\boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_1)}{V}, \quad \boldsymbol{e}^3 = \frac{(\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2)}{V} \tag{1.1.8a}$$

其中

$$V = \boldsymbol{e}_1 \cdot (\boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3) = \boldsymbol{e}_2 \cdot (\boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_1) = \boldsymbol{e}_3 \cdot (\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2)$$

表示基矢$\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$、$\boldsymbol{e}_3$的混合乘积,当它们成右手系时其值等于所组成的平行六面体的体积,当其成左手系时,等于其体积的负值,但为简洁计我们仍以 V 表示其值。以后我们一般只讨论$\boldsymbol{e}_i$成右手系的情况,所以 $V>0$。

这样我们就给出了由已知的三个基矢$\boldsymbol{e}_i$求解满足式(1.1.6)的三个矢量$\boldsymbol{e}^i$的问题,也就完全解决了将 $\boldsymbol{a}$ 沿$\boldsymbol{e}_i$进行线性分解的问题。

可以证明(具体可参见1.2节):

$$V' = \boldsymbol{e}^1 \cdot (\boldsymbol{e}^2 \times \boldsymbol{e}^3) = \frac{1}{\boldsymbol{e}_1 \cdot (\boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3)} = \frac{1}{V} \tag{1.1.9}$$

因为 $V\neq0$,所以 $V'\neq0$。因此三个矢量 $\boldsymbol{e}^i$ 也是线性无关的,所以也可以作为空间的一组基。我们将原来的基 $\boldsymbol{e}_i$ 称为原基(original basis)、参考基(reference basis)或协变基(covariant basis),而称基 $\boldsymbol{e}^i$ 为原基的对偶基(dual basis)、倒逆基(reciprocal basis)或逆变基(contravariant basis)。

由推理的类似性,类似于式(1.1.8a),显然我们可以写出由 $\boldsymbol{e}^i$ 表达$\boldsymbol{e}_i$的式子如下:

$$\boldsymbol{e}_1 = \frac{\boldsymbol{e}^2 \times \boldsymbol{e}^3}{V'}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \frac{\boldsymbol{e}^3 \times \boldsymbol{e}^1}{V'}, \quad \boldsymbol{e}_3 = \frac{\boldsymbol{e}^1 \times \boldsymbol{e}^2}{V'} \tag{1.1.8b}$$

其中

$$V' = \boldsymbol{e}^1 \cdot (\boldsymbol{e}^2 \times \boldsymbol{e}^3) = \boldsymbol{e}^2 \cdot (\boldsymbol{e}^3 \times \boldsymbol{e}^1) = \boldsymbol{e}^3 \cdot (\boldsymbol{e}^1 \times \boldsymbol{e}^2)$$

现在我们提出将任意的矢量 $\boldsymbol{a}$ 沿逆变基$\boldsymbol{e}^j$进行线性分解的问题。为应用求和约定规则,我们将以 a_j 表示其分解系数,即设

$$\boldsymbol{a} = a_j \boldsymbol{e}^j \tag{1.1.10}$$

以 $\boldsymbol{e}_i$ 点乘式(1.1.10),有

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{e}_i = a_j \boldsymbol{e}^j \cdot \boldsymbol{e}_i = a_j \delta^j_i = a_i$$

故有对应于式(1.1.7)的式子如下:

$$\begin{cases} \boldsymbol{a} = a_i \boldsymbol{e}^i & (1.1.11\text{a}) \\ a_i = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{e}_i & (1.1.11\text{b}) \end{cases}$$

我们将 a_i 称为矢量$\boldsymbol{a}$的协变分量(covariant components),称 $\boldsymbol{e}^i$ 为逆变基,而称分解式(1.1.11a)为矢量 $\boldsymbol{a}$ 沿逆变基$\boldsymbol{e}^i$的协变分解。

互为对偶的两组基矢 $\boldsymbol{e}^i$ 和$\boldsymbol{e}_i$的几何关系如图1.1所示(为使不至于混乱,仅

画出了 e^i 中的一个矢量 e^3），e^3 沿 e_1 和 e_2 所决定的平面的法向，其在 e_3 上的正交投影等于 $\frac{1}{|e_3|}$；而矢量 a 的逆变分解和协变分解的几何表示，在二维上的情况如图 1.2 所示（只画二维的图同样是为了避免太杂乱）。

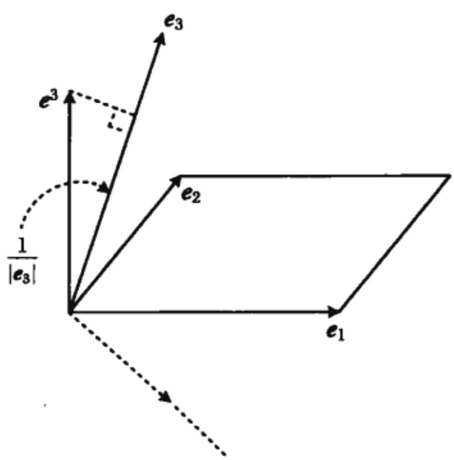


图 1.1　e^3 的图示

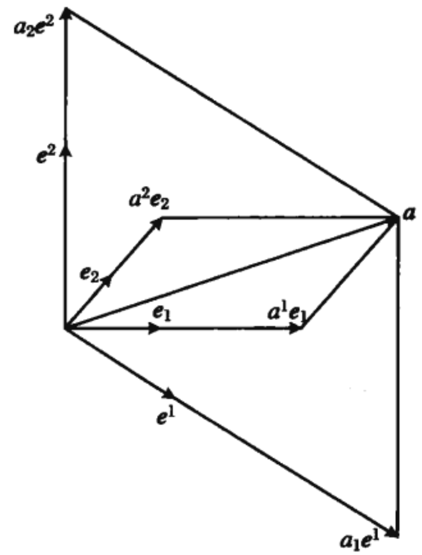


图 1.2　矢量 a 的逆变分解和协变分解

以上的主要内容可以概括为如下几句话：对空间中的任何一组原先作为参考基的协变基矢 e_i，都可以通过式(1.1.6)或式(1.1.8)定义一组与之对偶或倒逆的逆变基矢 e^i；空间中的任何一个矢量 a 可以沿着协变基矢 e_i 按式(1.1.7a)进行逆变分解，其分解系数即 a 的逆变分量 $a^i = a \cdot e^i$（式(1.1.7b)）；矢量 a 也可以沿着逆变基矢 e^i 按式(1.1.11a)进行协变分解，其分解系数即 a 的协变分量 $a_i = a \cdot e_i$（式(1.1.11b)）。显然，在一般情况下，$e_i \neq e^i$，$a^i \neq a_i$，而只有当 $e_i = i_i$ 为笛卡尔幺正基时，我们才有 $e_i = e^i$，$a^i = a_i$，此时我们也就没有必要提出协变基和逆变基、协变分量和逆变分量的概念了，因为它们是互相重合的，这也就是最常见的笛卡尔张量分析的方法。如果协变基 e_i 两两正交，但并非单位矢量时，则显然有 $e^i = \frac{e_i}{|e_i|^2}$（$i = 1,2,3$，不求和），即 e^i 与 e_i 同向，其长度为 e_i 长度的倒数，$|e^i| = \frac{1}{|e_i|}$，此时有 $a^i = \frac{a_i}{|e_i|^2}$（$i = 1,2,3$，不求和），常用的正交曲线坐标在每一点的情况即是如此。

1.1.3 置换记号和 $e\sim\delta$ 恒等式

为了书写简便和便于运算，张量分析中还广泛采用所谓的置换记号(permutation symbol)或称列维-悉为塔记号(Levi-Civita symbol)，其定义为

$$e^{ijk}=e_{ijk}=\begin{cases}1, & \text{当 } ijk \text{ 为 123 的正序 123、231、312 时}\\ -1, & \text{当 } ijk \text{ 为 123 的逆序 321、213、132 时}\\ 0, & \text{其他情况，即有两标或三标相同时}\end{cases} \tag{1.1.12}$$

根据其定义，显然我们有如下各等式：

$$\begin{cases}e^{ijk}e_{ijk}=6\\ e_{ijk}=e_{jki}=e_{kij},\quad e_{ijk}=-e_{jik},\quad e_{ijk}=-e_{ikj},\quad e_{ijk}=-e_{kji},\quad\cdots\\ \boldsymbol{a}_i\cdot(\boldsymbol{a}_j\times\boldsymbol{a}_k)=e_{ijk}\boldsymbol{a}_1\cdot(\boldsymbol{a}_2\times\boldsymbol{a}_3)\\ \boldsymbol{e}_i\cdot(\boldsymbol{e}_j\times\boldsymbol{e}_k)=e_{ijk}\boldsymbol{e}_1\cdot(\boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_3),\quad \boldsymbol{e}^i\cdot(\boldsymbol{e}^j\times\boldsymbol{e}^k)=e^{ijk}\boldsymbol{e}^1\cdot(\boldsymbol{e}^2\times\boldsymbol{e}^3)\end{cases} \tag{1.1.13}$$

利用置换记号的定义，我们还可以把式(1.1.8a)和式(1.1.8b)的各 3 个式子分别写成如下形式：

$$\begin{cases}\boldsymbol{e}_j\times\boldsymbol{e}_k=Ve_{jki}\boldsymbol{e}^i\quad(j=1,2,3;k=1,2,3)\\ \boldsymbol{e}^i=\dfrac{1}{2V}e^{ijk}\boldsymbol{e}_j\times\boldsymbol{e}_k\quad(i=1,2,3)\end{cases} \tag{1.1.14a}$$

$$\begin{cases}\boldsymbol{e}^j\times\boldsymbol{e}^k=V'e^{jki}\boldsymbol{e}_i\quad(j=1,2,3;k=1,2,3)\\ \boldsymbol{e}_i=\dfrac{1}{2V'}e_{ijk}\boldsymbol{e}^j\times\boldsymbol{e}^k\quad(i=1,2,3)\end{cases} \tag{1.1.14b}$$

式(1.1.14a)中 $\boldsymbol{e}^i=\frac{1}{2V}e^{ijk}\boldsymbol{e}_j\times\boldsymbol{e}_k$ 三式对应于式(1.1.8a)中的三式，因子 1/2 是因为二哑标组合 jk 和 kj 的 2 项相等；$\boldsymbol{e}_j\times\boldsymbol{e}_k=Ve_{jki}\boldsymbol{e}^i$ 除包含式(1.1.8a)中的三式外，还包含六个恒等式 0=0。对于式(1.1.14b)和式(1.1.8b)，也有类似说明。

利用置换记号可以将行列式的运算大大化简，如我们可将

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{A}\|&=\begin{Vmatrix}A_{11}&A_{12}&A_{13}\\A_{21}&A_{22}&A_{23}\\A_{31}&A_{32}&A_{33}\end{Vmatrix}\\&=A_{11}A_{22}A_{33}+A_{21}A_{32}A_{13}+A_{31}A_{12}A_{23}-A_{31}A_{22}A_{13}\\&\quad-A_{11}A_{32}A_{23}-A_{21}A_{12}A_{33}\end{aligned}$$

写成

$$\|\boldsymbol{A}\|=e^{ijk}A_{i1}A_{j2}A_{k3}=e^{ijk}A_{1i}A_{2j}A_{3k} \tag{1.1.15}$$

显然把式(1.1.15)中的123改成231和312时也是对的，而改成321、213、132时则差一负号。

另外，我们易证如下的公式：

$$e_{lmn}\|\boldsymbol{A}\| = e^{ijk}A_{il}A_{jm}A_{kn} \quad (l=1,2,3;m=1,2,3;n=1,2,3) \tag{1.1.16}$$

(1.1.16)式含有27个公式，当 lmn 为123的正序时，它即是式(1.1.15)；当 lmn 为123的逆序时，即是两端各乘 -1；其他情况下式(1.1.16)的右端相当于二列或者三列相同的一个行列式，其值为0，故式(1.1.16)永远成立。

我们还可以证明如下的 $e\sim\delta$ 恒等式：

$$e_{ijk}e^{lmk} = \delta_i^l\delta_j^m - \delta_i^m\delta_j^l \quad (i、j、l、m \text{ 皆可取值} 1、2、3) \tag{1.1.17}$$

$e\sim\delta$ 恒等式共包含 $3^4=81$ 个等式，其证明方法有很多，例如我们可以给出如下的证明：

证明 (1) 当 $i=j$ 或 $l=m$ 时，显然式(1.1.17)为 $0=0$。

(2) 当 $i\neq j$ 而且 $l\neq m$ 时，不妨设 $i=1,j=2$，此时 $l\neq m$ 有6种情况：$l=1$，$m=2$；$l=2$，$m=1$；$l=2$，$m=3$；$l=3$，$m=2$；$l=3$，$m=1$；$l=1$，$m=3$，易见这6种情况下(1.1.17)式两端分别都是 $1,-1,0,0,0,0$。证毕。

1.2 度 量 张 量

1.2.1 度量张量的定义

在1.1节中，式(1.1.6)给出了倒逆基 $\boldsymbol{e}^i$ 和参考基 $\boldsymbol{e}_i$ 之间的关系，它是由参考基和倒逆基相互确定的隐式方程，而式(1.1.8a)和式(1.1.8b)则分别给出了由 $\boldsymbol{e}_i$ 确定 $\boldsymbol{e}^i$ 以及由 $\boldsymbol{e}^i$ 确定 $\boldsymbol{e}_i$ 的显式方程。我们也可以在更一般的意义上来考虑它们之间的相互关系：由于参考基 $\boldsymbol{e}_i$ 和倒逆基 $\boldsymbol{e}^i$ 本身也都是矢量，而且各自都组成一组基，所以它们之中的任何一个都可以在自己所属的那组基上或与之对偶的另一组基上进行线性分解，即我们可以得到：

$$\boldsymbol{e}_i = g_{ij}\boldsymbol{e}^j,\quad \boldsymbol{e}^i = g^{ij}\boldsymbol{e}_j,\quad \boldsymbol{e}_i = g_i{}^j\boldsymbol{e}_j,\quad \boldsymbol{e}^i = g^i{}_j\boldsymbol{e}^j \tag{1.2.1}$$

其中 g_{ij}、g^{ij}、$g_i{}^j$、$g^i{}_j$ 分别为其分解系数。

现在我们来求这些分解系数。以 e_k 点乘式(1.2.1)的第一个式子，并利用1.1节中的式(1.1.6)和式(1.1.3)，即可得

$$e_i \cdot e_k = g_{ij}e^j \cdot e_k = g_{ij}\delta_k^j = g_{ik}$$

即 $g_{ij} = e_i \cdot e_j$。

类似地可以求出式(1.2.1)中其他的3个分解系数，最终我们可以得到如下式子：

$$g_{ij} = e_i \cdot e_j, \quad g^{ij} = e^i \cdot e^j, \quad g_i^{\cdot j} = e_i \cdot e^j = \delta_i^j, \quad g_{\cdot j}^i = e^i \cdot e_j = \delta_j^i \tag{1.2.2}$$

以后对有两个指标而可以用矩阵表示的量，我们将约定靠左边的第一个指标代表行，靠右边的第二个指标代表列，而对同一个位置的指标则约定上、下标分别代表行和列，由于 $g_i^{\cdot j}$ 和 $g_{\cdot j}^i$ 都与 Kronecker 记号对应，是对称的，所以可以将它们中的空位"·"去掉，简写为 g_i^j 和 g_j^i，而这不致产生混乱，即有

$$g_{\cdot j}^i = g_j^i = \delta_j^i$$

由(1.2.2)式显然可见与 g_{ij}、g^{ij}、g_i^j、g_j^i 对应的矩阵都是对称矩阵，即

$$g_{ij} = g_{ji}, \quad g^{ij} = g^{ji}, \quad g_i^j = g_j^i = \delta_j^i = \delta_i^j \tag{1.2.3}$$

以后我们会说明 g_{ij}、g^{ij}、$g_j^i = g_i^j = \delta_j^i$ 实际上只是同一个2阶张量 $\boldsymbol{g}$ 的不同表象而已，分别称为该张量的协变分量、逆变分量和混合分量(mixed components)，而此张量由于其可以确定空间的度量关系，故称为度量张量(metric tensor)，由于其在张量分析中的作用类似于数字1在数域中的作用，又称为单位张量(unit tensor)，又由于其基本和重要的作用，又称为基本张量(fundamental tensor)。

度量张量的两种混合分量都等于 Kronecker 记号，十分简单，而对其协变分量和逆变分量，则可以证明它们所对应的矩阵互为逆矩阵。事实上，以 e^k 点乘式(1.2.1)的第一式，并利用式(1.2.2)，即有

$$e_i \cdot e^k = g_{ij}e^j \cdot e^k = g_{ij}g^{jk}$$

由于 $e_i \cdot e^k = \delta_i^k$，故有

$$g_{ij}g^{jk} = \delta_i^k, \quad [g_{ij}][g^{jk}] = [\delta_i^k] \tag{1.2.4}$$

式(1.2.4)即说明矩阵$[g_{ij}]$和$[g^{jk}]$是互为逆矩阵的。

由线性代数的知识，有

$$g^{ij} = \frac{D^{ji}}{g} = \frac{D^{ij}}{g}, \quad g_{ij} = \frac{D'_{ji}}{g'} = \frac{D'_{ij}}{g'} \tag{1.2.5a}$$

其中 g 和g'满足如下关系：

$$g = \| g_{ij} \|, \quad g' = \| g^{ij} \|, \quad g' = \frac{1}{g} \tag{1.2.5b}$$

即分别是矩阵$[g_{ij}]$、$[g^{ij}]$的行列式，且互为倒数；D^{ij}和D_{ij}则分别是$[g_{ij}]$中元素g_{ij}的代数余子式和$[g^{ij}]$中元素g^{ij}的代数余子式。

根据式(1.2.1)和1.1节的有关知识，我们有

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}_1 \cdot (\boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3) &= g_{1i}\boldsymbol{e}^i \cdot (g_{2j}\boldsymbol{e}^j \times g_{3k}\boldsymbol{e}^k) = g_{1i}g_{2j}g_{3k}\boldsymbol{e}^i \cdot (\boldsymbol{e}^j \times \boldsymbol{e}^k) \\ &= g_{1i}g_{2j}g_{3k}e^{ijk}\boldsymbol{e}^1 \cdot (\boldsymbol{e}^2 \times \boldsymbol{e}^3) = g\boldsymbol{e}^1 \cdot (\boldsymbol{e}^2 \times \boldsymbol{e}^3) \end{aligned}$$

因有

$$V = \boldsymbol{e}_1 \cdot (\boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3) = \frac{1}{\boldsymbol{e}^1 \cdot (\boldsymbol{e}^2 \times \boldsymbol{e}^3)} = \frac{1}{V'}$$

故有

$$g = V^2 = [\boldsymbol{e}_1 \cdot (\boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3)]^2, \quad g' = V'^2 = [\boldsymbol{e}^1 \cdot (\boldsymbol{e}^2 \times \boldsymbol{e}^3)]^2 \tag{1.2.6}$$

1.2.2 度量关系

之所以把g_{ij}等称为空间的度量张量，是因为借助它们可以确定空间中的度量关系。最基本的度量有长度和角度，由此可以引出面积和体积，而这些都是可以由矢量的点积、叉积和混合积来表示的。设$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$是任意的三个矢量，则可以分别由其分量连同度量张量而写出如下各式：

(1) 矢量$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$的点积：

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a^i\boldsymbol{e}_i \cdot b^j\boldsymbol{e}_j = a^ib^jg_{ij}$$

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_i\boldsymbol{e}^i \cdot b_j\boldsymbol{e}^j = a_ib_jg^{ij}$$

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a^i\boldsymbol{e}_i \cdot b_j\boldsymbol{e}^j = a^ib_j\delta_i^j = a^ib_i$$

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_i\boldsymbol{e}^i \cdot b^j\boldsymbol{e}_j = a_ib^j\delta_j^i = a_ib^i$$

即

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a^ib^jg_{ij} = a_ib_jg^{ij} = a^ib_i = a_ib^i \tag{1.2.7}$$

由此可以进一步求出矢量$\boldsymbol{a}$的长度$|\boldsymbol{a}|$及矢量$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$的夹角$\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$：

$$|\boldsymbol{a}|^2 = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} = a^ia^jg_{ij} = a_ia_jg^{ij} = a^ia_i \tag{1.2.8a}$$

$$\cos\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|} = \frac{a^ib^jg_{ij}}{(a^ka_k)^{\frac{1}{2}}(b^lb_l)^{\frac{1}{2}}} = \cdots \tag{1.2.8b}$$

(2) 矢量$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$的叉积：

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = (a^i\boldsymbol{e}_i) \times (b^j\boldsymbol{e}_j) = a^ib^j(\boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_j) = a^ib^jVe_{ijk}\boldsymbol{e}^k$$

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = (a_i\boldsymbol{e}^i) \times (b_j\boldsymbol{e}^j) = a_ib_j(\boldsymbol{e}^i \times \boldsymbol{e}^j) = a_ib_jV'e^{ijk}\boldsymbol{e}_k$$

如记

$$\varepsilon_{ijk} = Ve_{ijk}, \quad \varepsilon^{ijk} = V'e^{ijk} \tag{1.2.9}$$

则有二矢量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 叉积表达式如下：

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\varepsilon_{ijk}a^ib^j\boldsymbol{e}^k=Ve_{ijk}a^ib^j\boldsymbol{e}^k,\quad \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\varepsilon^{ijk}a_ib_j\boldsymbol{e}_k=V'e^{ijk}a_ib_j\boldsymbol{e}_k \tag{1.2.10a}$$

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})_k=a^ib^j\varepsilon_{ijk}=\varepsilon_{kij}a^ib^j,\quad (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})^k=a_ib_j\varepsilon^{ijk}=\varepsilon^{kij}a_ib_j \tag{1.2.10b}$$

以后将会说明，在一般坐标系中，式(1.2.9)中的 ε_{ijk} 和 ε^{ijk} 才具有张量的特征，分别称为置换张量 $\boldsymbol{\varepsilon}$(permutation tensor)的协变分量和逆变分量，而置换记号 $e_{ijk}=e^{ijk}$ 并不具有一般的张量的特性，它们只是笛卡尔坐标系中置换张量的表达式。

利用式(1.2.9)，则 1.1 节中的式(1.1.13)最后的二式可写为

$$\boldsymbol{e}_i\cdot(\boldsymbol{e}_j\times\boldsymbol{e}_k)=\varepsilon_{ijk},\quad \boldsymbol{e}^i\cdot(\boldsymbol{e}^j\times\boldsymbol{e}^k)=\varepsilon^{ijk} \tag{1.2.11}$$

(3) 矢量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 的混合积：

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=a^i(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})_i=a^i\varepsilon_{ijk}b^jc^k=\varepsilon_{ijk}a^ib^jc^k$$

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=a_i(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})^i=a_i\varepsilon^{ijk}b_jc_k=\varepsilon^{ijk}a_ib_jc_k$$

即

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\varepsilon_{ijk}a^ib^jc^k=\varepsilon^{ijk}a_ib_jc_k \tag{1.2.12}$$

1.2.3　同一矢量不同分量间的关系

度量张量的重要性，还在于通过它们可以建立同一矢量(及各阶张量)不同分量间的联系，从而揭示物理量的客观实在性。以矢量为例，我们有

$$a^i=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}^i=a^j\boldsymbol{e}_j\cdot\boldsymbol{e}^i=a^j\delta^i_j,\quad a^i=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}^i=a_j\boldsymbol{e}^j\cdot\boldsymbol{e}^i=a_jg^{ji}$$

$$a_i=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}_i=a^j\boldsymbol{e}_j\cdot\boldsymbol{e}_i=a^jg_{ji},\quad a_i=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}_i=a_j\boldsymbol{e}^j\cdot\boldsymbol{e}_i=a_j\delta^j_i$$

即

$$\begin{cases} a^i=a^j\delta^i_j=\delta^i_ja^j,\quad a^i=a_jg^{ji}=g^{ij}a_j \\ a_i=a_j\delta^j_i=\delta^j_ia_j,\quad a_i=a^jg_{ji}=g_{ij}a^j \end{cases} \tag{1.2.13}$$

式(1.2.13)有两个意义：第一，它表达了同一个矢量 $\boldsymbol{a}$ 的不同形式分量间的关系，以运算代数的语言讲，即：度量张量的逆变分量 g^{ij} 作为一个因子起一个提升指标(raising index)的作用，它将另一因子中与 g^{ij} 中重复的下标哑标提升为 g^{ij} 中的另一指标；度量张量的协变分量 g_{ij} 作为一个因子起一个下降指标(lowering index)的作用，它将另一个因子中与 g_{ij} 中重复的上标哑标下降为 g_{ij} 中的另一指标；度量张量的混合分量，即 Kronecker 记号 δ^i_j 作为一个因子起一个改换指标(changing index)的作用，它将另一个因子中与 δ^i_j 中重复的哑标改变为 δ^i_j 中的另一指标。度量张量各分量的这些作用对高阶张量也是适用的，而且我们将把这种上升、下降、改换指标的运算本身作为定义同一张量不同分量相互联系的基础和依

据。式(1.2.13)的第二个意义是：把度量张量 $\boldsymbol{g}$ 的不同分量 g^{ij}、g_{ij}、$g_j^i=\delta_j^i$ 作为一个因子，且是以一次约定求和的形式作为因子与矢量 $\boldsymbol{a}$ 的分量相乘时，得到的仍是同一矢量 $\boldsymbol{a}$ 的某一分量，就如同任何数与 1 相乘仍得到同一个数一样，我们把这种相乘并一次约定求和的运算称为度量张量 $\boldsymbol{g}$ 与矢量 $\boldsymbol{a}$ 的一次点积，并统一地将式(1.2.13)写为

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{g}=\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{a} \tag{1.2.14}$$

同样，式(1.2.14)中的 $\boldsymbol{a}$ 改为任何张量也是成立的，而且此式可作为任意阶张量不同分量间相互联系的基础，因此，我们将 $\boldsymbol{g}$ 称为单位张量。

1.2.4 $V'=\dfrac{1}{V}$的证明

我们还有 1.1 节中的式(1.1.9)尚未证明，现证明之。

考虑任意四个矢量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$、$\boldsymbol{d}$ 的乘积运算$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})$，我们有

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})&=(a_i\boldsymbol{e}^i\times b_j\boldsymbol{e}^j)\cdot(c^l\boldsymbol{e}_l\times d^m\boldsymbol{e}_m)\\&=a_ib_jV'e^{ijk}\boldsymbol{e}_k\cdot c^ld^mVe_{lmn}\boldsymbol{e}^n\\&=a_ib_jc^ld^mV'Ve^{ijk}e_{lmn}\boldsymbol{e}_k\cdot\boldsymbol{e}^n\\&=a_ib_jc^ld^mV'Ve^{ijk}e_{lmn}\delta_k^n\\&=a_ib_jc^ld^mV'Ve^{ijk}e_{lmk}\\&=a_ib_jc^ld^mV'V(\delta_l^i\delta_m^j-\delta_l^j\delta_m^i)\\&=V'V(a_ib_jc^id^j-a_ib_jc^jd^i)\\&=V'V[(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d})-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})]\end{aligned}$$

即

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})=V'V[(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d})-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})] \tag{1.2.15}$$

式(1.2.15)是任意四个矢量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$、$\boldsymbol{d}$ 间的普遍关系，尽管其中有基矢量 $\boldsymbol{e}_i$ 和 $\boldsymbol{e}^i$ 的混合积 V 和 V' 的出现，但其成立性则是与基矢的选取无关的。特别地，当我们取 $\boldsymbol{e}_i$ 为幺正基时，因为有 $V=V'=1$，式(1.2.15)变为

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d})-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}) \tag{1.2.16}$$

式(1.2.16)也是四个矢量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$、$\boldsymbol{d}$ 间的普遍关系，其成立性也应是与基矢选取无关的，即对任意的基矢 $\boldsymbol{e}_i$ 都应有式(1.2.16)成立。对比式(1.2.16)和式(1.2.15)，可知对任意选取的基矢 $\boldsymbol{e}_i$ 都必然有 $VV'=1$，即有

$$V'=\frac{1}{V} \tag{1.2.17}$$

这样，我们就既证明了普遍成立的式(1.2.16)，又得到了对任意基矢都成立的“副产品”——式(1.2.17)。

当然，我们也可以先在笛卡尔坐标系中证明对任意四个矢量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$、$\boldsymbol{d}$ 都成立的普遍关系式(1.2.16)，并将之应用于 $(\boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_3)\cdot(\boldsymbol{e}^2\times\boldsymbol{e}^3)$，而直接证明式(1.2.17)。事实上，利用1.1节中的式(1.1.8a)和式(1.2.16)，我们有

$$\begin{aligned} V' &= \boldsymbol{e}^1\cdot(\boldsymbol{e}^2\times\boldsymbol{e}^3) = \frac{(\boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_3)}{V}\cdot(\boldsymbol{e}^2\times\boldsymbol{e}^3) \\ &= \frac{1}{V}[(\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}^2)(\boldsymbol{e}_3\cdot\boldsymbol{e}^3)-(\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}^3)(\boldsymbol{e}_3\cdot\boldsymbol{e}^2)] \\ &= \frac{1}{V}(\delta_2^2\delta_3^3-\delta_2^3\delta_3^2) = \frac{1}{V}(1-0) = \frac{1}{V} \end{aligned}$$

此即式(1.2.17)。证毕。

1.2.5 一点补充说明

对于两个给定的矢量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，如果我们按照通常约定的方法定义它们的叉积 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$，其中 $\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 成右手系而其大小等于以 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 为边的平行四边形的面积，则这样所定义的叉积矢量 $\boldsymbol{c}$ 显然是与坐标系的选取与定向根本没有关系的，我们称这样定义的叉积矢量为极矢量(pole vector)或真矢量(true vector)；如果我们取 V 为参考基矢量所组成的平行六面体体积的大小，则由式(1.2.10)所定义的叉积矢量 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 在基矢量成右手系和左手系时将差一个负号，我们将这样定义的叉积矢量称为轴矢量(axis vector)或伪矢量(pseudo vector)。类似地，对于三个给定的矢量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$，如果我们按照通常约定的方法定义它们的混合积 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$，即在 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 成右手系或左手系时其值分别等于它们所组成的平行六面体体积的正值或负值，则这样所定义的混合积显然是与坐标系的选取与定向根本没有关系的，我们称这样定义的混合积为真标量(true scalar)；如果我们取 V 为参考基矢量所组成的平行六面体体积的大小，则由式(1.2.12)所定义的混合积 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$ 在基矢量成右手系和左手系时将差一个符号，我们将这样定义的混合积称为伪标量(pseudo scalar)。同样，如果我们取 V 为参考基矢量所组成的平行六面体体积的大小，则以置换记号为基础由式(1.2.9)所定义的置换张量 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 将是一个与坐标系的选取与定向根本没有关系的真张量(true tensor)，而式(1.2.11)是直接通过基矢量的混合积而定义置换张量 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 的，如果我们按照通常约定的方法定义它们的混合积的话，则当基矢量成右手系和左手系时，由式(1.2.11)所定义的置换张量 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 也将差一个符号，这样定义的置换张量称为伪张量(pseudo tensor)。为了避免这种复

来但却并不十分重要的概念区分，今后我们一般只讨论基矢量成右手系的情况，只在某些有特殊需要的地方才引入左手系并加以说明。

1.3　张量的一般定义

1.3.1　基变换

如前所述，我们所研究的物理量都是与基矢即坐标系无关的客观量，但为了刻画和运算这些客观量，我们又常常需要引入基矢即坐标系，并将其在坐标系中的分量作为其表象，于是同一个客观量在不同的坐标系中即可有不同的表象或分量。当我们给出两组不同的基矢之间的变换关系时，量的客观性要求同一物理量在两组不同基矢中的表象之间的变换关系应该和基矢间的变换关系有某种特定的联系。因此我们先讲基矢变换，然后讲矢量在不同基矢中的表象的变换关系，并以此作为给出矢量乃至张量解析定义的基础。

设有一组旧基矢 $\boldsymbol{e}_i$ 和一组新基矢 $\bar{\boldsymbol{e}}_i$，其关系如下：

$$\bar{\boldsymbol{e}}_i = \alpha_i^j \boldsymbol{e}_j,\quad [\bar{\boldsymbol{e}}_i] = [\alpha_i^j]^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{e}_j],\quad \{\bar{\boldsymbol{e}}_i\} = \{\boldsymbol{e}_j\}[\alpha_i^j] \tag{1.3.1a}$$

$$\boldsymbol{e}_i = \beta_i^j \bar{\boldsymbol{e}}_j,\quad [\boldsymbol{e}_i] = [\beta_i^j]^{\mathrm{T}}[\bar{\boldsymbol{e}}_j],\quad \{\boldsymbol{e}_i\} = \{\bar{\boldsymbol{e}}_j\}[\beta_i^j] \tag{1.3.1b}$$

这里的系数 α_i^j 和 β_i^j 分别称为协变系数（covariant coefficients）和逆变系数（contravariant coefficients），由它们的各元素所排成的矩阵 $[\alpha_i^j]$、$[\beta_i^j]$ 分别称为协变系数矩阵和逆变系数矩阵，而 $[\alpha_i^j]^{\mathrm{T}}$、$[\beta_i^j]^{\mathrm{T}}$ 则分别代表 $[\alpha_i^j]$ 和 $[\beta_i^j]$ 的转置矩阵。以后我们约定：当 2 阶系统的两个指标（不管是上标还是下标）有左右之分时，则左、右指标分别表示该 2 阶系统所对应矩阵的行标和列标，如 $[A^{ij}]$、$[A_{ij}]$、$[A^i{}_j]$、$[A_i{}^j]$ 中的指标 i 和 j 分别为行标和列标；当 2 阶系统的上标和下标处于同样的左右位置时，则上标和下标分别代表该 2 阶系统所对应矩阵的行标和列标，如 $[\alpha_i^j]$、$[\beta_i^j]$ 中的指标 j 和 i 分别代表行标和列标。同时，我们将以 $[\boldsymbol{e}_i]$ 等表示三个矢量元素 $\boldsymbol{e}_i$ 排成的列阵，以 $\{\boldsymbol{e}_i\}$ 等表示三个矢量元素 $\boldsymbol{e}_i$ 排成的行阵，以 $[a_i]$ 等表示三个分量元素 a_i 排成的列阵，以 $\{a_i\}$ 等表示三个分量元素 a_i 排成的行阵。根据这些约定，我们才可以将式(1.3.1a)和式(1.3.1b)中的第一式分别写为后面的矩阵表示法形式。

由于 α_i^j 和 β_i^j 分别是由 $\boldsymbol{e}_j$ 线性表达 $\bar{\boldsymbol{e}}_i$ 的系数和由 $\bar{\boldsymbol{e}}_j$ 线性表达 $\boldsymbol{e}_i$ 的系数，所以可以断定它们所构成的矩阵$[\alpha_i^j]$和$[\beta_i^j]$一定是互逆的矩阵。事实上，由(1.3.1)式的两个式子我们有

$$\bar{\boldsymbol{e}}_i = \alpha_i^j \boldsymbol{e}_j = \alpha_i^j \beta_j^k \bar{\boldsymbol{e}}_k$$

由于 $\bar{\boldsymbol{e}}_i = \delta_i^k \bar{\boldsymbol{e}}_k$，故可得

$$(\delta_i^k - \alpha_i^j \beta_j^k)\bar{\boldsymbol{e}}_k = \boldsymbol{0}$$

但 $\bar{\boldsymbol{e}}_k$ 是线性无关的，故此式中 $\bar{\boldsymbol{e}}_k$ 线性组合的系数必为0，即有

$$\beta_j^k \alpha_i^j = \delta_i^k, \quad [\beta_j^k][\alpha_i^j] = [\delta_i^k] \tag{1.3.2}$$

即矩阵$[\alpha_i^j]$和$[\beta_j^k]$互为逆矩阵。

由(1.3.1)式还可以得出新旧倒逆基$\bar{\boldsymbol{e}}^i$ 和$\boldsymbol{e}^i$ 间的关系。事实上，式(1.3.1)的第一式说明 α_i^j 是矢量$\bar{\boldsymbol{e}}_i$ 在旧参考基$\boldsymbol{e}_j$ 上的分解系数，故按定义 α_i^j 恰是矢量$\bar{\boldsymbol{e}}_i$ 在旧基$\boldsymbol{e}_j$ 中的逆变分量，因此必等于$\bar{\boldsymbol{e}}_i$ 与$\boldsymbol{e}^j$ 的点积，即

$$\alpha_i^j = \bar{\boldsymbol{e}}_i \cdot \boldsymbol{e}^j = \boldsymbol{e}^j \cdot \bar{\boldsymbol{e}}_i$$

而此式又说明，α_i^j 等于矢量$\boldsymbol{e}^j$ 在新基$\bar{\boldsymbol{e}}_i$ 中的协变分量，故其必等于 $\boldsymbol{e}^j$ 在$\bar{\boldsymbol{e}}^i$ 上的分解系数，即

$$\boldsymbol{e}^j = \alpha_i^j \bar{\boldsymbol{e}}^i$$

或

$$\boldsymbol{e}^i = \alpha_j^i \bar{\boldsymbol{e}}^j, \quad [\boldsymbol{e}^i] = [\alpha_j^i][\bar{\boldsymbol{e}}^j], \quad \{\boldsymbol{e}^i\} = \{\bar{\boldsymbol{e}}^j\}[\alpha_j^i]^{\mathrm{T}} \tag{1.3.3b}$$

类似地可以证明：

$$\bar{\boldsymbol{e}}^i = \beta_j^i \boldsymbol{e}^j, \quad [\bar{\boldsymbol{e}}^i] = [\beta_j^i][\boldsymbol{e}^j], \quad \{\bar{\boldsymbol{e}}^i\} = \{\boldsymbol{e}^j\}[\beta_j^i]^{\mathrm{T}} \tag{1.3.3a}$$

式(1.3.3a)可以类似于式(1.3.3b)一样地证明，也可以由式(1.3.3b)及矩阵 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 互逆而得出。

1.3.2 基变换下矢量分量的变换规则——矢量解析定义

首先看矢量 $\boldsymbol{a}$ 在新旧二组基中的分量是如何相联系的。对矢量 $\boldsymbol{a}$ 在新旧基中分别进行逆变分解，分别有

$$\boldsymbol{a} = \bar{a}^i \bar{\boldsymbol{e}}_i, \quad \boldsymbol{a} = a^i \boldsymbol{e}_i = a^i \beta_i^j \bar{\boldsymbol{e}}_j = a^j \beta_j^i \bar{\boldsymbol{e}}_i$$

故有

$$(\bar{a}^i - \beta_j^i a^j)\bar{\boldsymbol{e}}_i = \boldsymbol{0}$$

由$\bar{\boldsymbol{e}}_i$ 的线性无关性可得

$$\bar{a}^i = \beta_j^i a^j, \quad [\bar{a}^i] = [\beta_j^i][a^j] \tag{1.3.4a}$$

类似地可得

$$a^i = \alpha^i_j \bar{a}^j, \quad [a^i] = [\alpha^i_j][\bar{a}^j] \tag{1.3.4b}$$

式(1.3.4)给出了矢量 $\boldsymbol{a}$ 在新旧基中逆变分量的变化规则,可以看到它们和新旧倒逆基间的变换规则(1.3.3)式是完全类似的。至于矢量协变分量的变换规则,除了可用与推导式(1.3.4)类似的方法推导以外,还可以利用 1.1 节中的式(1.1.11)求得。我们有

$$\bar{a}_i = \boldsymbol{a} \cdot \bar{\boldsymbol{e}}_i = \boldsymbol{a} \cdot \alpha^j_i \boldsymbol{e}_j = \alpha^j_i a_j$$

$$a_i = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{a} \cdot \beta^j_i \bar{\boldsymbol{e}}_j = \beta^j_i \bar{a}_j$$

即

$$\bar{a}_i = \alpha^j_i a_j, \quad [\bar{a}_i] = [\alpha^j_i]^{\mathrm{T}}[a_j], \quad \{\bar{a}_i\} = \{a_j\}[\alpha^j_i] \tag{1.3.5a}$$

$$a_i = \beta^j_i \bar{a}_j, \quad [a_i] = [\beta^j_i]^{\mathrm{T}}[\bar{a}_j], \quad \{a_i\} = \{\bar{a}_j\}[\beta^j_i] \tag{1.3.5b}$$

式(1.3.5)即给出了矢量 $\boldsymbol{a}$ 的新旧协变分量的变化规则。

系数矩阵 α^j_i 是由旧协变基到新协变基的变换系数矩阵,见式(1.3.1a),也是由矢量 $\boldsymbol{a}$ 的旧协变分量 a_j 到其新的协变分量 $\bar{a}_i$ 的变换系数矩阵,见式(1.3.5a),即矢量协变分量的变化规则(1.3.5a)式和协变基的变换规则(1.3.1a)式是完全相同的,故我们称 a_i 为 $\boldsymbol{a}$ 的协变分量,并且为了简洁起见,我们将称 α^j_i 为协变系数矩阵,而称式(1.3.1a)和式(1.3.5a)为 1 次协变规则。同样,系数矩阵 β^j_i 是由旧逆变基到新逆变基的变换系数矩阵,见式(1.3.3a),也是矢量 $\boldsymbol{a}$ 的旧逆变分量 a^j 到其新逆变分量 $\bar{a}^i$ 的变换系数矩阵,见式(1.3.4a),即矢量逆变分量的变换规则(1.3.4a)式和逆变基的变换规则(1.3.3a)式是完全相同的,故我们称 a^i 为 $\boldsymbol{a}$ 的逆变分量,称 β^j_i 为逆变系数矩阵,称(1.3.3a)式和(1.3.4a)式为 1 次逆变规则。注意:当我们将变换的方向从由旧变到新改变为由新变到旧时,相应的变换系数矩阵 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 将会换位,就如式(1.3.1)、式(1.3.3)、式(1.3.4)、式(1.3.5)中所表明的那样。

式(1.3.4)和式(1.3.5)既给出了矢量的逆变分量和协变分量在基变换之下的变化规则,也可以认为是给出了判断与新旧二组基矢相关联的 2 个 1 阶系统是否是代表同一个矢量 $\boldsymbol{a}$ 在不同基矢中的表象的一个法则,故可以作为矢量的解析定义。因此我们可以抛开有向线段的几何定义,而给出矢量的解析定义如下:

矢量的解析定义 如果新旧二组基矢 $\bar{\boldsymbol{e}}_i$ 和 $\boldsymbol{e}_i$ 由式(1.3.1)或式(1.3.3)相联系,而与基矢相关联的 1 阶系统 $\bar{a}^i$ 和 a^i 由式(1.3.4)相联系,则称它们为同一个矢量 $\boldsymbol{a}$ 在新旧二组基中的逆变分量,或简称其为逆变矢量;如果与新旧基矢相关联的 1 阶系统 $\bar{a}_i$ 和 a_i 由式(1.3.5)相联系,则称它们为同一矢量 $\boldsymbol{a}$ 在新旧二组基中的协变分量,或简称其为协变矢量。

1.3.3 张量的解析定义

矢量的上述解析定义的优点是我们可以将之加以推广而建立任意阶张量的解析定义，从而把自然界中的各种物理量统一在张量的框架之内。为此我们首先来看看已经讲过的一个特殊的2阶张量——度量张量 $\boldsymbol{g}$ 的新旧分量的变换规则。我们有

$$\bar{g}_{ik} = \bar{\boldsymbol{e}}_i \cdot \bar{\boldsymbol{e}}_k = \alpha_i^j \boldsymbol{e}_j \cdot \alpha_k^l \boldsymbol{e}_l = \alpha_i^j \alpha_k^l g_{jl} \tag{1.3.6a}$$

$$\bar{g}^{ik} = \bar{\boldsymbol{e}}^i \cdot \bar{\boldsymbol{e}}^k = \beta_j^i \boldsymbol{e}^j \cdot \beta_l^k \boldsymbol{e}^l = \beta_j^i \beta_l^k g^{jl} \tag{1.3.6b}$$

$$\bar{g}_k^i = \delta_k^i = \bar{\boldsymbol{e}}^i \cdot \bar{\boldsymbol{e}}_k = \beta_j^i \boldsymbol{e}^j \cdot \alpha_k^l \boldsymbol{e}_l = \beta_j^i \alpha_k^l g_l^j \tag{1.3.6c}$$

式(1.3.6)即是度量张量 $\boldsymbol{g}$ 在基变换下的变换规则，可以看到，它们与矢量新旧分量的变换规则是完全类似的，只是系数矩阵 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 出现的次数多了一次而已。虽然由于其对称性，$\boldsymbol{g}$ 的混合分量只有一种表象并与 δ_k^i 相重合，但我们仍不难以矢量的解析定义为基础并通过与式(1.3.6)做类比而给出2阶张量的解析定义如下：

2阶张量的解析定义 如果新旧二组基矢 $\bar{\boldsymbol{e}}_i$ 和 $\boldsymbol{e}_i$ 由式(1.3.1)或式(1.3.3)相联系，而与新旧基矢相关联的2阶系统 $\bar{A}_{ik}\,(A_{ik})$、$\bar{A}^{ik}\,(A^{ik})$、$\bar{A}_i{}^{k}\,(A_i{}^{k})$、$\bar{A}^{i}_{\cdot k}\,(A^{i}_{\cdot k})$ 分别按下式相联系：

$$\begin{cases} \bar{A}_{ik} = \alpha_i^j \alpha_k^l A_{jl}, \quad \bar{A}^{ik} = \beta_j^i \beta_l^k A^{jl}, \quad \bar{A}_i{}^{k} = \alpha_i^j \beta_l^k A_j{}^{l}, \quad \bar{A}^{i}_{\cdot k} = \beta_j^i \alpha_k^l A^{j}_{\cdot l} \\ [\bar{A}_{ik}] = [\alpha_i^j]^{\mathrm{T}}[A_{jl}][\alpha_k^l], \quad [\bar{A}^{ik}] = [\beta_j^i][A^{jl}][\beta_l^k]^{\mathrm{T}} \\ [\bar{A}_i{}^{k}] = [\alpha_i^j]^{\mathrm{T}}[A_j{}^{l}][\beta_l^k]^{\mathrm{T}}, \quad [\bar{A}^{i}_{\cdot k}] = [\beta_j^i][A^{j}_{\cdot l}][\alpha_k^l] \end{cases} \tag{1.3.7}$$

则分别称2阶系统 A_{ik}、A^{ik}、$A_i{}^{k}$、$A^{i}_{\cdot k}$ 为某一个2阶张量 $\boldsymbol{A}$ 的协变分量、逆变分量、第一种混合分量、第二种混合分量，或分别简称为2阶协变张量、2阶逆变张量、第一种2阶混合张量、第二种2阶混合张量。

式(1.3.7)可以用一句话来概述，即在基变换下2阶张量 $\boldsymbol{A}$ 的协变分量、逆变分量、混合分量分别满足2次协变规则、2次逆变规则、1次协变1次逆变规则或1次逆变1次协变规则。当然，如同矢量或基矢的变化规则一样，当我们把变换的方向从由旧变到新改变为由新变到旧时，变换系数矩阵 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 应互换，即协变和逆变规则需要互换。

以此为基础，我们不难给出3阶张量乃至更高阶张量的解析定义。如3阶张量的协变、逆变分量以及各种混合分量的变换规则分别由下式给出：

$$\bar{A}_{ijk} = \alpha_i^l \alpha_j^m \alpha_k^n A_{lmn}, \quad \bar{A}^{ijk} = \beta_l^i \beta_m^j \beta_n^k A^{lmn}, \quad \bar{A}_{ij}{}^{k} = \alpha_i^l \alpha_j^m \beta_n^k A_{lm}{}^{n},$$
$$\bar{A}^{ij}{}_{k} = \beta_l^i \beta_m^j \alpha_k^n A^{lm}{}_{n}, \quad \bar{A}_i{}^j{}_k = \alpha_i^l \beta_m^j \alpha_k^n A_l{}^m{}_n, \quad \bar{A}^i{}_j{}^k = \beta_l^i \alpha_j^m \beta_n^k A^l{}_m{}^n,$$
$$\bar{A}^i{}_{jk} = \beta_l^i \alpha_j^m \alpha_k^n A^l{}_{mn}, \quad \bar{A}_i{}^{jk} = \alpha_i^l \beta_m^j \beta_n^k A_l{}^{mn} \tag{1.3.8}$$

对比矢量、2 阶张量、3 阶张量的变换规则即解析定义，可以看到它们分别可有 2 种、4 种和 8 种不同的表象，张量阶数越高，其表象种类越多，但它们都只是同一个张量的不同表象而已。以此为基础，我们把矢量称为 1 阶张量，而把在基变换下保持其值不变的量，即变换系数矩阵 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 都不出现的量称为标量(scalar)或不变量(invariant)，标量也即是 0 阶张量。n 阶张量含有 n 个指标，在三维空间中，它的每一种分量都是由 3^n 个数组成的 n 阶系统。

标量的解析定义　在基变换下保持数值不变的量 Φ 称为标量，即在新旧基下的值 $\bar{\Phi}$ 和 Φ 满足变换关系：

$$\bar{\Phi} = \Phi \tag{1.3.9}$$

1.3.4　同一张量不同表象(分量)间的关系

我们通过式(1.3.7)和式(1.3.8)建立了 2 阶张量和 3 阶张量各种不同表象的新旧分量间的转换关系，于是很自然地会出现一个问题：同一张量的各种不同分量之间是如何联系的？或者倒过来说，由什么样的关系相联系的不同表象即不同变异特性(协变、逆变、某种混合)的分量才是代表同一个张量的呢？对矢量我们曾以度量张量的协变分量、逆变分量、混合分量与矢量的某种分量相乘并一次约定求和而分别得到下降指标、提升指标、改换指标的方式，建立了其不同分量间的关系，并将之称为矢量与度量张量的一次点积，即

$$a^i = a^j \delta_j^i = \delta_j^i a^j$$
$$a^i = a_j g^{ji} = g^{ij} a_j$$
$$a_i = a^j g_{ji} = g_{ij} a^j$$
$$a_i = a_j \delta_i^j = \delta_i^j a_j$$
$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{g} = \boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{a}$$

对任意阶的张量 $\boldsymbol{A}$，我们也将以同样的方式来建立其不同变异特性的分量间的联系，并且也称之为该张量与度量张量即单位张量 $\boldsymbol{g}$ 的一次点积。如对 2 阶张量 $\boldsymbol{A}$，我们可写出如下各式：

$$
\begin{cases}
A_{ij} = A_{i}^{\cdot k} g_{kj} = g_{ik} A_{\cdot j}^{k} \\
A_{ij} = A_{ik} g_{j}^{k} = g_{i}^{k} A_{kj} \\
A^{ij} = A_{\cdot k}^{i} g^{kj} = g^{ik} A_{k}^{\cdot j} \\
A^{ij} = A^{ik} g_{k}^{j} = g_{k}^{i} A^{kj} \\
A_{i}^{\cdot j} = A_{ik} g^{kj} = g_{ik} A^{kj} \\
A_{i}^{\cdot j} = A_{i}^{\cdot k} g_{k}^{j} = g_{i}^{k} A_{k}^{\cdot j} \\
A_{\cdot j}^{i} = A^{ik} g_{kj} = g^{ik} A_{kj} \\
A_{\cdot j}^{i} = A_{\cdot k}^{i} g_{j}^{k} = g_{k}^{i} A_{\cdot j}^{k} \\
\cdots\cdots \\
\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{g} = \boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{A}
\end{cases}
\tag{1.3.10}
$$

由2阶张量和度量张量新旧分量的变换规则很容易证明：如果在旧基中式(1.3.10)中的某式成立，则在新基中同样的式子也必然成立，故我们以式(1.3.10)各式的方式建立的同一张量不同表象间的关系是与基的选择无关的，因此是合理的，读者可以取一例试证之。

1.3.5 并矢和并矢式

两个矢量的并矢是二张量外积运算的一个特例，本应在下节张量代数中再讲，但是由于其特殊的重要性，我们将在这里特别地先讲一下。很容易证明：由任意二矢量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的分量所组成的如下四个2阶系统具有张量的特性，即

$$
C_{ij} = a_i b_j, \quad C^{ij} = a^i b^j, \quad C_{i}^{\cdot j} = a_i b^j, \quad C_{\cdot j}^{i} = a^i b_j \tag{1.3.11}
$$

分别是2阶协变张量、2阶逆变张量、1次协变1次逆变的2阶张量和1次逆变1次协变的2阶张量，而且可以证明它们是同一个2阶张量 $\boldsymbol{C}$ 的不同分量。事实上，以(1.3.11)式的第一式为例，在新基中，我们应有与(1.3.11)式类似的映射关系，即$\bar{C}_{ij} = \bar{a}_i \bar{b}_j$，再由矢量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 协变分量的变换规则，即有

$$
\bar{C}_{ij} = \bar{a}_i \bar{b}_j = \alpha_i^k a_k \alpha_j^l b_l = \alpha_i^k \alpha_j^l C_{kl}
$$

此式说明 C_{ij}确为2阶协变张量。(1.3.11)式的其他式子可类似地证明之，至于它们是同一张量的不同分量也是容易证明的，这些读者都可以作为练习试证之。

我们把由矢量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的各分量通过式(1.3.11)各式所确定的2阶张量 $\boldsymbol{C}$ 称为矢量$\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的并矢(dyad)，并记为

$$
\boldsymbol{C} = \boldsymbol{ab} \tag{1.3.12}
$$

需要注意的是，并矢是不能交换次序的，即一般 $\boldsymbol{ab} \neq \boldsymbol{ba}$ 。这一点由并矢的定

义式(1.3.11)可以看得很清楚。

由于矢量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 可以分别写为协变分解和逆变分解，即

$$\boldsymbol{a} = a_i\boldsymbol{e}^i = a^i\boldsymbol{e}_i, \quad \boldsymbol{b} = b_j\boldsymbol{e}^j = b^j\boldsymbol{e}_j \tag{1.3.13}$$

将式(1.3.13)代入式(1.3.12)中，我们在形式上可有

$$\boldsymbol{C} = a_i\boldsymbol{e}^i b_j\boldsymbol{e}^j = a^i\boldsymbol{e}_i b^j\boldsymbol{e}_j = a_i\boldsymbol{e}^i b^j\boldsymbol{e}_j = a^i\boldsymbol{e}_i b_j\boldsymbol{e}^j$$

即

$$\boldsymbol{C} = C_{ij}\boldsymbol{e}^i\boldsymbol{e}^j = C^{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j = C_i{}^j\boldsymbol{e}^i\boldsymbol{e}_j = C^i{}_j\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}^j \tag{1.3.14}$$

由于任意二矢量的并矢都是2阶张量，故作为特殊矢量的任意二基矢(协变基矢或逆变基矢)的并矢 $\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j$、$\boldsymbol{e}^i\boldsymbol{e}^j$、$\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}^j$、$\boldsymbol{e}^i\boldsymbol{e}_j$(各有9个)也都是2阶张量，我们将之称为基并矢张量。所以，式(1.3.14)各式的含义即是：我们可以把2阶并矢张量 $\boldsymbol{C}$ 分别写为4组各9个基并矢张量的线性组合，并称之为并矢式(dyadic)，这可以看做是矢量 $\boldsymbol{a}$ 在基矢上线性组合分解式(1.3.13)式的一个推广。显然，我们可以通过类似的方式将矢量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的并矢张量与任一新的矢量再进行并矢从而得到一个3阶张量，并可依此类推至更高阶。同时，在下一节讲过张量外积的概念之后，我们可以把多个基矢的依次并矢称为这些基矢的外积，从而可以把任意阶的张量写为相应阶的基并矢张量的线性组合，将这种类似于式(1.3.13)和式(1.3.14)的所有张量的记法统称为张量的并矢记法或直接记法。这一记法不但使我们可以在形式上揭示各阶张量以矢量为基础的类似性和统一性，而且特别便于我们将矢量运算中的有关运算推广到高阶张量中去，比如定义矢量 $\boldsymbol{n}$ 和2阶张量 $\boldsymbol{T}$ 的点积。

1.3.6 矢量和张量的点积

此种运算本来也应该在下节讲，同样也由于其特殊的重要性我们在此节也特别抽出先单独讲一下，这样做的另一个目的是给出2阶张量的第二定义(有的书上就是以此来定义2阶张量的)。

以2阶张量的直接记法和二矢量的点积为基础，并将之结合，我们可以定义矢量 $\boldsymbol{n}$ 和2阶张量 $\boldsymbol{T}$ 的点积，依二因子位置的不同我们可以分别将之记为 $\boldsymbol{t}=\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{T}$ 和 $\boldsymbol{q}=\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{n}$，它们分别是两个不同的矢量：

$$\boldsymbol{t} = \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{T} = n^j\boldsymbol{e}_j\cdot T_{kl}\boldsymbol{e}^k\boldsymbol{e}^l = n^j\delta_j^k T_{kl}\boldsymbol{e}^l = n^k T_{kl}\boldsymbol{e}^l$$

$$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{n} = T_{kl}\boldsymbol{e}^k\boldsymbol{e}^l\cdot n^j\boldsymbol{e}_j = T_{kl}\boldsymbol{e}^k\delta_j^l n^j = T_{kl}n^l\boldsymbol{e}^k = T_{lk}n^k\boldsymbol{e}^l$$

由此二式可见 $\boldsymbol{t}$ 和 $\boldsymbol{q}$ 的协变分量分别是

$$t_l = n^k T_{kl}, \quad q_l = T_{lk}n^k$$

类似地我们可以写出如下各式：

$$\boldsymbol{t} = \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{T}, \quad t_l = n^k T_{kl} = n_k T^{k}_{\cdot l}, \quad t^l = n^k T_k^{\cdot l} = n_k T^{kl} \tag{1.3.15a}$$

$$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{n}, \quad q_l = T_{lk} n^k = T_l^{\cdot k} n_k, \quad q^l = T^{lk} n_k = T^{l}_{\cdot k} n^k \tag{1.3.15b}$$

以上我们是以张量直接记法和矢量点积为基础，通过二相邻基矢的点积而从形式上写出了矢量 $\boldsymbol{t}=\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{T}$ 和 $\boldsymbol{q}=\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{n}$ 的分量，但并未严格证明它们确实为矢量。事实上，我们很容易根据张量分量的变换规则而直接证明式(1.3.15)中的任何一个 1 阶系统必是矢量的分量，例如以(1.3.15a)式的第一个式子为例，根据在新旧基中映射关系(1.3.15a)式成立和 $\boldsymbol{n}$、$\boldsymbol{T}$ 的张量特性，以及矩阵 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 互逆的性质，我们有

$$\bar{t}_i = \bar{n}^j \bar{T}_{ji} = \beta^j_k n^k \alpha^l_j \alpha^m_i T_{lm} = \delta^l_k n^k \alpha^m_i T_{lm} = \alpha^m_i n^l T_{lm} = \alpha^m_i t_m$$

而此式就证明了 t_i 确是某矢量 $\boldsymbol{t}$ 的协变分量。(1.3.15)式其他各式张量特性的证明与此类似。

1.3.7　2 阶张量的第二定义

式(1.3.15)是重要的，其中一个原因是因为它恰恰就是连续介质力学中以某种方式定义的应力张量 $\boldsymbol{T}$ 和单位法矢为 $\boldsymbol{n}$ 的平面上的应力矢量相联系的公式，只不过这里的 $\boldsymbol{n}$ 可以是任意的矢量罢了。需要强调指出的是，在一般情况下，$\boldsymbol{t}\neq\boldsymbol{q}$，只有当 $\boldsymbol{T}$ 是下节所要讲的所谓 2 阶对称张量(例如 Cauthy 应力张量或第二类P-K 应力张量)时，才有 $\boldsymbol{t}=\boldsymbol{q}$。式(1.3.15)另一个更重要的意义在于：我们可以把“$\cdot\boldsymbol{T}$”和“$\boldsymbol{T}\cdot$”(或者 2 阶张量的分量 T_{kl}、T^{kl}、$T_k^{\cdot l}$、$T^{k}_{\cdot l}$)视为一个线性算子，它们作为一个因子作用于矢量 $\boldsymbol{n}$(或其分量 n_k、n^k)之上，而把空间中的任意矢量 $\boldsymbol{n}$ 都映射为空间中的另一个矢量 $\boldsymbol{t}$ 或 $\boldsymbol{q}$。这就是说下面的定理是成立的：

定理一　2 阶张量的分量 T_{kl}、T^{kl}、$T_k^{\cdot l}$、$T^{k}_{\cdot l}$ 作为线性映射算子按式(1.3.15)把空间中的任意矢量 $\boldsymbol{n}$ 都映射为空间中的另一矢量 $\boldsymbol{t}$ 或 $\boldsymbol{q}$。

事实上，我们还可以证明作为此定理逆定理的如下定理也是成立的：

定理二　如果与基矢相关联的 2 阶系统 T_{kl}、T^{kl}、$T_k^{\cdot l}$、$T^{k}_{\cdot l}$ 按式(1.3.15)把空间中的任意矢量 $\boldsymbol{n}$ 都映射为空间中的另一矢量 $\boldsymbol{t}$ 或 $\boldsymbol{q}$ 的话，则它们一定分别是某一 2 阶张量 $\boldsymbol{T}$ 的协变分量、逆变分量、1 次协变 1 次逆变分量、1 次逆变 1 次协变分量。

虽然我们已经具备了证明此定理的条件，但是为了内容紧凑起见，我们将把其证明留在商法则一节中去讲。

由定理一和定理二我们可以看到，2 阶张量 $\boldsymbol{T}$ 把空间中的任意矢量 $\boldsymbol{n}$ 都线性映射为空间中的另一矢量 $\boldsymbol{t}$(或 $\boldsymbol{q}$)，反之把空间中任意矢量 $\boldsymbol{n}$ 都线性映射为另一矢量 $\boldsymbol{t}$

(或 $\boldsymbol{q}$)的2阶系统必是2阶张量 $\boldsymbol{T}$,因此我们可以给出如下2阶张量的第二定义:

2阶张量的第二定义 2阶张量 $\boldsymbol{T}$ 是通过映射关系(1.3.15)式把空间中的任意矢量 $\boldsymbol{n}$ 都线性映射为另一矢量 $\boldsymbol{t}$(或 $\boldsymbol{q}$)的2阶系统。

1.4 张量代数

本节我们讲张量的代数运算,以后还要讲张量的微分及积分运算,这些运算的一个共同特点就是必须保持张量运算的封闭性,即两个或多个张量运算的结果必须得到一个张量,否则张量工具的优越性也就没有了。

1.4.1 张量乘以标量、同阶张量的加(减)和线性组合

为了叙述简明起见,设 $\lambda,\mu,\nu,\cdots$ 为标量,$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\cdots$ 为矢量,$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\cdots$ 为2阶张量,我们举例来说明之。

任一张量乘以标量 λ 得到的是一个与原张量同阶的新张量,其分量等于原张量相应分量的 λ 倍。例如,按现在的记法,则 $\lambda\mu$、$\lambda\boldsymbol{a}$ 和 $\lambda\boldsymbol{A}$ 分别为标量、矢量和2阶张量,其相应的分量分别为

$$\lambda\mu;\quad \lambda a_i,\ \lambda a^i;\quad \lambda A_{ij},\ \lambda A^{ij},\ \lambda A_{i}^{\cdot j},\ \lambda A^{i}_{\cdot j}$$

任意两个同阶张量的和与差分别是两个新的同阶张量,其分量分别是原来相加减的两个张量相应分量的和与差。推而广之,任意几个同阶张量的线性组合也是一个新的同阶张量,其分量是参与运算张量的相应分量的同型线性组合。例如,$\lambda\boldsymbol{A}+\mu\boldsymbol{B}+\nu\boldsymbol{C}$ 为一新的2阶张量,其分量分别为

$$\lambda A_{ij}+\mu B_{ij}+\nu C_{ij},\quad \lambda A^{ij}+\mu B^{ij}+\nu C^{ij},$$

$$\lambda A_{i}^{\cdot j}+\mu B_{i}^{\cdot j}+\nu C_{i}^{\cdot j},\quad \lambda A^{i}_{\cdot j}+\mu B^{i}_{\cdot j}+\nu C^{i}_{\cdot j}$$

根据张量的解析定义,很容易证明以上运算所得的各量确实是张量。

1.4.2 2阶张量的转置

1. 转置张量的定义

定义 如果对一个给定的2阶张量 $\boldsymbol{T}$,有另外一个2阶张量 $\boldsymbol{S}$,使得对任意矢量 $\boldsymbol{a}$ 都有

$$\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{S} \tag{1.4.1a}$$

则称张量 $\boldsymbol{S}$ 为 $\boldsymbol{T}$ 的转置(transpose)张量,并记为

$$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}} \tag{1.4.1b}$$

现在我们来导出转置张量与原张量分量之间的关系。我们有

$$\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{a}=T_{ij}\boldsymbol{e}^i\boldsymbol{e}^j\cdot a^k\boldsymbol{e}_k=T_{ij}\boldsymbol{e}^i\delta^j_k a^k=T_{ij}a^j\boldsymbol{e}^i=T_{ji}a^i\boldsymbol{e}^j$$

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{S}=a^k\boldsymbol{e}_k\cdot S_{ij}\boldsymbol{e}^i\boldsymbol{e}^j=a^kS_{ij}\delta^i_k\boldsymbol{e}^j=a^iS_{ij}\boldsymbol{e}^j$$

而根据转置张量的定义,我们有 $\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{S}$,而 $\boldsymbol{e}^j$ 线性无关,故有

$$(T_{ji}-S_{ij})a^i=0$$

此式对任意矢量 $\boldsymbol{a}$ 都成立,故由 a^i 的任意性,得 $S_{ij}=T_{ji}$。

类似地可得到

$$S_{ij}=T_{ji},\quad S^{ij}=T^{ji},\quad S_i^{\cdot j}=T^j_{\cdot i},\quad S^i_{\cdot j}=T_j^{\cdot i},$$
$$[S_{ij}]=[T_{ij}]^{\mathrm{T}},\quad [S^{ij}]=[T^{ij}]^{\mathrm{T}},\quad [S_i^{\cdot j}]=[T^i_{\cdot j}]^{\mathrm{T}},\quad [S^i_{\cdot j}]=[T_i^{\cdot j}]^{\mathrm{T}} \tag{1.4.2}$$

由(1.4.2)式显然可见,张量的转置是相互的,即如下二式同时成立:

$$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{T}=\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}} \tag{1.4.1c}$$

由(1.4.2)式还可看到,对互为转置的两个张量而言,它们的协变分量所对应的矩阵是互为转置的,它们的逆变分量所对应的矩阵也是互为转置的。但是,它们的任何一种混合分量所对应的矩阵都并非互为转置,而是 $\boldsymbol{T}$ 的第一种混合分量对应的矩阵和 $\boldsymbol{S}$ 的第二种混合分量所对应的矩阵互为转置,反之亦然。这就是我们为什么用(1.4.1a)式定义转置张量,而不是用其分量定义转置张量的原因。有的书上把(1.4.2)式中的任一式作为转置张量的定义,但这样显然不够一目了然。

根据并矢和转置张量的定义,对矢量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的并矢,我们显然有

$$(\boldsymbol{ab})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{ba} \tag{1.4.3a}$$

于是我们可有

$$\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}=T_{ij}\boldsymbol{e}^j\boldsymbol{e}^i=T^{ij}\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_i=T_i^{\cdot j}\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}^i=T^i_{\cdot j}\boldsymbol{e}^j\boldsymbol{e}_i \tag{1.4.3b}$$

2. 2阶对称张量

定义 如果一个2阶张量 $\boldsymbol{T}$ 具有性质 $\boldsymbol{T}=\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}$,即对任意的矢量 $\boldsymbol{a}$,都有

$$\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{T} \tag{1.4.4a}$$

则称 $\boldsymbol{T}$ 为一个2阶对称(symmetric)张量。

对2阶对称张量 $\boldsymbol{T}$,易证有

$$T_{ij}=T_{ji},\quad T^{ij}=T^{ji},\quad T_i^{\cdot j}=T^j_{\cdot i},\quad T^i_{\cdot j}=T_j^{\cdot i},$$
$$[T_{ij}]=[T_{ij}]^{\mathrm{T}},\quad [T^{ij}]=[T^{ij}]^{\mathrm{T}},\quad [T_i^{\cdot j}]=[T^i_{\cdot j}]^{\mathrm{T}},\quad [T^i_{\cdot j}]=[T_i^{\cdot j}]^{\mathrm{T}} \tag{1.4.4b}$$

即二阶对称张量的协变分量和逆变分量所对应的矩阵都是对称矩阵，但其任何一种混合分量所对应的矩阵都不是对称矩阵，而是两种混合分量所对应的矩阵互为转置矩阵。

利用(1.4.3)式及对称张量的定义，对 2 阶对称张量 $\boldsymbol{T}$，我们可有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{T} &= T_{ij}\boldsymbol{e}^i\boldsymbol{e}^j = T^{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j = T_i^{\cdot j}\boldsymbol{e}^i\boldsymbol{e}_j = T^i_{\cdot j}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}^j \\ &= T_{ij}\boldsymbol{e}^j\boldsymbol{e}^i = T^{ij}\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_i = T_i^{\cdot j}\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}^i = T^i_{\cdot j}\boldsymbol{e}^i\boldsymbol{e}_j\end{aligned} \tag{1.4.4c}$$

即虽然单独对每一个基并矢都是不能交换次序的，但对 2 阶对称张量而言，当只把各组基并矢交换次序后，其线性组合仍等于原张量。

3. 2 阶反对称或斜对称张量

定义 如果一个 2 阶张量 $\boldsymbol{T}$ 具有性质 $\boldsymbol{T} = -\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}$，即对任意的矢量 $\boldsymbol{a}$，都有

$$\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{a} = -\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{T} \tag{1.4.5a}$$

则称 $\boldsymbol{T}$ 为一个 2 阶反对称(antisymmetric)张量或斜对称(skew)张量。

类似于式(1.4.4b)和式(1.4.4c)，对 2 阶反对称张量 $\boldsymbol{T}$，我们可有

$$T_{ij} = -T_{ji},\quad T^{ij} = -T^{ji},\quad T_i^{\cdot j} = -T^j_{\cdot i},\quad T^i_{\cdot j} = -T_j^{\cdot i},$$

$$[T_{ij}] = -[T_{ij}]^{\mathrm{T}},\quad [T^{ij}] = -[T^{ij}]^{\mathrm{T}},\quad [T_i^{\cdot j}] = -[T^i_{\cdot j}]^{\mathrm{T}},\quad [T^i_{\cdot j}] = -[T_i^{\cdot j}]^{\mathrm{T}} \tag{1.4.5b}$$

以及

$$\begin{aligned}\boldsymbol{T} &= T_{ij}\boldsymbol{e}^i\boldsymbol{e}^j = T^{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j = T_i^{\cdot j}\boldsymbol{e}^i\boldsymbol{e}_j = T^i_{\cdot j}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}^j \\ &= -T_{ij}\boldsymbol{e}^j\boldsymbol{e}^i = -T^{ij}\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_i = -T_i^{\cdot j}\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}^i = -T^i_{\cdot j}\boldsymbol{e}^j\boldsymbol{e}_i\end{aligned} \tag{1.4.5c}$$

(1.4.5b)式说明，2 阶反对称张量的协变分量和逆变分量对应的矩阵都是反对称矩阵，而两种混合分量对应的矩阵都不是反对称矩阵，而是两种混合分量对应的矩阵互为负转置矩阵；而(1.4.5c)式则说明，当只把基并矢的矢量位置对换时，将改变该反对称张量的符号。

4. 2 阶张量的和分解定理

根据对称张量和反对称张量的定义，我们容易证明如下的关于 2 阶张量的和分解定理。

定理 任意 2 阶张量 $\boldsymbol{T}$ 都可以分解为对称张量 $\boldsymbol{A}$ 和反对称张量 $\boldsymbol{B}$ 之和，即

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} \tag{1.4.6a}$$

其中

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{T} + \boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}),\quad \boldsymbol{B} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{T} - \boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}) \tag{1.4.6b}$$

而且这种和分解是唯一的。

该定理的证明是很容易的，读者可作为练习证明之。

1.4.3　张量的外积

定义　任意二张量的外积(outer product)定义为一新的张量，其阶数等于二相乘的因子张量的阶数之和，其分量等于二因子张量相应分量的乘积。

例如，设 $\boldsymbol{a}$ 为矢量，$\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 为 2 阶张量，则可定义 3 阶张量 $\boldsymbol{C}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{a}$ 的外积，记为 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{Aa}$，定义 4 阶张量 $\boldsymbol{D}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的外积，记为 $\boldsymbol{D}=\boldsymbol{AB}$，其分量分别如下式：

$$\begin{cases}\boldsymbol{C} = \boldsymbol{Aa}, & C_{ijk} = A_{ij}a_k, \quad C^{ijk} = A^{ij}a^k, \quad C^{ij}_{\cdot\cdot k} = A^{ij}a_k, \quad \cdots \\ \boldsymbol{D} = \boldsymbol{AB}, & D_{ijkl} = A_{ij}B_{kl}, \quad D^{ijkl} = A^{ij}B^{kl}, \quad D^{i}_{\cdot jkl} = A^{i}_{\cdot j}B_{kl}, \quad \cdots \end{cases} \tag{1.4.7}$$

容易证明，式(1.4.7)各式所定义的各量确实为具有相应变异特性的张量。

由定义(1.4.7)式可以看出，以前所定义的标量乘以张量和二矢量的并矢都只是张量外积的特例而已，而且除了标量乘以张量以外，一般而言二张量的外积是不能交换次序的，即

$$\boldsymbol{ab} \neq \boldsymbol{ba}, \quad \boldsymbol{AB} \neq \boldsymbol{BA}$$

而结合律却是成立的：

$$(\boldsymbol{ab})\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{bc}), \quad (\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC}) \tag{1.4.8a}$$

以张量外积为基础，我们可以写出任意阶张量的直接记法。如对 3 阶张量 $\boldsymbol{C}$，可有

$$\boldsymbol{C} = C_{ijk}\boldsymbol{e}^i\boldsymbol{e}^j\boldsymbol{e}^k = C^{ijk}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_k = C^{ij}_{\cdot\cdot k}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}^k = \cdots \tag{1.4.8b}$$

式(1.4.8b)可视为各类三种基并矢(外积)的线性组合即并矢式。

1.4.4　张量的缩并

定义　令一个张量的一对上标和下标相同成为哑标，并按求和约定求和而得出一个新张量的运算，称为该张量之相应指标的一次缩并(contraction)。

显然只有 2 阶及更高阶的张量才可以进行缩并，而且由其缩并一次所得的新张量的阶数比原张量的阶数低 2。

容易证明：由任意张量经一次缩并所得的量确实是张量。例如，对 4 阶张量 $\boldsymbol{B}$，经不同上标和下标的缩并，可得如下不同的 2 阶张量 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{C}$、$\boldsymbol{D}$ 等等：

$$B^{mij}_{m\cdot\cdot} = A^{ij}, \quad B^{im\cdot}_{\cdot mj} = C^{i}_{\cdot j}, \quad B^{mij}_{m\cdot\cdot} = D^{ij}_{\cdot\cdot}, \quad \cdots \tag{1.4.9a}$$

特别说来，对 2 阶张量 $\boldsymbol{T}$ 进行一次缩并，可得到一个标量 Φ：

$$T^{\cdot m}_{m} = \Phi \tag{1.4.9b}$$

容易证明:式(1.4.9b)中的 Φ 确为标量。事实上利用新旧基中的映射关系(1.4.9b)式和 $\boldsymbol{T}$ 的张量性质,我们有

$$\bar{\Phi} = \bar{T}^{m}_{\cdot m} = \beta^{m}_{r}\alpha^{s}_{m}T^{r}_{\cdot s} = \delta^{s}_{r}T^{r}_{\cdot s} = T^{r}_{\cdot r} = \Phi$$

这就证明了 Φ 确为标量(证明中还利用了矩阵 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 为互逆矩阵的事实)。容易证明

$$T_{m}^{\cdot m} = \Phi$$

也是标量,而且与式(1.4.9b)所定义的标量为同一标量,读者可作为练习证明之。

显然,只要允许,我们可以对高阶张量进行二次乃至多次缩并,直到所得张量的阶数低于 2 阶为止,而每缩并一次张量的阶数就降低 2 阶。

1.4.5 张量的点积或内积

在 1.3 节中我们曾以张量的直接记法和两个矢量的点积为基础,定义了矢量 $\boldsymbol{n}$ 和 2 阶张量 $\boldsymbol{T}$ 的点积,即

$$\boldsymbol{t} = \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{T},\quad t_l = n^kT_{kl} = n_kT^{k}_{\cdot l},\quad t^l = n^kT_k^{\cdot l} = n_kT^{kl} \tag{1.3.15a}$$

$$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{n},\quad q_l = T_{lk}n^k = T_l^{\cdot k}n_k,\quad q^l = T^{l}_{\cdot k}n^k = T^{lk}n_k \tag{1.3.15b}$$

回想当时的推导并对照本节所讲的张量外积和缩并两种运算,我们可以看出,这种矢量和 2 阶张量点积的运算,实际上是先将相乘的矢量和 2 阶张量写为直接记法,并进行外积,然后再对一对相邻的基矢进行点积的结果;从指标记法角度看,即是先将矢量和 2 阶张量写为指标记法并进行外积,再对一对相邻的指标进行缩并。我们很自然地可将这种思想进行推广而定义任意二张量的点积(dot product)或内积(inner product)。

定义 将两个张量分别写为直接记法并进行外积,再对它们一对相邻的基矢进行一次(就近)点积的运算,称为此二张量的一次(就近)点积(从直接记法看);或者将任意二张量写为指标记法并进行外积,再对其一对相邻的指标进行缩并的运算,称为此二张量的一次(就近)点积(从指标记法看)。

例如,设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 为两个 2 阶张量,则按此思想我们可定义 2 阶张量 $\boldsymbol{P}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的一次(就近)点积,记为 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$,其分量可计算如下:

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = A_{ij}\boldsymbol{e}^i\boldsymbol{e}^j\cdot B^{k}_{\cdot l}\boldsymbol{e}_k\boldsymbol{e}^l = A_{ij}\boldsymbol{e}^i\delta^j_kB^{k}_{\cdot l}\boldsymbol{e}^l = A_{ij}B^{j}_{\cdot l}\boldsymbol{e}^i\boldsymbol{e}^l,\quad P_{il} = A_{ij}B^{j}_{\cdot l}$$

类似地,还可以写出以下几式,即

$$\begin{cases} P_{il} = A_{ij}B^{j}_{\cdot l} = A_i^{\cdot j}B_{jl}, & P_{il} = A^{ij}B_j^{\cdot l} = A^{\cdot}_{i j}B^{jl} \\ P_i^{\cdot l} = A_{ij}B^{jl} = A_i^{\cdot j}B_j^{\cdot l}, & P^{i}_{\cdot l} = A^{ij}B_{jl} = A^{i}_{\cdot j}B^{j}_{\cdot l} \\ \boldsymbol{P} = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} \end{cases} \tag{1.4.10}$$

容易证明式(1.4.10)各式所给出的2阶系统 P_{il} 等确实具有2阶张量的特性，读者可作为练习证明之。

为了与直接记法和点积的记法相呼应，我们这里只定义了二张量的一次"就近"点积(这是通常用得最多的)，但从指标记法的角度显然我们也可以定义二因子张量中另一对上、下标的缩并，这是它们的一种"非就近"点积，当用直接记法时这种"非就近"点积即对应直接记法中二张量的另一对基矢的点积，为了与"就近"点积相区别，此时我们就应该用另一种特定的点积记法了。这时显然用指标记法更加方便和一目了然。

观察式(1.4.10)各式可见，两个2阶张量的点积运算实际上是与二矩阵的乘积的运算相对应的，而矩阵相乘一般是不能交换次序的，所以与两个矢量点积可以交换次序这一特例不同，一般而言两个张量的一次点积是不能交换次序的。即一般说来，有

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A},\quad \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{a},\quad \cdots$$

但对于矢量 $\boldsymbol{a}$、2阶张量 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 而言，我们易证：

$$\begin{cases}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{a}\\(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\end{cases}\tag{1.4.11a}$$

特别地，我们有

$$\begin{cases}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{a}\quad(\text{如果 }\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A})\\(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}\quad(\text{如果 }\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}\text{ 且}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B})\end{cases}\tag{1.4.11b}$$

此外，对多个2阶张量的点积而言，结合律显然是成立的，就像多个矩阵的乘法结合律是成立的一样，即有

$$(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C})\tag{1.4.11c}$$

同时，多个任意阶张量的依次点积在一般情况下结合律也是成立的，例外的情况是：结合律不适用于先将两个矢量点积再与其他张量点积的情况，因为矢量点积所得的标量与张量进行点积根本就没有意义。例如，对2阶张量 $\boldsymbol{A}$、矢量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，有

$$(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$$

因为标量 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 无法和张量进行点积，故右端根本没有意义，而这时我们采用指标记法显然就更加方便，因为此时交换律和结合律都像数字的连乘一样一目了然。

本书中除了采用张量直接记法和指标记法以外，为了运算方便，对2阶张量和矢量有时还采用矩阵记法，此时对2阶张量 $\boldsymbol{A}$，我们也常以 $\boldsymbol{A}$ 本身、$[\boldsymbol{A}]$或$[A_{ij}]$等来表示$\boldsymbol{A}$ 的某种分量所对应的矩阵；对矢量 $\boldsymbol{a}$，则常以 $\boldsymbol{a}$ 本身、$[\boldsymbol{a}]$或$[a_i]$等来表示$\boldsymbol{a}$ 的某种分量所对应的列阵，而以 $\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}$、$\{\boldsymbol{a}\}$或$\{a_i\}$等来表示$\boldsymbol{a}$ 的某

种分量所对应的行阵。由于2阶张量与2阶张量或矢量的点积(而非外积)才是和矩阵与矩阵或矩阵与列阵相乘的运算相对应的，所以当采用2阶张量的矩阵记法时，本书中我们将把两个矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的乘积以及矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和列阵 $\boldsymbol{a}$ 的乘积分别记为 $\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{a}$ 而不是记为 $\boldsymbol{AB}$ 和 $\boldsymbol{Aa}$，因为后者容易和张量的外积相混淆。按照我们前面所述的记法约定，则张量的直接记法和张量的矩阵记法之间的关系显然是

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B},\quad \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{a},\quad \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\circ\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\circ\boldsymbol{a}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{a},$$

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=[\boldsymbol{A}][\boldsymbol{B}],\quad \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{a}=[\boldsymbol{A}][\boldsymbol{a}],\quad \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{A}=(\{\boldsymbol{a}\}[\boldsymbol{A}])^{\mathrm{T}}=[\boldsymbol{A}]^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{a}]$$

利用张量点积的运算容易证明，对2阶张量 $\boldsymbol{A}$ 和3阶张量 $\boldsymbol{C}$，分别有

$$\begin{cases}A_{ij}=\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{e}_j=(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{e}_j)\cdot\boldsymbol{e}_i, & A^{ij}=\boldsymbol{e}^i\cdot\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{e}^j=(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{e}^j)\cdot\boldsymbol{e}^i\\ A_i{}^j=\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{e}^j=(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{e}^j)\cdot\boldsymbol{e}_i, & A^i{}_{\cdot j}=\boldsymbol{e}^i\cdot\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{e}_j=(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{e}_j)\cdot\boldsymbol{e}^i\\ C_{ijk}=[(\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{e}_k)\cdot\boldsymbol{e}_j]\cdot\boldsymbol{e}_i=\boldsymbol{e}_k\cdot[\boldsymbol{e}_j\cdot(\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{C})]=\cdots\\ C^{ij}{}_{\cdot\cdot k}=[(\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{e}_k)\cdot\boldsymbol{e}^j]\cdot\boldsymbol{e}^i=\boldsymbol{e}_k\cdot[\boldsymbol{e}^j\cdot(\boldsymbol{e}^i\cdot\boldsymbol{C})]=\cdots\end{cases}\tag{1.4.12}$$

1.4.6 张量的二次点积

定义 如果对两个张量的两对上、下标各进行一次缩并，我们便可以得到两个张量在相应意义下的所谓二次点积(double dot product)(对直接记法这对应着两个张量相应位置上的两个基矢各自点积)。

特别说来，我们可以定义两个2阶张量 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的二次点积，其结果将是一个标量。但依赖于缩并指标位置的不同，我们可以分别得到两个不同的标量，分别记为

$$\boldsymbol{A}:\boldsymbol{B}\quad 和\quad \boldsymbol{A}\cdot\cdot\boldsymbol{B}$$

即

$$\boldsymbol{A}:\boldsymbol{B}=A^{ij}B_{ij}=A^i{}_{\cdot j}B_i{}^j=A_{ij}B^{ij}=A_i{}^jB^i{}_{\cdot j}\tag{1.4.13a}$$

$$\boldsymbol{A}\cdot\cdot\boldsymbol{B}=A^{ij}B_{ji}=A^i{}_{\cdot j}B^j{}_{\cdot i}=A_{ij}B^{ji}=A_i{}^jB_j{}^i\tag{1.4.13b}$$

第一种运算中是对两个张量处于同样位置的指标分别进行缩并，而第二种运算中则是对处于不同位置的指标分别进行缩并，它们分别对应于直接记法中同样位置和不同位置基矢的点积，故分别记为 $\boldsymbol{A}:\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{A}\cdot\cdot\boldsymbol{B}$。

需要强调指出的是：尽管式(1.4.13a)和式(1.4.13b)给出的结果都是标量，但一般而言它们是不同的标量，即一般而言

$$\boldsymbol{A}:\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{A}\cdot\cdot\boldsymbol{B}$$

只有当 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 中之一对称时，它们才是相等的，即有

$$\boldsymbol{A}:\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\cdot\cdot\boldsymbol{B}\quad(\text{当 }\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}\text{ 或 }\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}\text{ 时})\tag{1.4.14a}$$

另外，显然这两种二次点积都是可以交换次序的，即我们有

$$\boldsymbol{A}:\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}:\boldsymbol{A},\quad \boldsymbol{A}\cdot\cdot\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\cdot\cdot\boldsymbol{A}\tag{1.4.14b}$$

1.4.7　指标的升降和改换

像矢量指标的升降和改换的规则一样，我们通过度量张量与之相乘并对其某一指标进行缩并来建立张量不同分量间的联系，这样并不能得到新的张量，而只是得到同一张量的不同分量，故度量张量也称为单位张量，我们将这种张量表象间的转换关系记为该张量与度量张量的点积。如对 4 阶张量 $\boldsymbol{D}$，可有

$$\begin{cases} D^{ijkl}g_{lm}=g_{lm}D^{ijkl}=D^{ijk}_{\cdots m}, & D^{ijk}_{\cdots l}g^{lm}=g^{lm}D^{ijk}_{\cdots l}=D^{ijkm} \\ D_{ij}{}^{kl}g_{l}^{m}=g_{l}^{m}D_{ij}{}^{kl}=D_{ij}{}^{km}, & \cdots \end{cases}\tag{1.4.15a}$$

所有这些式子可以用直接记法统一地写为

$$\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{g}=\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{D}=\boldsymbol{D}\tag{1.4.15b}$$

用运算代数的语言讲，式(1.4.15a)的含义即是：作为一个因子，度量张量的协变分量、逆变分量和混合分量(即 Kronecker 记号)分别起一种下降(lowering)指标、提升(raising)指标和改换(changing)指标的作用，即我们可以分别将张量分量中与度量张量重复的哑标下降、上升或改换为度量张量中的另一个指标。

1.5　张量的识别定理——商法则

在 1.3 节中我们曾经定义了矢量 $\boldsymbol{n}$ 和 2 阶张量 $\boldsymbol{T}$ 的点积：

$$\boldsymbol{t}=\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{T},\quad t_l=n^kT_{kl}=n_kT^{k}_{\cdot l},\quad t^l=n^kT_{k}^{\cdot l}=n_kT^{kl}\tag{1.5.1a}$$

$$\boldsymbol{q}=\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{n},\quad q_l=T_{lk}n^k=T_l{}^{k}n_k,\quad q^l=T^{l}_{\cdot k}n^k=T^{lk}n_k\tag{1.5.1b}$$

并且证明了由矢量 $\boldsymbol{n}$ 和 2 阶张量 $\boldsymbol{T}$ 通过式(1.5.1)所定义的 1 阶系统 t_l、t^l、q_l、q^l 都是矢量，故式(1.5.1)的含义可以写为如下的定理：

定理　2 阶张量 $\boldsymbol{T}$ 的分量 T_{kl}、$T^{k}_{\cdot l}$、$T_{k}^{\cdot l}$、T^{kl} 作为线性映射系数按照式(1.5.1)将空间中的任意矢量 $\boldsymbol{n}$ 都映射为空间中的另一个矢量 $\boldsymbol{t}$ 或 $\boldsymbol{q}$。

这个定理可以作为判别系统 t_l、t^l、q_l、q^l 等确实为张量的一个识别定理或商法则(quotient rule)的最简单例子。不过由于已知具有张量特性的两个量都在右

端而要判别是否是张量的量在其另一端，故我们宁可把它看做是张量运算封闭性的一个体现，而不将之作为张量的识别定理。但是以上定理的逆定理之一，即以下的定理却可以作为张量识别定理即商法则的最典型例子。

定理一 如果有一组与基矢量相关联的 2 阶系统 T_{kl}、$T^{k}_{\cdot l}$、$T_{k}^{\cdot l}$、T^{kl}，按照式(1.5.1)将空间中任意矢量 $\boldsymbol{n}$ 都映射为空间中的另一矢量 $\boldsymbol{t}$ 或 $\boldsymbol{q}$，则这些 2 阶系统必是有相应变异特性的张量。

这里为节约文字我们采用了简洁的叙述方法，以式(1.5.1a)的第一个式子 $t_l = n^k T_{kl}$ 为例，其更准确的表述应该是：如果 2 阶系统 T_{kl} 按此式将任意的逆变矢量 n^k 都映射为另一协变矢量 t_l，则 T_{kl} 必为 2 阶协变张量。由于其极端的重要性和代表性，我们给出其详细证明如下。

证明 根据映射关系在旧基、新基中都应成立的前提，在旧基和新基中我们分别有

$$t_l = n^k T_{kl} \tag{a}$$

$$\bar{t}_m = \bar{n}^j \bar{T}_{jm} \tag{b}$$

又因为 n^k 和 t_l 分别为逆变矢量和协变矢量，所以有其新旧分量间的变换关系：

$$\bar{n}^j = \beta^j_k n^k, \quad \bar{t}_m = \alpha^l_m t_l \tag{c}$$

将(c)式的二式代入(b)式中，有

$$\alpha^l_m t_l = \beta^j_k n^k \bar{T}_{jm} \tag{d}$$

再将(a)式代入(d)式中并移项，即有

$$(\alpha^l_m T_{kl} - \beta^j_k \bar{T}_{jm}) n^k = 0 \tag{e}$$

由题设，式(e)对任意的矢量 $\boldsymbol{n}$ 都应成立，故由 n^k 的任意性，可得

$$\alpha^l_m T_{kl} = \beta^j_k \bar{T}_{jm} \tag{f}$$

将式(f)两端同乘以 α^k_i，有

$$\alpha^k_i \alpha^l_m T_{kl} = \alpha^k_i \beta^j_k \bar{T}_{jm} = \delta^j_i \bar{T}_{jm} = \bar{T}_{im}$$

即

$$\bar{T}_{im} = \alpha^k_i \alpha^l_m T_{kl} \tag{g}$$

这里利用了 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 是互逆矩阵的关系。(g)式即说明 T_{kl} 确实为 2 阶协变张量，证毕。

该定理其他部分的证明是类似的，读者可试证之。

如下的定理二和定理三可作为商法则的另两个典型例子。

定理二 如对任意的逆变矢量 v^m，都有

$$v^m u_m = \varphi \tag{1.5.2}$$

为一标量，则映射系数 u_m 必为协变矢量。

定理三　如有一组与基矢相关联的3阶系统 T_{klm}，将任意的逆变矢量 a^k 都按下式：

$$a^k T_{klm} = A_{lm} \tag{1.5.3}$$

映射为一个2阶协变张量 A_{lm}，则3阶系统 T_{klm} 必为3阶协变张量。

这里我们只给出定理二的证明。

证明　事实上，根据新、旧基中映射关系(1.5.2)式都应成立，φ 为标量，v^m 为逆变矢量，我们有

$$\bar{v}^m \bar{u}_m = \bar{\varphi} = \varphi = v^m u_m = \alpha_n^m \bar{v}^n u_m = \alpha_m^n \bar{v}^m u_n$$

这里我们利用了用 $\boldsymbol{v}$ 的新逆变分量表达其旧逆变分量的式子 $v^m = \alpha_n^m \bar{v}^n$，并在最后一式中对哑标 m 和 n 换了位。上式即

$$\bar{v}^m(\bar{u}_m - \alpha_m^n u_n) = 0$$

再由矢量 $\boldsymbol{v}$ 的任意性，即得

$$\bar{u}_m = \alpha_m^n u_n$$

这就证明了 u_n 确实为协变矢量。

显然，类似于定理一、二、三的定理我们可以写出无限多，它们都可以被称为张量的识别定理或商法则。我们不需要非得对商法则给出一个统一的文字表述，只需要认识其核心要求即可，这就是：在一个含有3个带指标量的等式中，由其中2个量的已知张量(变异)特性，而推出第3个量的某种特定张量(变异)特性以保证等式两端的总代数变异特性是完全相同的(这里我们是把逆变视为+1次变异，协变视为-1次变异，某端总代数变异即是该端各量变异次数的代数和，而每个量的指标个数又应等于其逆变和协变次数的绝对值相加)。例如在(1.5.3)式中，已知 a^k 为+1次变异，A_{lm} 为-2次变异，有3个指标的3阶系统 T_{klm} 的张量特性既要保证其逆变和协变次数的绝对值之和为3，又要保证等式两端的代数变异次数相等(即为-2)，显然它只能是-3次变异，即 T_{klm} 只能是3次协变才能保证两端的总代数变异次数相等，即 $1-3=-2$。

需要说明的是：某些时候只由定理中某些量的任意性还不足以保证有关量的张量特性，而必须辅以某些附加条件才可保证有关量的张量特性。这里我们列出如下的定理四，并给出其证明，它在第2章中定义应变张量时有着直接的应用。

定理四　如果与基矢相关联的2阶系统 A_{ij} 按下式对任意逆变矢量 a^i 进行双线性映射所得到的量，即

$$A_{ij} a^i a^j = \varphi \tag{1.5.4a}$$

都是标量，且 2 阶系统 A_{ij} 是对称的，即

$$A_{ij} = A_{ji} \tag{1.5.4b}$$

则 2 阶系统 A_{ij} 必是 2 阶(对称)协变张量。

证明 根据映射关系(1.5.4a)式和 φ 为标量，我们有

$$\bar{A}_{ij}\bar{a}^i\bar{a}^j = \bar{\varphi} = \varphi = A_{ij}a^ia^j \tag{a}$$

由于 a^i 为逆变矢量，故

$$a^i = \alpha^i_r\bar{a}^r, \quad a^j = \alpha^j_s\bar{a}^s \tag{b}$$

将(b)式代入(a)式，得

$$\bar{A}_{ij}\bar{a}^i\bar{a}^j = \alpha^i_r\alpha^j_sA_{ij}\bar{a}^r\bar{a}^s = \alpha^r_i\alpha^s_jA_{rs}\bar{a}^i\bar{a}^j$$

$$(\bar{A}_{ij} - \alpha^r_i\alpha^s_jA_{rs})\bar{a}^i\bar{a}^j = 0 \tag{c}$$

在此，我们并不能从式(c)出发由矢量 $\boldsymbol{a}$ 的任意性而直接得出

$$\bar{A}_{ij} = \alpha^r_i\alpha^s_jA_{rs}$$

从而说明 A_{rs} 为 2 阶张量的结论，这是因为式(c)中的 i 和 j(包括 r 和 s)都是哑标，而 $\boldsymbol{a}$ 的任意性事实上只能由式(c)给出 3 个独立的关系。为了证明 A_{rs} 为 2 阶张量，我们还需要利用 A_{rs} 对称的事实，现说明如下：

如果我们取 $\bar{a}^i$(和 $\bar{a}^j$)为(1,0,0)、(0,1,0)、(0,0,1)，则式(c)将分别给出

$$\bar{A}_{11} = \alpha^r_1\alpha^s_1A_{rs}, \quad \bar{A}_{22} = \alpha^r_2\alpha^s_2A_{rs}, \quad \bar{A}_{33} = \alpha^r_3\alpha^s_3A_{rs} \tag{d}$$

如果取 $\bar{a}^i$(和 $\bar{a}^j$)为(1,1,0)，则式(c)将给出

$$\bar{A}_{11} + \bar{A}_{12} + \bar{A}_{21} + \bar{A}_{22} = \alpha^r_1\alpha^s_1A_{rs} + \alpha^r_1\alpha^s_2A_{rs} + \alpha^r_2\alpha^s_1A_{rs} + \alpha^r_2\alpha^s_2A_{rs} \tag{e}$$

再利用式(d)，则式(e)可写为

$$\bar{A}_{12} + \bar{A}_{21} = \alpha^r_1\alpha^s_2A_{rs} + \alpha^r_2\alpha^s_1A_{rs} \tag{f}$$

此时，我们只有再利用 $\bar{A}_{ij}$ 的对称性才能由式(f)而得出

$$\bar{A}_{12} = \alpha^r_1\alpha^s_2A_{rs} \tag{h}$$

类似地，如果取 $\bar{a}^i$(和 $\bar{a}^j$)为(0,1,1)和(1,0, 1)，则可分别有

$$\bar{A}_{23} = \alpha^r_2\alpha^s_3A_{rs} \tag{i}$$

$$\bar{A}_{31} = \alpha^r_3\alpha^s_1A_{rs} \tag{j}$$

式(d)、(h)、(i)、(j)连同 A_{ij} 的对称性即证明了 2 阶系统 A_{ij} 确为 2 阶对称协变张量。

为了完整起见，我们也给出如下商法则的一般表述，但读者不必硬套它，只需掌握前面所说的原则即可。

定理五　设有对任何基矢都成立的等式：

$$A_{\cdots\cdots}^{\cdots i \cdots} B_{\cdots i \cdots}^{\cdots\cdots} = C_{\cdots\cdots}^{\cdots\cdots} \tag{1.5.5}$$

其中量 $A_{\cdots\cdots}^{\cdots i \cdots}$ 为 m_1次逆变 n_1次协变的张量，$C_{\cdots\cdots}^{\cdots\cdots}$ 为 m_1+m_2-1 次逆变 n_1+n_2-1 次协变的张量，则 m_2+n_2阶系统 $B_{\cdots i \cdots}^{\cdots\cdots}$ 必是 m_2次逆变 n_2次协变的张量。

最后我们指出：根据 1.2 节中的式(1.2.11)和协变基的协变特性，显然我们容易说明 ε_{ijk} 和 ε^{ijk} 分别是 3 阶协变张量和 3 阶逆变张量，即置换张量(而不是置换记号)才具有张量的特性。置换记号只是置换张量在笛卡尔坐标系中的笛卡尔分量，在一般的坐标系中它并不具有张量的特性。以置换张量为映射因子，我们可以建立关于 2 阶反对称张量和矢量对偶关系的如下定理：

定理六　2 阶反对称张量 $\boldsymbol{W}$ 和矢量 $\boldsymbol{\omega}$ 存在着以置换张量 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 为映射因子的如下一一对应的对偶关系：

$$W_{ij} = -\varepsilon_{ijk}\omega^k, \quad \boldsymbol{W} = -\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\boldsymbol{\omega} \tag{1.5.6}$$

该定理的含义是：如果 ω^k 为逆变矢量，则以置换张量协变分量 ε_{ijk} 为映射系数，由(1.5.6)式所确定的 2 阶系统 W_{ij}(显然是反对称的)必是 2 阶协变张量，它显然即是置换张量 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 和矢量 $\boldsymbol{\omega}$ 的一次点积的负值；反之，如果 W_{ij} 为 2 阶反对称张量，则以置换张量协变分量 ε_{ijk} 为映射系数而满足映射关系(1.5.6)式的一阶系统 ω^k 必是逆变矢量。这实际上也是商法则的一个具体例证。(1.5.6)式的反映射关系显然是

$$\omega^k = -\frac{1}{2}\varepsilon^{kij}W_{ij}, \quad \boldsymbol{\omega} = -\frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{W} \tag{1.5.7}$$

两点说明：

(1) 总结一下各个商法则证明过程的共同点可以发现，我们只是用到了其中各带指标的量的变异规则，而并不要求这些量必须是张量的分量本身，即便它们是带指标量的总体量(如基矢)也可以，只要它们对其指标满足相应的变异规则即可。这其实就是商法则的核心：要求每一个等式两端总的代数变异量相等。例如等式：

$$\boldsymbol{a} = a^i\boldsymbol{e}_i = a_i\boldsymbol{e}^i$$

$$\boldsymbol{A} = A_{ij}\boldsymbol{e}^i\boldsymbol{e}^j = A^{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j = A_i^{\cdot j}\boldsymbol{e}^i\boldsymbol{e}_j = A^i_{\cdot j}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}^j$$

等都是满足这一规则要求的，因为式中的张量分量和带指标的基矢满足相应的变异规则，而矢量 $\boldsymbol{a}$ 和 2 阶张量 $\boldsymbol{A}$ 本身则是与基矢无关的零次变异量。这一原则我们以后会经常用到。

(2) 当我们只讨论笛卡尔系中的张量时，无所谓逆变和协变指标的区别，此时需把等式两端的总变异次数视为各张量阶数之和减去哑标数的二倍，则等式两端总变异次数相等的商法则仍是成立的，这便是笛卡尔张量分析中的商法则。本书

讲解力学方面的主要内容时，将主要利用笛卡尔张量的知识，并经常利用笛卡尔张量的商法则，请读者随时注意。同时为了读者容易理解和以后应用方便起见，我们在下面把定理一至定理六在笛卡尔坐标系中的表达方式单独列出：

定理 1 如果有一组与基矢量相关联的 2 阶系统 T_{kl}，按照公式

$$t_l = n_k T_{kl} \tag{1.5.1a)'$$

$$q_l = T_{lk} n_k \tag{1.5.1b)'$$

将空间中任意矢量 $\boldsymbol{n}$ 都映射为空间中的另一矢量 $\boldsymbol{t}$ 或 $\boldsymbol{q}$，则 2 阶系统 T_{kl} 或 T_{lk} 必是 2 阶张量。

定理 2 如对任意的矢量 v_m，都有

$$v_m u_m = \varphi \tag{1.5.2)'$$

为一标量，则映射系数 u_m 必为矢量。

定理 3 如有一组与基矢相关联的 3 阶系统 T_{klm}，将任意的矢量 a_k 都按下式：

$$a_k T_{klm} = A_{lm} \tag{1.5.3)'$$

映射为一个 2 阶张量 A_{lm}，则 3 阶系统 T_{klm} 必为 3 阶张量。

定理 4 如果与基矢相关联的 2 阶系统 A_{ij} 按下式对任意矢量 a_i 进行双线性映射所得到的量，即

$$A_{ij} a_i a_j = \varphi \tag{1.5.4a)'$$

都是标量，且 2 阶系统 A_{ij} 是对称的，即

$$A_{ij} = A_{ji} \tag{1.5.4b)'$$

则 2 阶系统 A_{ij} 必是 2 阶(对称)张量。

定理 5 设有对任何基矢都成立的等式：

$$A_{\cdots i \cdots} B_{\cdots i \cdots} = C_{\cdots\cdots} \tag{1.5.5)'$$

其中量 $A_{\cdots i \cdots}$ 为 m 阶张量，$C_{\cdots\cdots}$ 为 $m+n-2$ 阶张量，则 n 阶系统 $B_{\cdots i \cdots}$ 必是 n 阶张量。

定理 6 2 阶反对称张量 $\boldsymbol{W}$ 和矢量 $\boldsymbol{\omega}$ 以置换张量 $\boldsymbol{e}$ 为映射因子存在着如下一一对应的对偶关系：

$$W_{ij} = -e_{ijk}\omega_k, \quad \boldsymbol{W} = -\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{\omega} \tag{1.5.6)'$$

或

$$\omega_k = -\frac{1}{2}e_{kij}W_{ij}, \quad \boldsymbol{\omega} = -\frac{1}{2}\boldsymbol{e} : \boldsymbol{W} \tag{1.5.7)'$$

以映射关系(1.5.6)′式为例，该定理的含义是：如果 ω_k 为矢量，则以置换张量 e_{ijk} 为映射系数，由(1.5.6)′式所确定的 2 阶系统 W_{ij}（显然是反对称的）必是 2 阶

张量，它显然即是置换张量 $\boldsymbol{e}$ 和矢量 $\boldsymbol{\omega}$ 的一次点积的负值；反之，如果 W_{ij} 为2阶反对称张量，则以置换张量 e_{ijk} 为映射系数而满足映射关系(1.5.6)′式的一阶系统 ω_k 必是矢量。

1.6 2阶张量的特征值和特征矢量

2阶张量的特征值和特征矢量的问题在力学和物理学中具有重要的意义，特别是在介质的变形和受力描述、振动、波传播等方面有广泛应用，故在此做一简要介绍。

定义 对2阶张量 $\boldsymbol{T}$，如果存在一个非零矢量 $\boldsymbol{l}$ 和一个数 λ，使得

$$\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{T}=\lambda\boldsymbol{l} \tag{1.6.1a}$$

则称 λ 为 $\boldsymbol{T}$ 的一个特征值(eigenvalue)，称 $\boldsymbol{l}$ 为 $\boldsymbol{T}$ 的一个与特征值 λ 相对应的左特征矢量(left eigenvector)，或简称为左特矢；如果存在一个非零矢量 $\boldsymbol{r}$ 和一个数 μ，使得

$$\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{r}=\mu\boldsymbol{r} \tag{1.6.1b}$$

则称 μ 为 $\boldsymbol{T}$ 的一个特征值，称 $\boldsymbol{r}$ 为 $\boldsymbol{T}$ 的一个与特征值 μ 相对应的右特征矢量(right eigenvector)，或简称为右特矢。

现在我们来求出给定的2阶张量 $\boldsymbol{T}$ 的特征值和左、右特征矢量。如以 $\boldsymbol{T}$ 的混合分量 $T^{i}_{\cdot j}$ 来求之，则(1.6.1a)式和(1.6.1b)式可分别写为

$$l_iT^{i}_{\cdot j}=\lambda l_j=\lambda\delta^i_j l_i,\quad l_i(T^{i}_{\cdot j}-\lambda\delta^i_j)=0 \tag{1.6.2a}$$

$$T^{i}_{\cdot j}r^j=\mu r^i=\mu\delta^i_j r^j,\quad (T^{i}_{\cdot j}-\mu\delta^i_j)r^j=0 \tag{1.6.2b}$$

(1.6.2a)式和(1.6.2b)式分别是 $\boldsymbol{l}$ 的协变分量 l_i 和 $\boldsymbol{r}$ 的逆变分量 r^j 的线性齐次代数方程组，其系数矩阵分别为 $[T^{i}_{\cdot j}-\lambda\delta^i_j]^{\mathrm{T}}$ 和 $[T^{i}_{\cdot j}-\mu\delta^i_j]$。根据线性代数的定理，(1.6.2)式对 l_i 和 r^j 有非零解分别要求它们的行列式为0，但由于转置矩阵和原矩阵行列式相等，故我们可得到求特征值 λ 和 μ 的特征方程分别为

$$\|[T^{i}_{\cdot j}-\lambda\delta^i_j]^{\mathrm{T}}\|=\|[T^{i}_{\cdot j}-\lambda\delta^i_j]\|=0,\quad \|[T^{i}_{\cdot j}-\mu\delta^i_j]\|=0 \tag{1.6.3}$$

(1.6.3)式说明：由左、右特征矢量所定义的特征值 λ、μ 是相等的，以后用 λ 表示之。当我们由(1.6.3)式求出各特征值 λ 后(有3个)，将之代入(1.6.2a)式和

(1.6.2b)式中并解之，即可求出其相应的左、右特征矢量 l_i 和 r^j，即 $\boldsymbol{l}$ 和 $\boldsymbol{r}$。需要说明的是：尽管由左、右特征矢量所定义的特征值是相等的，但一般而言其对应的左、右特征矢量则是不同的，这是因为求解它们的线性齐次代数方程组的系数矩阵并不相同，而只是互为转置。但是，根据转置张量的定义，我们有

$$\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{l} = \lambda\boldsymbol{l} \tag{1.6.4a}$$

$$\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}} = \mu\boldsymbol{r} \tag{1.6.4b}$$

所以，如果 $\boldsymbol{l}$ 是 $\boldsymbol{T}$ 的左特矢，则其也就是 $\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}$ 的对应同一特征值的右特矢，反之，如果 $\boldsymbol{r}$ 是 $\boldsymbol{T}$ 的右特矢，则其也就是 $\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}$ 的对应同一特征值的左特矢。这就是张量左、右特矢的关系。特别说来，当 $\boldsymbol{T}=\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}$ 为 2 阶对称张量时，则 $\boldsymbol{l}=\boldsymbol{r}$，其左、右特征矢量也就重合了，而这恰是力学和物理学中最常见的情况。

通过与上面类似的方法，我们还可以导出由 2 阶张量 $\boldsymbol{T}$ 的其他分量(另一混合分量、协变或逆变分量)求出矢量 $\boldsymbol{l}$ 和 $\boldsymbol{r}$ 的式子，而且可以证明由这些不同分量求出的特征值及左、右特征矢量是分别相同的；当然，我们也可以由张量不同分量间的关系直接变换(1.6.2a)式和(1.6.2b)式而完成此任务。这些问题读者可以作为练习实践之。

1.7 曲线坐标和曲线坐标中的张量

1.7.1 曲线坐标(curvilinear coordinate)

迄今为止，我们只在空间的一个点上讨论了与这一点有关的张量，并以这一点上的局部基为工具讨论了张量的各种表象及其相互关系，也讨论了当局部基进行基变换时张量各种表象的变换规则。我们还并未引入布满整个空间的坐标网。对笛卡尔坐标系引入坐标网是简单的，因为笛卡尔坐标网是均匀不变地布满整个空间的，基矢量也是与点的位置无关的。连续介质力学的基本方法是场的方法，而且有时常常是需要引入不同于笛卡尔坐标网的曲线坐标网的。为此，我们以笛卡尔直角坐标(z^1,z^2,z^3)为桥梁，以下面的 3 个 3 元函数引入曲线坐标(x^1,x^2,x^3)：

$$x^m = x^m(z^1,z^2,z^3) \quad (m=1,2,3) \tag{1.7.1a}$$

只要变换(1.7.1a)式的 Jacobian 行列式(除了个别的点或线之外)处处不为零，即

$$J = \left\| \frac{\partial x^m}{\partial z^n} \right\| \neq 0 \tag{1.7.2}$$

则由隐函数定理知，变换(1.7.1a)式存在唯一的反函数，设为

$$z^n = z^n(x^1, x^2, x^3) \quad (n = 1,2,3) \tag{1.7.1b}$$

我们称 x^3 为常数的曲面，即曲面

$$x^3 = x^3(z^1, z^2, z^3) = \text{const}$$

为一个 x^3 坐标面(或 x^1x^2 坐标面)，其上 x^3 为常数而只有 x^1 和 x^2 可以变化。其他两个坐标面也可类似定义。称坐标面 x^1 和坐标面 x^2 的交线，即曲线

$$\begin{cases} x^1(z^1, z^2, z^3) = \text{const} \\ x^2(z^1, z^2, z^3) = \text{const} \end{cases}$$

为一条 x^3 坐标线，沿此曲线只有 x^3 变化，而 x^1 和 x^2 都为常数。其他两条坐标线可类似定义。

在空间某一点 P 处，坐标线和坐标面的几何图像如图 1.3 所示。图中也画出了参考点 O 处的笛卡尔坐标线 z^i 和幺正基矢量 $\boldsymbol{i}_i = \boldsymbol{i}^i (i = 1,2,3)$。

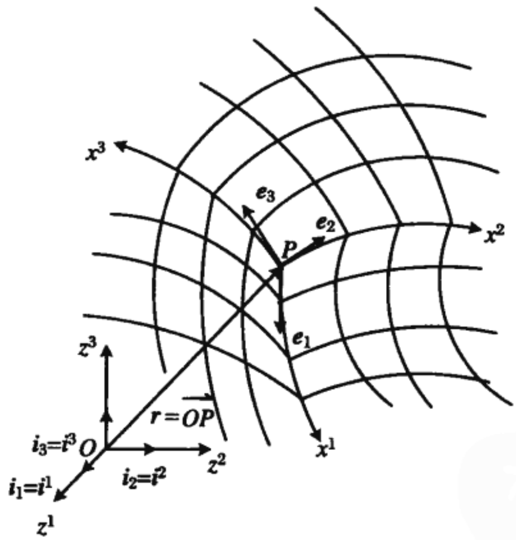


图 1.3 曲线坐标系

P 点相对于参考点 O 的位置矢量$\overrightarrow{OP}$在笛卡尔坐标系中可以写为

$$\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OP} = z^n \boldsymbol{i}_n \tag{1.7.3a}$$

当由 P 点移至邻近的一点时，点的位置矢量 $\boldsymbol{r}$ 及其笛卡尔坐标 z^n 和曲线坐标 x^m 都会改变，因此位置矢量 $\boldsymbol{r}$ 是 z^n 或 x^m 的函数。特别地，当由 P 点沿着坐标线 x^k

移至邻近的一点时，则 $\boldsymbol{r}$ 将成为只依赖于坐标 x^k 的函数，因而我们在 P 点可定义 3 个矢量如下：

$$\boldsymbol{e}_k(P)=\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^k}=\lim_{\Delta x^k\to 0}\frac{\boldsymbol{r}(x^k+\Delta x^k)-\boldsymbol{r}(x^k)}{\Delta x^k}\quad(k=1,2,3)\tag{1.7.3b}$$

由定义可知，这些矢量必然沿着 P 点处坐标线 x^k 的切线并且指向 x^k 增加的方向，如图 1.3 所示。由于笛卡尔基矢 $\boldsymbol{i}_n$ 与 P 点的位置是无关的，故由(1.7.3a)式和(1.7.3b)式可得

$$\boldsymbol{e}_k(P)=\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^k}=\frac{\partial z^n}{\partial x^k}\boldsymbol{i}_n$$

同时我们又有

$$\boldsymbol{i}_n=\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial z^n}=\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^k}\frac{\partial x^k}{\partial z^n}=\frac{\partial x^k}{\partial z^n}\boldsymbol{e}_k$$

将两式写在一起，有

$$\boldsymbol{e}_k(P)=\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^k}=\frac{\partial z^n}{\partial x^k}\boldsymbol{i}_n\quad(k=1,2,3)\tag{1.7.4a}$$

$$\boldsymbol{i}_n=\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial z^n}=\frac{\partial x^k}{\partial z^n}\boldsymbol{e}_k\quad(n=1,2,3)\tag{1.7.4b}$$

如果 $\boldsymbol{e}_k$ 也是线性无关的，因而可以作为一组基的话，则(1.7.4)式就给出了笛卡尔基 $\boldsymbol{i}_n$ 和基 $\boldsymbol{e}_k$ 间相互表达的关系式：(1.7.4a)式说明 $\frac{\partial z^n}{\partial x^k}$ 是 $\boldsymbol{e}_k$ 在 $\boldsymbol{i}_n$ 上的笛卡尔分量，(1.7.4b)式说明 $\frac{\partial x^k}{\partial z^n}$ 是 $\boldsymbol{i}_n$ 在 $\boldsymbol{e}_k$ 中的逆变分量。以后我们约定分母中的上标和下标分别代表下标和上标，故约定求和的规则在(1.7.4)式中仍是清晰不乱的。由于 $\frac{\partial z^n}{\partial x^k}$ 和 $\frac{\partial x^k}{\partial z^n}$ 分别是 $\boldsymbol{e}_k$ 和 $\boldsymbol{i}_n$ 互相线性表达的系数矩阵，所以它们必定是互逆的矩阵。事实上，我们有

$$\delta_n^k=\frac{\partial x^k}{\partial x^n}=\frac{\partial x^k}{\partial z^s}\frac{\partial z^s}{\partial x^n},\quad \delta_n^k=\frac{\partial z^k}{\partial z^n}=\frac{\partial z^k}{\partial x^s}\frac{\partial x^s}{\partial z^n}\tag{1.7.5}$$

这就证明了我们的结论。

现在我们证明 $\boldsymbol{e}_k$ 确实是线性无关的。注意 $\boldsymbol{i}_n$ 为幺正基，而 $\frac{\partial z^n}{\partial x^k}$ 为 $\boldsymbol{e}_k$ 的第 n 个笛卡尔分量，故由(1.7.4a)式及混合乘积的计算公式，我们有

$$\boldsymbol{e}_1\cdot(\boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_3)=e_{ijk}\frac{\partial z^i}{\partial x^1}\frac{\partial z^j}{\partial x^2}\frac{\partial z^k}{\partial x^3}=\left\|\frac{\partial z^n}{\partial x^k}\right\|=\frac{1}{\left\|\frac{\partial x^k}{\partial z^n}\right\|}\neq 0\tag{1.7.6}$$

由(1.7.2)式知$\left\|\dfrac{\partial x^k}{\partial z^n}\right\|\neq 0$,故$\left\|\dfrac{\partial z^n}{\partial x^k}\right\|\neq 0$,即$\boldsymbol{e}_k$确实是线性无关的,因而可以作为$P$点处的一组基,我们将之称作为曲线坐标中$P$处的协变基。需要强调指出的是:一般情况下,3个矢量$\boldsymbol{e}_k(P)$不但长度不一定为1,不一定两两正交,而且它们在空间各点也并不是常矢量,而是与P点位置有关的,故是空间位置的点函数,这是曲线坐标与笛卡尔坐标最重要的区别,前面诸式中记号$\boldsymbol{e}_k(P)$中的P就是为了特别强调这一点。但为了书写简洁起见,以后我们常省略掉这一标记P。

现在我们可以按照1.1节中的式(1.1.14)求出与$\boldsymbol{e}_k$对偶的逆变基$\boldsymbol{e}^k$了。但我们也可以给出如下的求法。注意$\boldsymbol{i}_i=\boldsymbol{i}^i$的幺正性,我们可以将

$$\frac{\partial x^k}{\partial z^s}\frac{\partial z^s}{\partial x^m}=\frac{\partial x^k}{\partial x^m}=\delta^k_m$$

改写为

$$\left(\frac{\partial x^k}{\partial z^s}\boldsymbol{i}^s\right)\cdot\left(\boldsymbol{i}_r\frac{\partial z^r}{\partial x^m}\right)=\delta^k_m$$

利用(1.7.4)式,此式即

$$\left(\frac{\partial x^k}{\partial z^s}\boldsymbol{i}^s\right)\cdot\boldsymbol{e}_m=\delta^k_m$$

我们又有

$$\boldsymbol{e}^k\cdot\boldsymbol{e}_m=\delta^k_m$$

故有

$$\left(\boldsymbol{e}^k-\frac{\partial x^k}{\partial z^s}\boldsymbol{i}^s\right)\cdot\boldsymbol{e}_m=0$$

即括号中矢量的任何一个协变分量($m=1,2,3$)都为0,故此矢量必为零矢量,即有

$$\boldsymbol{e}^k=\frac{\partial x^k}{\partial z^s}\boldsymbol{i}^s$$

将此式两端同乘以$\dfrac{\partial z^r}{\partial x^k}$,并注意互逆关系(1.7.5)式,我们有

$$\boldsymbol{i}^r=\frac{\partial z^r}{\partial x^k}\boldsymbol{e}^k$$

将此二式写在一起,即有

$$\boldsymbol{e}^k=\frac{\partial x^k}{\partial z^s}\boldsymbol{i}^s\quad(k=1,2,3)\tag{1.7.7a}$$

$$\boldsymbol{i}^s=\frac{\partial z^s}{\partial x^k}\boldsymbol{e}^k\quad(s=1,2,3)\tag{1.7.7b}$$

式(1.7.7)即给出了逆变基 $\boldsymbol{e}^k$ 和笛卡尔基 $\boldsymbol{i}^s$ 间相互线性表达的关系式，即 $\dfrac{\partial x^k}{\partial z^s}$ 是 $\boldsymbol{e}^k$ 的第 s 个笛卡尔分量，$\dfrac{\partial z^s}{\partial x^k}$ 是 $\boldsymbol{i}^s$ 的第 k 个协变分量。

这样，以曲线坐标 x^k 的定义(1.7.1)式为基础，我们就在全空间的每一点 P 处建立了该点的协变基 $\boldsymbol{e}_k$ 和逆变基 $\boldsymbol{e}^k$，以及它们与直角笛卡尔基 $\boldsymbol{i}_n = \boldsymbol{i}^n$ 的关系，也就可以对每一点上的任意张量建立其在该点曲线坐标基上的各种表象了。

1.7.2 曲线坐标变换及其变换矩阵

现在我们来研究一个重要的问题：当取不同的曲线坐标即进行曲线坐标的坐标变换时，任一张量在各点上各种新、旧表象是如何变换的。因为我们讨论的是在基变换下满足确定的张量变换规则的张量，所以问题的核心显然就是如何求出在一定曲线坐标变换下相应的基变换的协变系数矩阵和逆变系数矩阵。

与以前的记法类似，我们分别以 $\bar{x}^i$ 和 x^i 表示新、旧曲线坐标，而曲线坐标变换则可以由它们之间的任何一个一一对应的可逆映射关系来表达，记为

$$\bar{x}^i = \bar{x}^i(x^1, x^2, x^3), \quad x^j = x^j(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3) \tag{1.7.8}$$

相应地，我们就有了与它们对应的曲线坐标网以及在各点上的基矢量，也就有了张量在各点上相应的基中的各种分量。变换(1.7.8)式的一一对应性可以由其第一式或第二式变换的 Jacobian 行列式不为零来保证。我们将分别以 $\boldsymbol{\beta}$ 和 $\boldsymbol{\alpha}$ 记变换(1.7.8)式的两个变换矩阵，即记

$$\beta^i_j = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j}, \quad \alpha^j_i = \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i} \tag{1.7.9}$$

显然这两个矩阵是互逆的，这是因为我们有

$$\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^s}\frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^j} = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial \bar{x}^j} = \delta^i_j, \quad \frac{\partial x^j}{\partial x^i} = \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^s}\frac{\partial \bar{x}^s}{\partial x^i} = \delta^j_i \tag{1.7.10}$$

现在我们来证明它们即是在各点处基变换的逆变系数矩阵和协变系数矩阵。事实上，在新、旧坐标中，利用基矢量的定义(1.7.3)式和关系(1.7.7)式、(1.7.9)式，我们可有

$$\bar{\boldsymbol{e}}_k = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \bar{x}^k} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^m}\frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^k} = \boldsymbol{e}_m \alpha^m_k$$

$$\bar{\boldsymbol{e}}^k = \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial z^s}\boldsymbol{i}^s = \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^m}\frac{\partial x^m}{\partial z^s}\boldsymbol{i}^s = \beta^k_m \boldsymbol{e}^m$$

即

$$\bar{\boldsymbol{e}}_k = \alpha^m_k \boldsymbol{e}_m \tag{1.7.11a}$$

$$\bar{e}^k = \beta^k_m e^m \tag{1.7.11b}$$

对式(1.7.11)的二式进行反解，或者分别在其两端乘以 α 和 β 的逆矩阵，即可得

$$e_m = \beta^k_m \bar{e}_k \tag{1.7.12a}$$

$$e^k = \alpha^k_m \bar{e}^m \tag{1.7.12b}$$

式(1.7.11)和式(1.7.12)即给出了新、旧基矢之间互以线性组合进行表达的公式，这与以前我们在一点局部基处所讲的公式完全一致，所以式(1.7.9)所给出的 β 和 α 即分别是曲线坐标变换下的逆变系数矩阵和协变系数矩阵。但需要强调指出的是：一般而言它们在空间中并不是常矩阵，而是点的位置的函数。

1.7.3　几点说明

(1) 在前面的记法中，对曲线坐标我们利用了 x^i 的记号，但它只是曲线坐标，而并不是位置矢量 $\boldsymbol{r}=r^i\boldsymbol{e}_i$ 的逆变分量 r^i，这就是对位置矢量我们用 $\boldsymbol{r}$ 而不用 $\boldsymbol{x}$ 的理由，这一点是与笛卡尔坐标 z^n 恰是位置矢量的笛卡尔分量完全不同的：$\boldsymbol{r}=z^n\boldsymbol{j}_n$。事实上，新、旧曲线坐标 $\bar{x}^i$ 和 x^j 间的变换关系(1.7.8)式完全可以是任意的，并不一定要像新、旧张量分量间的线性齐次变换关系一样。由于

$$\boldsymbol{r} = z^n \boldsymbol{i}_n = z^n \frac{\partial x^k}{\partial z^n}\boldsymbol{e}_k,\quad \boldsymbol{r} = z_n \boldsymbol{i}^n = z^n \frac{\partial z^n}{\partial x^k}\boldsymbol{e}^k \tag{1.7.13a}$$

所以位置矢量 $\boldsymbol{r}$ 的逆变分量和协变分量分别是

$$r^k = z^n \frac{\partial x^k}{\partial z^n},\quad r_k = z_n \frac{\partial z^n}{\partial x^k}\quad (\text{记 } z_n = z^n) \tag{1.7.13b}$$

但这里它们仍然要借助于该点的笛卡尔坐标 $z_n=z^n$ 为桥梁来表达。

(2) 前面讲过，对一般的曲线坐标，空间中任一点的基矢 $\boldsymbol{e}_k$ 和 $\boldsymbol{e}^k$ 都未必是幺正基。如果在每一点处曲线坐标都是两两正交的，即 $\boldsymbol{e}_k$ 是两两正交的(因之 $\boldsymbol{e}^k$ 也是两两正交的)，则此种曲线坐标称为正交(perpendicular)曲线坐标。但是，即使 $\boldsymbol{e}_k$ 两两正交，它们的长度也未必是1，此时由逆变基的定义，我们必有

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}^k \parallel \boldsymbol{e}_k,\quad |\boldsymbol{e}^k| = \dfrac{1}{|\boldsymbol{e}_k|}\quad (k=1,2,3) \\ \boldsymbol{e}^k = \dfrac{\boldsymbol{e}_k}{|\boldsymbol{e}^k|^2},\quad g^{kk} = |\boldsymbol{e}^k|^2 = \dfrac{1}{|\boldsymbol{e}_k|^2} = \dfrac{1}{g_{kk}}\quad (k=1,2,3,\text{不求和}) \\ g_{ij}=0,\quad g^{ij}=0\quad (i=1,2,3;j=1,2,3;\text{当 } i\neq j) \end{cases} \tag{1.7.14}$$

即对正交曲线坐标而言，$[g_{ij}]$和$[g^{ij}]$都为对角矩阵，且两者的对角元素互为倒数。

正交曲线坐标是物理学特别是力学中最常用的曲线坐标，如柱坐标、球坐标等

都是正交曲线坐标。而只有对直角笛卡尔坐标 $x^k = z^k$,我们才在空间的每一点上都有 $\boldsymbol{e}_k = \boldsymbol{e}^k = \boldsymbol{i}_k = \boldsymbol{i}^k$,而且组成常幺正矢量组,而此时 $g_{ij} = \delta_{ij}, g^{ij} = \delta^{ij}, g^i_j = \delta^i_j$ 都对应单位矩阵。

1.8 张量实例

本节我们重点介绍几个在数学和力学应用上有着基本意义的重要的张量实例,以加强读者对张量概念的理解。

1.8.1 坐标的微分是逆变矢量

点的位置矢量 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(x^m)$ 是其坐标 x^m 的矢量函数,由此可求其微分矢量 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$。利用基矢的定义,我们有

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\partial x^m}\mathrm{d}x^m = \boldsymbol{e}_m \mathrm{d}x^m \tag{1.8.1}$$

在坐标变换之下,微分矢量 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 本身是坐标变换下的不变量,即为零次变异量,基矢量 $\boldsymbol{e}_m$ 是 1 次协变量,故由商法则可以得出结论:坐标的微分 $\mathrm{d}x^m$ 必是 1 次逆变的量,简言之即 $\mathrm{d}x^m$ 是一逆变矢量,或者说它是某矢量的逆变分量,而式(1.8.1)说明此矢量即是 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$,因为 $\mathrm{d}x^m$ 恰是 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 在 $\boldsymbol{e}_m$ 上的分解系数。$\mathrm{d}x^m$ 是逆变矢量的结论还可以通过求新坐标的微分并利用复合函数求导的链锁法则来说明:

$$\mathrm{d}\bar{x}^m = \frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^n}\mathrm{d}x^n = \beta^m_n \mathrm{d}x^n \tag{1.8.2}$$

即新、旧坐标的微分满足 1 次逆变规则,或者说 $\mathrm{d}x^m$ 确为逆变矢量。

我们曾在 1.7 节中指出:坐标本身 x^m 并不是位置矢量 $\boldsymbol{r}$ 的逆变分量,而只是点的曲线坐标。但(1.8.1)式和(1.8.2)式则说明:坐标的微分 $\mathrm{d}x^m$ 却确实为微分矢量 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 的逆变分量,这一点具有特别重要的意义,必须铭记在心。至于位置矢量 $\boldsymbol{r}$ 本身的逆变和协变分量,我们有

$$r^m = \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{e}^m = \boldsymbol{r}\cdot\frac{\partial x^m}{\partial z^n}\boldsymbol{i}^n = \frac{\partial x^m}{\partial z^n}z^n$$

$$r_m = \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{e}_m = \boldsymbol{r}\cdot\frac{\partial z^n}{\partial x^m}\boldsymbol{i}_n = \frac{\partial z^n}{\partial x^m}z_n \quad (\text{记 } z_n = z^n)$$

这两式和 1.7 节中的式(1.7.13a)、式(1.7.13b)是一样的，只是导出方法不同而已。

利用(1.8.1)式，可以写出微分矢量 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 长度 $\mathrm{d}s=|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|$ 的平方为

$$\mathrm{d}s^2=\mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\mathrm{d}x^i\boldsymbol{e}_i\cdot\mathrm{d}x^j\boldsymbol{e}_j=g_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j \tag{1.8.3}$$

即 $\mathrm{d}s^2$ 可以写为以对称矩阵 g_{ij} 为系数矩阵的坐标微分 $\mathrm{d}x^i$ 的二次型。在某些偏重数学知识的书中，正是以此式作为定义度量张量 g_{ij} 的基础的。

1.8.2 标量对坐标的偏导数是协变矢量

考虑任一标量 ϕ，求其对新、旧坐标的偏导数，我们有

$$\frac{\partial\bar{\phi}}{\partial\bar{x}^i}=\frac{\partial\phi}{\partial\bar{x}^i}=\frac{\partial\phi}{\partial x^j}\frac{\partial x^j}{\partial\bar{x}^i}=\alpha_i^j\frac{\partial\phi}{\partial x^j} \tag{1.8.4}$$

(1.8.4)式说明，标量对坐标的偏导数$\frac{\partial\phi}{\partial x^j}$为协变矢量，或者说它是某一矢量的协变分量。我们把这个矢量称为标量 ϕ 的梯度(gradient)矢量，记为 $\mathrm{grad}\phi$，即有

$$\mathrm{grad}\phi=\frac{\partial\phi}{\partial x^j}\boldsymbol{e}^j \tag{1.8.5a}$$

此式是高等数学中笛卡尔坐标系下标量梯度矢量表达式 $\mathrm{grad}\phi=\frac{\partial\phi}{\partial x^i}\boldsymbol{i}^i$ 的一个推广。$\frac{\partial\phi}{\partial x^j}$是协变矢量的结论也可由微分关系：

$$\mathrm{d}\phi=\frac{\partial\phi}{\partial x^j}\mathrm{d}x^j=\mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{grad}\phi \tag{1.8.6}$$

利用商法则而得证：$\mathrm{d}\phi$ 为零次变异，$\mathrm{d}x^j$ 为 1 次逆变，故由商法则知$\frac{\partial\phi}{\partial x^j}$必为协变矢量。

若以 s 表示某方向的弧长，以 $\boldsymbol{s}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}=\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}s}\boldsymbol{e}_i$ 表示 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 方向的单位矢量，则其逆变分量为 $s^i=\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}s}$，而 ϕ 在一点处沿 $\boldsymbol{s}$ 的方向导数将为

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}s}=\frac{\partial\phi}{\partial x^i}\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}s}=\frac{\partial\phi}{\partial x^i}s^i=\boldsymbol{s}\cdot\mathrm{grad}\phi \tag{1.8.5b}$$

这是“标量 ϕ 沿任意方向的方向导数等于其梯度矢量在该方向的正交投影”这一结果在曲线坐标中的表现形式，所以梯度方向是 ϕ 变化最快的方向，ϕ 在梯度方向的方向导数恰等于梯度矢量之模。

如果我们取标量 ϕ 为坐标 x^i，则(1.8.5)式将给出

$$\mathrm{grad}x^i = \frac{\partial x^i}{\partial x^j}\boldsymbol{e}^j = \delta^i_j\boldsymbol{e}^j = \boldsymbol{e}^i \tag{1.8.7}$$

这说明逆变基矢量在微分学的意义上恰是坐标 x^i 的梯度矢量，指向 x^i 变化最快的方向。

1.8.3 应变张量(strain tensor)

作为连续介质变形描述的入门，我们考虑一块介质在 $t=0$ 时的一个初始形态或初始构形 B 及其在某时刻 t 的瞬时形态或瞬时构形 b，如图 1.4 所示。

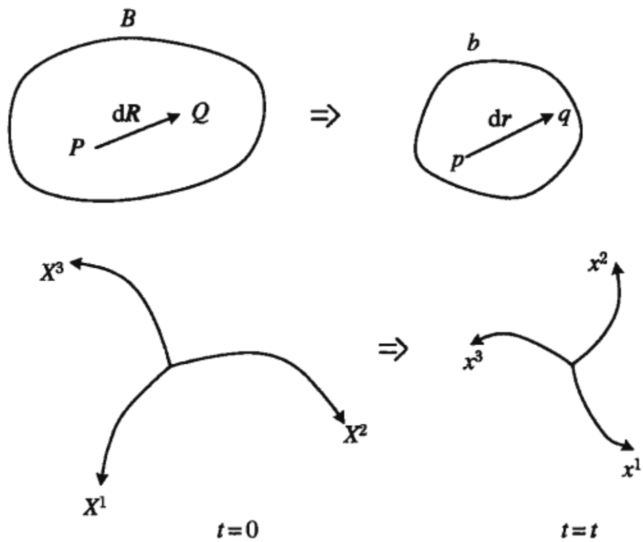


图 1.4 初始构形、瞬时构形及相应的坐标系

为了描述介质中各个粒子在初始构形中的位置，我们可以建立一个曲线坐标系，并以 $X^I(I=1,2,3)$表示粒子在初始构形中的坐标，称为拉格朗日(Lagrange)坐标或物质坐标，简称 L 氏坐标；为了描述各粒子在瞬时构形中的位置，我们可以另建一个曲线坐标系，并以 $x^i(i=1,2,3)$表示其在瞬时构形中的坐标，称为欧拉(Euler)坐标或瞬时空间坐标，简称 E 氏坐标。为了清楚起见，我们分别以大写和小写字母表示 L 氏和 E 氏坐标，并以大写和小写指标来表示 L 氏和 E 氏坐标中的指标。整个介质的运动和变形规律可完全由以 t 为参数的联系 X^I 和 x^i 的一一对应的可逆映射关系来表达：

$$x^i = x^i(X^1, X^2, X^3, t), \quad X^I = X^I(x^1, x^2, x^3, t) \tag{1.8.8}$$

式(1.8.8)的第一式表示 $t=0$ 时L氏坐标为 X^I 的粒子 t 时刻到达E氏坐标为 x^i 的地方，第二式则表示 t 时刻E氏坐标为 x^i 的粒子 $t=0$ 时刻位于L氏坐标为 X^I 的地方。设初始构形中的某粒子 P 于 t 时运动至瞬时构形中的 p 处，P 近邻的一个粒子 Q 于 t 时运动至 q 处，即初始构形中的线元 $\mathrm{d}\boldsymbol{R}=\overrightarrow{PQ}$ 变形为瞬时构形中的线元 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\overrightarrow{pq}$，以 $\mathrm{d}S$ 和 $\mathrm{d}s$ 分别表示其线元的初始长度及瞬时长度，则有

$$\mathrm{d}S^2 = \mathrm{d}\boldsymbol{R}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{R} = G_{IJ}\mathrm{d}X^I\mathrm{d}X^J \tag{1.8.9a}$$

$$\mathrm{d}S^2 = G_{IJ}\frac{\partial X^I}{\partial x^i}\frac{\partial X^J}{\partial x^j}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j \tag{1.8.9b}$$

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = g_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j \tag{1.8.9c}$$

$$\mathrm{d}s^2 = g_{ij}\frac{\partial x^i}{\partial X^I}\frac{\partial x^j}{\partial X^J}\mathrm{d}X^I\mathrm{d}X^J \tag{1.8.9d}$$

其中 G_{IJ} 和 g_{ij} 分别表示以L氏坐标和E氏坐标表达的度量张量，于是我们有

$$\mathrm{d}s^2-\mathrm{d}S^2 = \left[g_{ij}\frac{\partial x^i}{\partial X^I}\frac{\partial x^j}{\partial X^J}-G_{IJ}\right]\mathrm{d}X^I\mathrm{d}X^J \tag{1.8.10a}$$

$$\mathrm{d}s^2-\mathrm{d}S^2 = \left[g_{ij}-G_{IJ}\frac{\partial X^I}{\partial x^i}\frac{\partial X^J}{\partial x^j}\right]\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j \tag{1.8.10b}$$

定义量

$$E_{IJ} = \frac{1}{2}\left[g_{ij}\frac{\partial x^i}{\partial X^I}\frac{\partial x^j}{\partial X^J}-G_{IJ}\right] \tag{1.8.11a}$$

$$e_{ij} = \frac{1}{2}\left[g_{ij}-G_{IJ}\frac{\partial X^I}{\partial x^i}\frac{\partial X^J}{\partial x^j}\right] \tag{1.8.12a}$$

则式(1.8.10a)和式(1.8.10b)可分别写为

$$\mathrm{d}s^2-\mathrm{d}S^2 = 2E_{IJ}\mathrm{d}X^I\mathrm{d}X^J \tag{1.8.13a}$$

$$\mathrm{d}s^2-\mathrm{d}S^2 = 2e_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j \tag{1.8.13b}$$

显然我们所定义的2阶系统 E_{IJ} 和 e_{ij} 都是对称的，即

$$E_{IJ}=E_{JI},\quad e_{ij}=e_{ji} \tag{1.8.14}$$

在L氏坐标系的变换下，$\mathrm{d}X^I$ 和 $\mathrm{d}X^J$ 为1阶逆变张量，而量 $\mathrm{d}s^2-\mathrm{d}S^2$ 是零次变异的不变量，且2阶系统 $E_{IJ}=E_{JI}$ 对称，故对式(1.8.13a)应用1.5节中商法则的定理四可得出结论：式(1.8.11a)所定义的量 E_{IJ} 必为L氏坐标中的2阶协变张量，我们将之称为拉格朗日(Lagrange)应变张量，或格林(Green)应变张量，或圣维南(St. Venant)应变张量。类似地，在E氏坐标中对式(1.8.13b)应用商法则可得出结论：式(1.8.12a)所定义的量 e_{ij} 必为E氏坐标中的2阶协变张

量，我们将之称为欧拉(Euler)应变张量，或阿尔曼西(Almansi)应变张量。我们分别将这两个应变张量记为 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{e}$，通过指标的提升，我们可以建立它们的其他各种分量。

由式(1.8.13)的二式可见：(1) 只要知道了一点 $P(p)$ 处的 $\boldsymbol{E}$ 或 $\boldsymbol{e}$，则该点附近任意方向上的线元 $\mathrm{d}\boldsymbol{R}(\mathrm{d}\boldsymbol{r})$ 在变形前后的长度改变便完全确定了；(2) 同时，如果 $\boldsymbol{E}$ 或 $\boldsymbol{e}$ 是零张量，则该点处任意方向上的线元之长度改变都为 0；(3) 反之，如果该点处任意方向上的长度改变都为 0，则 $\boldsymbol{E}$ 或 $\boldsymbol{e}$ 必为零张量。由于这三点的原因，说明 $\boldsymbol{E}$ 或 $\boldsymbol{e}$ 足以刻画该点处的纯变形情况，故将之称为应变张量是恰当的。

特别地，当我们取 X^I 和 x^i 都为笛卡尔坐标系时，则 $G_{IJ}=\delta_{IJ}$、$g_{ij}=\delta_{ij}$ 也都对应 Kronecker 记号(虽然两标皆为下标)，相乘时也起改换指标的作用，故式(1.8.11a)和式(1.8.12a)将分别成为

$$E_{IJ} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial x^i}{\partial X^I}\frac{\partial x^i}{\partial X^J} - \delta_{IJ}\right] \tag{1.8.11b}$$

$$e_{ij} = \frac{1}{2}\left[\delta_{ij} - \frac{\partial X^I}{\partial x^i}\frac{\partial X^I}{\partial x^j}\right] \tag{1.8.12b}$$

由于 L 氏和 E 氏坐标系都为笛卡尔系，所以上、下标没有区别，此二式上式中重复的 i 和下式中重复的 I 虽然都写为上标但仍作为哑标并表示约定求和。但需注意：L 氏和 E 氏坐标系可以是不同的笛卡尔系，也可以是相同的笛卡尔系，只不过 X^I 和 x^i 分别代表同一粒子在 0 和 t 时刻各自系中的坐标罢了。

另外，当我们取同一粒子的 E 氏坐标总与其 L 氏坐标相等，即 $x^1=X^1$，$x^2=X^2$，$x^3=X^3$ 时，这相当于在初始构形中刻上 L 氏曲线坐标网和相应粒子的 L 氏坐标，而让坐标网带着坐标值连同介质一起变形的情况，这种坐标我们称之为拖带或对流(convected)坐标。此时显然有

$$\frac{\partial x^i}{\partial X^I} = \delta^i_I, \quad \frac{\partial X^I}{\partial x^i} = \delta^I_i$$

于是式(1.8.11a)和式(1.8.12a)分别成为

$$E_{IJ} = \frac{1}{2}(g_{IJ} - G_{IJ}) \tag{1.8.11c}$$

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(g_{ij} - G_{ij}) \tag{1.8.12c}$$

即介质在每一点处的应变表现为拖带坐标网相应点上坐标系度量张量的改变。

1.8.4 应力张量(stress tensor)

1. Cauchy 应力张量和 Cauchy 公式

为了刻画某一瞬时 t 时刻介质中某一点 p 处内部各部分通过面接触而相互产生的接触面力，以 p 为顶点，在其瞬时构形中取一个微四面体 $pp_1p_2p_3$，如图 1.5 所示。其中 3 个棱矢量 $\overrightarrow{pp_i} = \mathrm{d}\underset{i}{r}$，分别沿着该点 E 氏曲线坐标的 3 个基矢 $\boldsymbol{e}_i$ 的方向，底面 $p_1p_2p_3$ 的单位外法矢为 $\boldsymbol{n}$，面积为 $\mathrm{d}a$。3 个侧面其(内)法矢方向显然各沿着逆变基矢 $\boldsymbol{e}^i$ 的方向，即恰是第 i 个正的坐标面方向，面积大小各记为 $\mathrm{d}\underset{i}{a}$，单位法矢各记为 $\overset{i}{\boldsymbol{n}}$。如以 $\mathrm{d}\boldsymbol{a}$ 和 $\mathrm{d}\boldsymbol{a}^i$ 分别表示底面积和三个(内)侧面积的面积矢量，则有

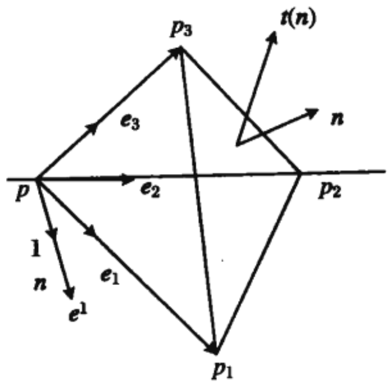


图 1.5 应力描述

$$\mathrm{d}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{n}\mathrm{d}a,\quad \mathrm{d}\boldsymbol{a}^i = \overset{i}{\boldsymbol{n}}\mathrm{d}\underset{i}{a}\quad (\text{不求和}) \tag{1.8.15}$$

显然我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\boldsymbol{a} &= \frac{1}{2}\,\overrightarrow{p_1p_2}\times\overrightarrow{p_2p_3} = \frac{1}{2}[(\mathrm{d}\underset{2}{r}-\mathrm{d}\underset{1}{r})\times(\mathrm{d}\underset{3}{r}-\mathrm{d}\underset{2}{r})]\\ &= \frac{1}{2}[\mathrm{d}\underset{2}{r}\times\mathrm{d}\underset{3}{r}+\mathrm{d}\underset{3}{r}\times\mathrm{d}\underset{1}{r}+\mathrm{d}\underset{1}{r}\times\mathrm{d}\underset{2}{r}] = \overset{1}{\boldsymbol{n}}\mathrm{d}\underset{1}{a}+\overset{2}{\boldsymbol{n}}\mathrm{d}\underset{2}{a}+\overset{3}{\boldsymbol{n}}\mathrm{d}\underset{3}{a}\end{aligned}$$

即

$$\mathrm{d}\boldsymbol{a} = \overset{i}{\boldsymbol{n}}\mathrm{d}\underset{i}{a},\quad \mathrm{d}\boldsymbol{a} - \overset{i}{\boldsymbol{n}}\mathrm{d}\underset{i}{a} = \boldsymbol{0}\quad (\text{求和}) \tag{1.8.16}$$

式(1.8.16)的几何意义事实上即是：底面积的(外)面积矢量等于 3 个侧面(内)面积矢量之和，或四面体的外面积矢量之和等于 **0** 矢量(推而广之，显然任何封闭曲面的面积矢量之和都为 **0** 矢量)。对 $\mathrm{d}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{n}\mathrm{d}a$ 进行协变分解，有

$$\mathrm{d}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{n}\mathrm{d}a = n_i\boldsymbol{e}^i\mathrm{d}a \tag{1.8.17a}$$

由于 $\overset{i}{\boldsymbol{n}}$ 是 $\boldsymbol{e}^i$ 方向的单位矢量，故有

$$\overset{i}{\boldsymbol{n}} = \frac{\boldsymbol{e}^i}{|\boldsymbol{e}^i|} = \frac{\boldsymbol{e}^i}{\sqrt{g^{ii}}}\quad (\text{不求和}) \tag{1.8.17b}$$

将式(1.8.17)的两式代入式(1.8.16)，可得

$$n_i e^i \mathrm{d}a = \frac{e^i}{\sqrt{g^{ii}}} \mathrm{d}\underset{i}{a} \quad (求和)$$

由 e^i 的线性无关性，可得如下的重要几何关系：

$$\frac{\mathrm{d}\underset{i}{a}}{\mathrm{d}a} = n_i \sqrt{g^{ii}} \quad (不求和) \tag{1.8.18}$$

(1.8.18)式是一个纯几何的关系，它表明了四面体侧面积和底面积之比恰为 $n_i \sqrt{g^{ii}}$。

现在我们考虑作为物质体的小四面体的动量守恒条件。由动量定理的达朗贝尔表述，任一时刻它受的体积力、接触面力和惯性力应相互平衡。考虑到体积力和惯性力与其体积成正比为 3 阶小量，而接触面力与面积成正比为 2 阶小量，故当四面体趋于一点而取极限时，四面体的动量守恒可表述为

$$\boldsymbol{t}(\boldsymbol{n})\mathrm{d}a + \boldsymbol{t}(-\overset{i}{\boldsymbol{n}})\mathrm{d}\underset{i}{a} = \boldsymbol{0} \quad (求和) \tag{1.8.19}$$

其中 $\boldsymbol{t}(\boldsymbol{n})$和 $\boldsymbol{t}(-\overset{i}{\boldsymbol{n}})$分别表示单位法矢量为 $\boldsymbol{n}$ 和$(-\overset{i}{\boldsymbol{n}})$的外底面和外侧面上的真应力矢量，即该时刻相应法向所指介质通过面接触而对另一部分介质所作用的单位面积上的真实接触面力，称之为 Cauchy 应力矢量。(1.8.19)式即表示四面体的外面力平衡。由牛顿第三定律，显然有

$$\boldsymbol{t}(-\overset{i}{\boldsymbol{n}}) = -\boldsymbol{t}(\overset{i}{\boldsymbol{n}}) = -\overset{i}{\boldsymbol{t}} \tag{1.8.20}$$

其中

$$\overset{i}{\boldsymbol{t}} = \boldsymbol{t}(\overset{i}{\boldsymbol{n}})$$

表示法矢为 e^i 和 $\overset{i}{\boldsymbol{n}}$ 的第 i 个正坐标面上的应力矢量。于是(1.8.19)式给出

$$\boldsymbol{t}(\boldsymbol{n})\mathrm{d}a = \overset{i}{\boldsymbol{t}}\mathrm{d}\underset{i}{a} \quad (求和) \tag{1.8.21}$$

动力学关系(1.8.21)式和几何关系(1.8.16)式在形式上是类似的，它表示小微体外底面积上的面力矢量等于 3 个内侧面即 3 个正坐标面上的面力矢量之和。利用几何关系(1.8.18)式，可将(1.8.21)式改写为

$$\boldsymbol{t}(\boldsymbol{n}) = \overset{i}{\boldsymbol{t}} n_i \sqrt{g^{ii}} \quad (求和) \tag{1.8.22}$$

这就是动量定律给出的力学结果。需要说明的是 $\overset{i}{\boldsymbol{t}}$ 代表第 i 个正坐标面上的应力矢量，有着明确的物理意义，但它对指标 i 并不满足逆变规则，故将指标 i 写在正上方。定义一个与 $\overset{i}{\boldsymbol{t}}$ 成比例的矢量 $\boldsymbol{t}^i$：

$$\boldsymbol{t}^i = \overset{i}{\boldsymbol{t}} \sqrt{g^{ii}} \quad (不求和) \tag{1.8.23}$$

则(1.8.22)式可写为

$$t(\boldsymbol{n}) = \boldsymbol{t}^i n_i \quad （求和） \tag{1.8.24}$$

对确定的 $\boldsymbol{n}$，式(1.8.24)对任何的坐标系都成立。现在我们保持 $\boldsymbol{n}$ 不变而进行坐标变换，则根据其意义，$\boldsymbol{t}(\boldsymbol{n})$是坐标变换下的不变量即零次变异量，而 n_i 是1次协变量，故对(1.8.24)式应用商法则可推知：由(1.8.23)式所定义的量 $\boldsymbol{t}^i$ 必定满足1次逆变规则。再对此矢量进行逆变分解或协变分解，并以 T^{ij} 和 $T^i_{\cdot j}$ 记其分解系数，可有

$$\boldsymbol{t}^i = T^{ij}\boldsymbol{e}_j = T^i_{\cdot j}\boldsymbol{e}^j \tag{1.8.25a}$$

在坐标变换下，$\boldsymbol{e}_j$ 为1次协变，$\boldsymbol{t}^i$ 和 $\boldsymbol{e}^j$ 为1次逆变，故对(1.8.25a)式应用商法则可知：(1.8.25a)式中的分解系数 T^{ij} 和 $T^i_{\cdot j}$ 必然分别是2阶逆变张量和1次逆变1次协变的2阶混合张量，即它们分别是某一个2阶张量 $\boldsymbol{T}$ 的逆变分量和第二种混合分量，我们把此张量称为介质在 p 点处的真应力张量或柯西(Cauchy)应力张量。通过度量张量提升和下降指标的方法，我们可以得出它的其他两个分量 T_{ij} 和 $T_i^{\cdot j}$。当然我们也可以通过取 p 点处以 $\boldsymbol{e}^i$ 为棱的四面体(可称之为以 $\boldsymbol{e}_i$ 为棱的四面体之对偶四面体)，用类似于前面的方法而直接引入 T_{ij} 和 $T_i^{\cdot j}$：事实上，对偶四面体3个内(外)侧面的法线方向恰恰是 $\boldsymbol{e}_i(-\boldsymbol{e}_i)$，如果以 $\mathrm{d}\boldsymbol{a}_i$、$\mathrm{d}\overset{i}{a}$、$\underset{i}{\boldsymbol{n}}$分别表示对偶四面体3个内侧面(即正的对偶坐标面)的面积矢量、面积大小和单位法矢量，以$\underset{i}{\boldsymbol{t}} = \boldsymbol{t}(\underset{i}{\boldsymbol{n}})$表示正的对偶四面体上的 Cauchy 应力矢量，并引入与之成比例的矢量$\boldsymbol{t}_i = \underset{i}{\boldsymbol{t}}\sqrt{g_{ii}}$的话，则与前面的相应公式相对应，我们可有(请读者作为练习证明之)

$$\mathrm{d}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{n}\mathrm{d}a,\quad \mathrm{d}\boldsymbol{a}_i = \underset{i}{\boldsymbol{n}}\mathrm{d}\overset{i}{a} \quad （不求和） \tag{1.8.15$'$}$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{a} = \underset{i}{\boldsymbol{n}}\mathrm{d}\overset{i}{a},\quad \mathrm{d}\boldsymbol{a} - \underset{i}{\boldsymbol{n}}\mathrm{d}\overset{i}{a} = \boldsymbol{0} \quad （求和） \tag{1.8.16$'$}$$

$$\underset{i}{\boldsymbol{n}} = \frac{\boldsymbol{e}_i}{|\boldsymbol{e}_i|} = \frac{\boldsymbol{e}_i}{\sqrt{g_{ii}}} \quad （不求和） \tag{1.8.17b$'$}$$

$$\frac{\mathrm{d}\overset{i}{a}}{\mathrm{d}a} = n^i\sqrt{g_{ii}} \quad （不求和） \tag{1.8.18$'$}$$

$$\underset{i}{\boldsymbol{t}} = \boldsymbol{t}(\underset{i}{\boldsymbol{n}}),\quad \boldsymbol{t}(\boldsymbol{n})\mathrm{d}a = \underset{i}{\boldsymbol{t}}\mathrm{d}\overset{i}{a} \quad （求和） \tag{1.8.21$'$}$$

$$\boldsymbol{t}_i = \underset{i}{\boldsymbol{t}}\sqrt{g_{ii}} \quad （不求和） \tag{1.8.23$'$}$$

$$\boldsymbol{t}(\boldsymbol{n}) = \boldsymbol{t}_i n^i \quad （求和） \tag{1.8.24$'$}$$

$$\boldsymbol{t}_i = T_{ij}\boldsymbol{e}^j = T_i^{\cdot j}\boldsymbol{e}_j \tag{1.8.25a$'$}$$

此时，如果我们仍然在保持四面体底面单位法矢量 $\boldsymbol{n}$ 不变的前提下进行坐标

变换的话，首先对式(1.8.24)′应用商法则，则可得出由式(1.8.23)′所定义的量$\boldsymbol{t}_i$必定满足一次协变规则；再对式(1.8.25a)′应用商法则，则可得出其中的分解系数T_{ij}、$T_i{}^j$必然分别是2阶协变张量和1次协变1次逆变的2阶混合张量，它们即是Cauchy应力张量$\boldsymbol{T}$的协变分量和第一种混合分量。

现在我们回到前面的讨论。将式(1.8.25a)代入式(1.8.24)，将式(1.8.25a)′代入式(1.8.24)′，即有

$$\boldsymbol{t}(\boldsymbol{n}) = n_i T^{ij}\boldsymbol{e}_j = n_i T^i{}_j \boldsymbol{e}^j = n^i T_{ij}\boldsymbol{e}^j = n^i T_i{}^j \boldsymbol{e}_j \tag{1.8.26a}$$

$$t^j(\boldsymbol{n}) = n_i T^{ij} = n^i T_i{}^j, \quad t_j(\boldsymbol{n}) = n_i T^i{}_j = n^i T_i{}^j \tag{1.8.26b}$$

$$\boldsymbol{t}(\boldsymbol{n}) = \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{T} \tag{1.8.26c}$$

式(1.8.26)称为柯西(Cauchy)公式，它说明：只要知道了一点的柯西应力张量$\boldsymbol{T}$，则该点处任意取向$\boldsymbol{n}$平面上的应力矢量$\boldsymbol{t}(\boldsymbol{n})$便可由其单位矢量$\boldsymbol{n}$与$\boldsymbol{T}$的左点积而得出。故$\boldsymbol{T}$是一点应力状态的一个完全的刻画，将之称为应力张量是恰当的。

我们顺便指出：当取式(1.8.25a)的分解式为

$$\boldsymbol{t}^i = \boldsymbol{e}_j\sigma^{ji} = \boldsymbol{e}^j\sigma_j{}^i \tag{1.8.25b}$$

时，则式(1.8.26a)～式(1.8.26c)将成为

$$\boldsymbol{t}(\boldsymbol{n}) = \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}} \tag{1.8.26d}$$

我们这样定义的应力张量$\boldsymbol{\sigma}$将与前面定义的应力张量$\boldsymbol{T}$互为转置，即$\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{T}$。故我们必须保持应力张量定义和柯西公式形式的一致性，在阅读文献时也需注意此点。

2. 非极性物质中柯西应力张量的对称性

柯西应力张量的引入和联系应力张量与应力矢量关系的柯西公式是动量守恒定律给出的结果，现在我们将说明：非极性物质即没有分布力偶矩的物质中，柯西应力张量必是对称张量，这一结论是动量矩定理的必然结果。

取一个以粒子p为其一个顶点、其棱沿基矢$\boldsymbol{e}_i$方向、由坐标面围成的微小平行六面体，如图1.6所示，则6侧面的外法矢方向各沿$\pm\boldsymbol{e}^i$。仍以$\pm\overset{i}{\boldsymbol{n}}$表示其单位外法矢，以$\mathrm{d}\underset{i}{a}$表示各面面积，以$\overset{i}{\boldsymbol{t}}$表示正坐标面上的应力矢量，则$\boldsymbol{e}^1$面上的面力将为$\boldsymbol{f}=\mathrm{d}\underset{1}{a}\overset{1}{\boldsymbol{t}}$。对微体质心取矩，体积力和惯性力可认为作用于质心上，它们的矩为0，相对二坐标面上之面力大小只差一微量，极限之下，可认为单位法矢为$\pm\boldsymbol{e}^1$的两个坐标面上的面力是作用于面积中心上力臂为$\boldsymbol{r}$的一对力偶。于是在非极性物质中，在略去3阶以上的微量时，微体的动量矩定理即表现为微体6个面上的3

对力偶相互平衡。

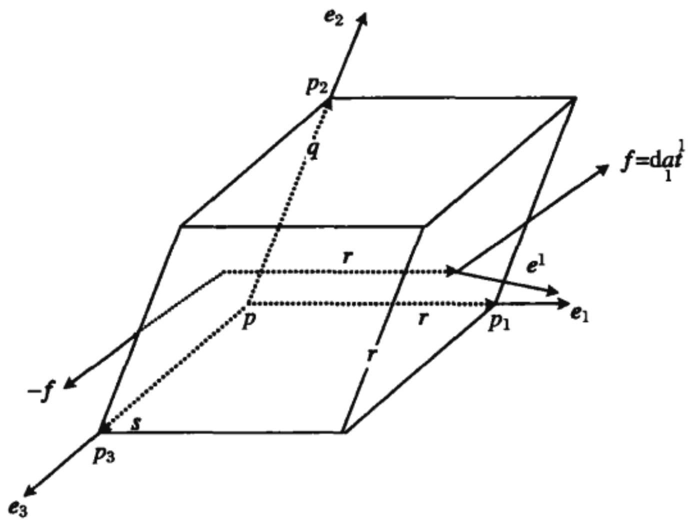


图 1.6 微体的力矩平衡

利用 Cauchy 公式(1.8.25)式,有

$$f = \mathrm{d}\underset{1}{a}\overset{1}{t} = \mathrm{d}\underset{1}{a}\,t(\overset{1}{n}) = \mathrm{d}\underset{1}{a}\overset{1}{n} \cdot T = \frac{\mathrm{d}\underset{1}{a}}{\sqrt{g^{11}}}e^1 \cdot T \tag{1.8.27a}$$

$$r = r^1 e_1 \tag{1.8.27b}$$

故 $\pm e^1$ 面上的面力之矩为

$$r \times f = r^1 \frac{\mathrm{d}\underset{1}{a}}{\sqrt{g^{11}}} e_1 \times (e^1 \cdot T) \tag{1.8.28a}$$

微平行六面体的体积为

$$V^* = r \cdot (q \times s) = r \cdot \overset{1}{n}\mathrm{d}\underset{1}{a} = r^1 e_1 \cdot \frac{e^1}{\sqrt{g^{11}}}\mathrm{d}\underset{1}{a} = r^1 \frac{\mathrm{d}\underset{1}{a}}{\sqrt{g^{11}}} \tag{1.8.28b}$$

故(1.8.28a)式成为

$$r \times f = V^* e_1 \times (e^1 \cdot T) \tag{1.8.29}$$

因此非极性物质中微体动量矩定理的数学形式即为

$$V^* e_i \times (e^i \cdot T) = 0$$

$$e_i \times (e^i \cdot T) = 0 \tag{1.8.30a}$$

$$\boldsymbol{e}_i \times (\boldsymbol{e}^i \cdot T^{jk}\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_k) = \boldsymbol{e}_i \times T^{ik}\boldsymbol{e}_k = \boldsymbol{0} \tag{1.8.30b}$$

因为

$$\boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_k = \varepsilon_{ikl}\boldsymbol{e}^l = Ve_{ikl}\boldsymbol{e}^l \quad (V = \boldsymbol{e}_1 \cdot (\boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3))$$

所以(1.8.30b)式成为

$$VT^{ik}e_{ikl}\boldsymbol{e}^l = \boldsymbol{0}$$

或

$$T^{ik}e_{ikl} = 0 \quad (l = 1,2,3) \tag{1.8.31}$$

对 $l=1,2,3$,此式即分别给出:$T^{23}=T^{32}$,$T^{31}=T^{13}$,$T^{12}=T^{21}$,即

$$T^{ij} = T^{ji}, \quad \boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}^{\mathrm{T}} \tag{1.8.32}$$

1.9 张量的物理分量

迄今为止,我们讲的都是张量的张量分量,其优点是在坐标变换之下它们满足确定的变换规则,但张量的张量分量也有其不便之处,一方面其物理意义常常不是很直观,另一方面有时同一张量的不同分量可能具有不同的量纲。以质点的速度矢量 $\boldsymbol{v}$ 为例,其物理意义是质点位置矢量 $\boldsymbol{r}$ 对时间 t 的导数,故在曲线坐标 x^i 之中,我们可有

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^i}\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{e}_i\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}, \quad v^i = \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}$$

即速度 $\boldsymbol{v}$ 的逆变分量 $v^i=\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}$。在柱坐标中$(x^1,x^2,x^3)=(r,\theta,z)$,故有

$$v^1 = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}, \quad v^2 = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}, \quad v^3 = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$$

可见,虽然 v^1 和 v^3 确实具有通常意义下的速度的量纲,但 v^2 却具有角速度的量纲,这显然是不方便的。大家知道,通常我们用的不是 $v^2=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$,而是 $v_\theta = r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$,这事实上是下面要讲的矢量的物理分量。现在我们以矢量 $\boldsymbol{v}$ 和应力张量 $\boldsymbol{T}$ 为例给出其物理分量的引入方法。

导致同一张量不同分量有不同量纲的原因是曲线坐标中的基矢量不是单位矢量,为此我们可以引入曲线坐标中的单位基矢量 $\hat{\boldsymbol{e}}_i$ 和 $\hat{\boldsymbol{e}}^i$ 如下:

$$\hat{\boldsymbol{e}}_i = \frac{\boldsymbol{e}_i}{|\boldsymbol{e}_i|} = \frac{\boldsymbol{e}_i}{\sqrt{g_{ii}}},\quad \hat{\boldsymbol{e}}^i = \frac{\boldsymbol{e}^i}{|\boldsymbol{e}^i|} = \frac{\boldsymbol{e}^i}{\sqrt{g^{ii}}}\quad (i = 1,2,3,\text{不求和}) \tag{1.9.1}$$

以它们为基础，我们就可以引入张量的物理分量了。

1.9.1　矢量的物理分量(physical components)

设 $\boldsymbol{v}$ 为一矢量，则对其进行逆变和协变分解，并利用(1.9.1)式，可有

$$\boldsymbol{v} = v^i \boldsymbol{e}_i = v^i \sqrt{g_{ii}}\hat{\boldsymbol{e}}_i = v^{\langle i\rangle}\hat{\boldsymbol{e}}_i \quad (\text{求和}) \tag{1.9.2a}$$

$$v^{\langle i\rangle} \equiv v^i \sqrt{g_{ii}} \quad (i = 1,2,3,\text{不求和}) \tag{1.9.2b}$$

$$\boldsymbol{v} = v_i \boldsymbol{e}^i = v_i \sqrt{g^{ii}}\hat{\boldsymbol{e}}^i = v_{\langle i\rangle}\hat{\boldsymbol{e}}^i \quad (\text{求和}) \tag{1.9.3a}$$

$$v_{\langle i\rangle} \equiv v_i \sqrt{g^{ii}} \quad (i = 1,2,3,\text{不求和}) \tag{1.9.3b}$$

式(1.9.2b)和式(1.9.3b)所定义的 $v^{\langle i\rangle}$ 和 $v_{\langle i\rangle}$ 都可称之为矢量 $\boldsymbol{v}$ 的物理分量。可见，按现在的方法，$v^{\langle i\rangle}$ 和 $v_{\langle i\rangle}$ 分别是 $\boldsymbol{v}$ 在单位化了的协变基矢 $\hat{\boldsymbol{e}}_i$ 和逆变基矢 $\hat{\boldsymbol{e}}^i$ 上的线性分解系数。

我们也可以将 $\boldsymbol{v}$ 在 $\hat{\boldsymbol{e}}_i$ 和 $\hat{\boldsymbol{e}}^i$ 方向上的正交投影定义为其物理分量，即定义：

$$v^{(i)} = \boldsymbol{v}\cdot\hat{\boldsymbol{e}}^i = \boldsymbol{v}\cdot\frac{\boldsymbol{e}^i}{\sqrt{g^{ii}}} = v^i/\sqrt{g^{ii}} \quad (i = 1,2,3,\text{不求和}) \tag{1.9.4}$$

$$v_{(i)} = \boldsymbol{v}\cdot\hat{\boldsymbol{e}}_i = \boldsymbol{v}\cdot\frac{\boldsymbol{e}_i}{\sqrt{g_{ii}}} = v_i/\sqrt{g_{ii}} \quad (i = 1,2,3,\text{不求和}) \tag{1.9.5}$$

式(1.9.4)和式(1.9.5)定义的量也可以称之为矢量 $\boldsymbol{v}$ 的物理分量。

需要强调的是：在一般的情况下，式(1.9.2)、式(1.9.3)、式(1.9.4)和式(1.9.5)所定义的 $\boldsymbol{v}$ 的4种物理分量，虽然它们都具有同样的量纲，但一般而言它们仍是互不相等的。只有对正交曲线坐标，它们才是彼此相等的，这是因为在正交曲线坐标中，我们有

$$g^{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1/g_{ij}, & i = j \end{cases}$$

故正交曲线坐标和正交曲线坐标中的物理分量得到了最广泛的应用。

1.9.2　应力张量的物理分量

由于应力张量是2阶张量，故定义应力张量物理分量的方法就更多了，其中的第一种方法是：以应力矢量为过渡，按如下方法来定义。对第 i 个坐标面上的应力

分量 $\overset{i}{t}$ 沿 $\hat{e}_j$ 或 $\hat{e}^j$ 进行分解，可有

$$\begin{cases} \overset{i}{t} = t^i / \sqrt{g^{ii}} = T^{ij}e_j / \sqrt{g^{ii}} = \dfrac{T^{ij}}{\sqrt{g^{ii}}}\sqrt{g_{jj}}\,\hat{e}_j = T^{[ij]}\,\hat{e}_j \\ T^{[ij]} = \sqrt{\dfrac{g_{jj}}{g^{ii}}}T^{ij} \quad (\text{不求和}) \end{cases} \tag{1.9.6}$$

$$\begin{cases} \overset{i}{t} = t^i / \sqrt{g^{ii}} = \dfrac{1}{\sqrt{g^{ii}}}T^i_{\cdot j}e^j = \sqrt{\dfrac{g^{jj}}{g^{ii}}}T^i_{\cdot j}\,\hat{e}^j = T^{[i]}_{\cdot [j]}\,\hat{e}^j \\ T^{[i]}_{\cdot [j]} = \sqrt{\dfrac{g^{jj}}{g^{ii}}}T^i_{\cdot j} \quad (\text{不求和}) \end{cases} \tag{1.9.7}$$

如果我们对对偶坐标面上的应力矢量 $\underset{i}{t}$ 进行分解，可有：

$$\begin{cases} \underset{i}{t} = t_i / \sqrt{g_{ii}} = \dfrac{T_i^{\cdot j}}{\sqrt{g_{ii}}}e_j = \sqrt{\dfrac{g_{jj}}{g_{ii}}}T_i^{\cdot j}\,\hat{e}_j = T_{[i]}^{\cdot [j]}\,\hat{e}_j \\ T_{[i]}^{\cdot [j]} = \sqrt{\dfrac{g_{jj}}{g_{ii}}}T_i^{\cdot j} \quad (\text{不求和}) \end{cases} \tag{1.9.8}$$

$$\begin{cases} \underset{i}{t} = t_i / \sqrt{g_{ii}} = \dfrac{T_{ij}}{\sqrt{g_{ii}}}e^j = \sqrt{\dfrac{g^{jj}}{g_{ii}}}T_{ij}\,\hat{e}^j = T_{[ij]}\,\hat{e}^j \\ T_{[ij]} = \sqrt{\dfrac{g^{jj}}{g_{ii}}}T_{ij} \quad (\text{不求和}) \end{cases} \tag{1.9.9}$$

式(1.9.6)、式(1.9.7)、式(1.9.8)和式(1.9.9)所定义的4类量 $T^{[ij]}$、$T^{[i]}_{\cdot [j]}$、$T_{[i]}^{\cdot [j]}$ 和 $T_{[ij]}$ 都可以称为应力张量 T 的物理分量，由其定义可以发现：它们分别是坐标面上的应力矢量 $\overset{i}{t}$ 沿 $\hat{e}_j$ 或 $\hat{e}^j$ 的分解系数以及对偶坐标面上的应力矢量 $\underset{i}{t}$ 沿 $\hat{e}_j$ 或 $\hat{e}^j$ 的分解系数，物理意义明确，而且分别和张量分量 T^{ij}、$T^i_{\cdot j}$、$T_i^{\cdot j}$ 和 T_{ij} 成比例。在二维几何的情况下(见图 1.7)，式(1.9.6)～式(1.9.9)分别如图 1.8～图 1.11 所示。

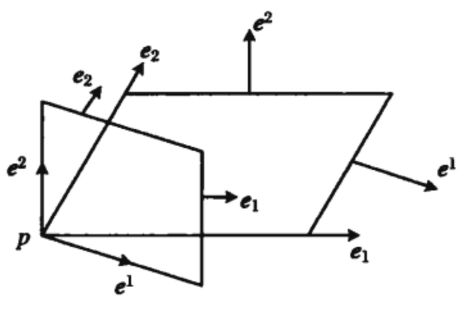


图 1.7　二维局部基和对偶基微元体

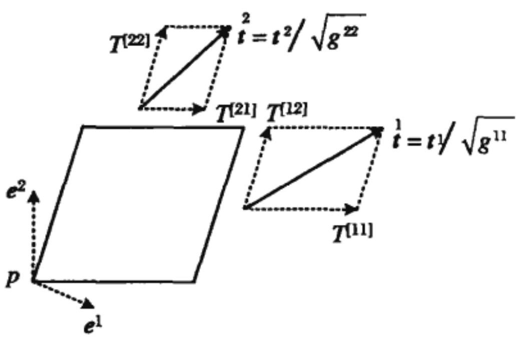


图 1.8　$T^{[ij]}$的意义

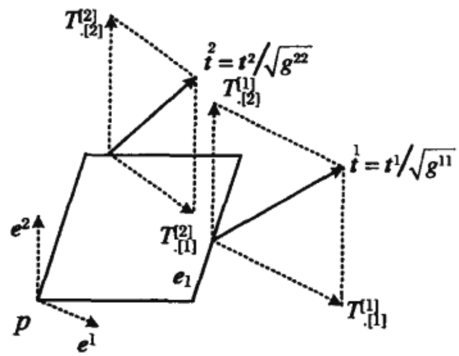


图 1.9　$T^{[i]}_{.[j]}$的意义

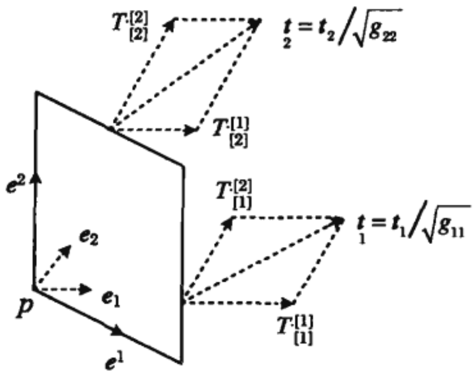


图 1.10　$T^{.[j]}_{[i]}$的意义

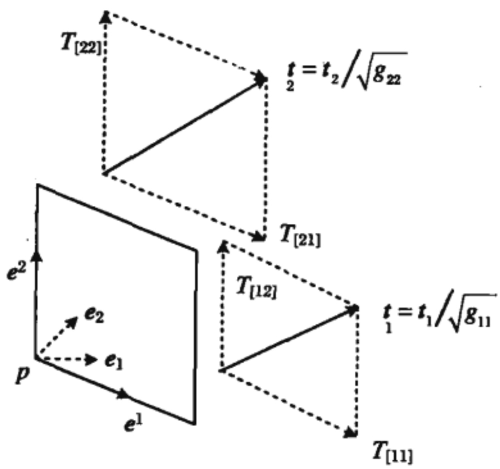


图 1.11　$T_{[ij]}$的意义

定义应力张量 $\boldsymbol{T}$ 物理分量的第二种方法是如下的二次正交投影法：

$$\begin{cases} T^{(ij)} = \hat{\boldsymbol{e}}^i \cdot \boldsymbol{T} \cdot \hat{\boldsymbol{e}}^i = T^{ij}/\sqrt{g^{ii}g^{jj}} \\ T^{(i)}_{.(j)} = \hat{\boldsymbol{e}}^i \cdot \boldsymbol{T} \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_j = T^{i}_{\ .j}/\sqrt{g^{ii}g_{jj}} \\ T^{.(j)}_{(i)} = \hat{\boldsymbol{e}}_i \cdot \boldsymbol{T} \cdot \hat{\boldsymbol{e}}^j = T_i^{\ j}/\sqrt{g_{ii}g^{jj}} \\ T_{(ij)} = \hat{\boldsymbol{e}}_i \cdot \boldsymbol{T} \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_j = T_{ij}/\sqrt{g_{ii}g_{jj}} \end{cases} \quad \text{(不求和)} \qquad (1.9.10)$$

定义应力张量 $\boldsymbol{T}$ 物理分量的第三种方法是将 $\boldsymbol{T}$ 沿单位基并矢进行线性分解的方法：

$$\begin{cases} T = T^{ij}e_ie_j = T^{\langle ij\rangle}\hat{e}_i\hat{e}_j, & T^{\langle ij\rangle} = T^{ij}\sqrt{g_{ii}g_{jj}} \\ T = T_i{}^j e^i e_j = T_{\langle i\rangle}^{\cdot\langle j\rangle}\hat{e}^i\hat{e}_j, & T_{\langle i\rangle}^{\cdot\langle j\rangle} = T_i{}^j\sqrt{g^{ii}g_{jj}} \\ T = T^i{}_{\cdot j}e_ie^j = T^{\langle i\rangle}_{\cdot\langle j\rangle}\hat{e}_i\hat{e}^j, & T^{\langle i\rangle}_{\cdot\langle j\rangle} = T^i{}_{\cdot j}\sqrt{g_{ii}g^{jj}} \\ T = T_{ij}e^ie^j = T_{\langle ij\rangle}\hat{e}^i\hat{e}^j, & T_{\langle ij\rangle} = T_{ij}\sqrt{g^{ii}g^{jj}} \end{cases} \quad \text{（右 4 式不求和）}$$

(1.9.11)

如同式(1.9.6)、式(1.9.7)、式(1.9.8)、式(1.9.9)一样，式(1.9.10)和式(1.9.11)中的 g^{ii}、g_{jj} 等的重复指标都不求和。

我们用 3 种方法定义了共 12 种 T 的物理分量，一般而言它们都是互不相同的，但是容易证明：在正交曲线坐标中，它们则完全相同，都对应着同一个 2 阶矩阵。

1.10 张量的协变导数和逆变导数

1.10.1 标量对坐标的偏导数是 1 阶协变张量(协变矢量)

在 1.8 节讲张量的例子时，我们曾说过，任一标量 φ 对坐标的偏导数是一协变矢量，这是因为：

$$\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \bar{x}^i} = \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{x}^i} = \frac{\partial \varphi}{\partial x^j}\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i} = \alpha_i^j \frac{\partial \varphi}{\partial x^j} \tag{1.10.1}$$

这就是说：标量 φ 对坐标的偏导数 $\frac{\partial \varphi}{\partial x^j}$ 在坐标变换之下满足一次协变规则，即零阶张量对坐标的偏导数是一个协变次数比原张量高 1 阶的 1 阶协变张量。

1.10.2 矢量分量对坐标的偏导数不是 2 阶张量

前面的结果很自然地会使人想到：矢量分量对坐标的偏导数是否也是一个协变次数比原张量高 1 阶的 2 阶张量？答案是否定的。事实上，设 a^i 为一逆变矢量，则其新、旧分量间有关系如下：

$$\bar{a}^i = \beta_k^i a^k = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} a^k \tag{1.10.2}$$

于是有

$$\frac{\partial \bar{a}^i}{\partial \bar{x}^j} = \frac{\partial \bar{a}^i}{\partial x^m}\frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^j} = \frac{\partial}{\partial x^m}\left(\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k}a^k\right)\frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^j} = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k}\frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial a^k}{\partial x^m} + a^k\frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial^2 \bar{x}^i}{\partial x^m \partial x^k}$$

即

$$\frac{\partial \bar{a}^i}{\partial \bar{x}^j} = \beta^i_k \alpha^m_j \frac{\partial a^k}{\partial x^m} + a^k \frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial^2 \bar{x}^i}{\partial x^m \partial x^k} \tag{1.10.3}$$

显然,只有对线性坐标变换才有$\frac{\partial^2 \bar{x}^i}{\partial x^m \partial x^k}=0$,$\frac{\partial a^k}{\partial x^m}$才满足2阶张量的变换规则,而在一般的非线性坐标变换下,因$\frac{\partial^2 \bar{x}^i}{\partial x^m \partial x^k}\neq 0$,故$\frac{\partial a^k}{\partial x^m}$并不是2阶混合张量,即矢量分量对坐标求偏导数并不能保证张量运算的封闭性,这正是张量分析的复杂性之所在。产生这一困难的根源是因为对一般的曲线坐标,其基矢量在空间中并非是常矢量而是随点的位置而变化的,即基矢量是坐标的函数,于是也就导致了张量分量对坐标的偏导数并不是张量的结论。这一点也可由下式来说明:

$$\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial x^j} = \frac{\partial}{\partial x^j}(a^i \boldsymbol{e}_i) = \frac{\partial a^i}{\partial x^j}\boldsymbol{e}_i + a^i \frac{\partial \boldsymbol{e}_i}{\partial x^j} \tag{1.10.4}$$

坐标变换下,$\boldsymbol{a}$ 为零次变异量,故$\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial x^j}$为1次协变量,而 $\boldsymbol{e}_i$ 为1次协变量,因此如果$\frac{\partial \boldsymbol{e}_i}{\partial x^j}=\boldsymbol{0}$(基矢为常矢量),则对(1.10.4)式应用商法则即可推出$\frac{\partial a^i}{\partial x^j}$为1次逆变1次协变的2阶混合张量的结论。但因为事实上$\frac{\partial \boldsymbol{e}_i}{\partial x^j}\neq\boldsymbol{0}$,故我们得不出$\frac{\partial a^i}{\partial x^j}$为2阶张量的结论。

为了克服这一困难,我们将力图给$\frac{\partial a^i}{\partial x^j}$加上某些附加项以保证其和具有张量的特性,而这些附加项将从$\frac{\partial \boldsymbol{e}_i}{\partial x^j}$中产生,这就是我们引入协变导数概念的思想。

1.10.3 张量的协变导数

我们仍以矢量为例,并从式(1.10.4)出发。将矢量$\frac{\partial \boldsymbol{e}_i}{\partial x^j}$在 $\boldsymbol{e}_k$ 上进行逆变分解,以 Γ^k_{ij} 记其分解系数,即记

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_i}{\partial x^j} = \Gamma^k_{ij}\boldsymbol{e}_k \tag{1.10.5a}$$

$$\Gamma_{ij}^{k} = \frac{\partial \boldsymbol{e}_i}{\partial x^j} \cdot \boldsymbol{e}^k \tag{1.10.5b}$$

我们称 Γ_{ij}^{k} 为第二类克里斯托弗记号(Christoffel symbol)，简称第二类克氏记号，显然它是矢量$\frac{\partial \boldsymbol{e}_i}{\partial x^j}$的逆变分量。将(1.10.5a)式代入(1.10.4)式中，并对第二项进行适当换标，有

$$\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial x^j} = \frac{\partial a^i}{\partial x^j}\boldsymbol{e}_i + a^i\Gamma_{ij}^{k}\boldsymbol{e}_k = \frac{\partial a^i}{\partial x^j}\boldsymbol{e}_i + a^k\Gamma_{kj}^{i}\boldsymbol{e}_i = \left(\frac{\partial a^i}{\partial x^j} + a^k\Gamma_{kj}^{i}\right)\boldsymbol{e}_i \tag{1.10.6a}$$

记

$$a^i\big|_j = \frac{\partial a^i}{\partial x^j} + a^k\Gamma_{kj}^{i} \tag{1.10.7}$$

则(1.10.6a)式可写为

$$\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial x^j} = a^i\big|_j\boldsymbol{e}_i \tag{1.10.6b}$$

在坐标变换之下，$\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial x^j}$和 $\boldsymbol{e}_i$ 都为 1 次协变量，故对(1.10.6b)式应用商法则，可得出结论：(1.10.7)式所定义的量 $a^i\big|_j$ 必是 1 次逆变 1 次协变的 2 阶混合张量，我们将之称为矢量逆变分量 a^i 的协变导数(covariant derivative)。

用类似的方法可以引入协变矢量 a_i 的协变导数，我们可从关系

$$\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial x^j} = \frac{\partial}{\partial x^j}(a_i\boldsymbol{e}^i) = \frac{\partial a_i}{\partial x^j}\boldsymbol{e}^i + a_i\frac{\partial \boldsymbol{e}^i}{\partial x^j} \tag{1.10.8}$$

出发，将

$$\frac{\partial}{\partial x^j}(\boldsymbol{e}^i \cdot \boldsymbol{e}_k) = \frac{\partial}{\partial x^j}\delta_k^i = 0$$

之左端分为 2 项，并利用式(1.10.5b)，可得

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}^i}{\partial x^j} \cdot \boldsymbol{e}_k = -\Gamma_{kj}^{i} \tag{1.10.9b}$$

故有

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}^i}{\partial x^j} = -\Gamma_{kj}^{i}\boldsymbol{e}^k \tag{1.10.9a}$$

将(1.10.9a)式代入(1.10.8)式，并对第二项进行适当换标，可有

$$\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial x^j} = \frac{\partial a_i}{\partial x^j}\boldsymbol{e}^i - a_i\Gamma_{kj}^{i}\boldsymbol{e}^k = \frac{\partial a_i}{\partial x^j}\boldsymbol{e}^i - a_k\Gamma_{ij}^{k}\boldsymbol{e}^i$$

如记

$$a_i|_j = \frac{\partial a_i}{\partial x^j} - a_k \Gamma_{ij}^k \tag{1.10.10}$$

则有

$$\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial x^j} = a_i|_j \boldsymbol{e}^i \tag{1.10.11a}$$

由于$\dfrac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial x^j}$和$\boldsymbol{e}^i$ 在坐标变换之下分别满足 1 次协变和 1 次逆变规则，对(1.10.11a)式应用商法则，则可知(1.10.10)式所定义的量 $a_i|_j$ 必为 2 阶协变张量，称之为矢量 $\boldsymbol{a}$ 的协变分量a_i的协变导数。

将 $\boldsymbol{e}^i = \boldsymbol{e}_k g^{ki}$ 代入(1.10.11a)式并进行适当换标，有

$$\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial x^j} = a_i|_j g^{ki} \boldsymbol{e}_k = a_k|_j g^{ik} \boldsymbol{e}_i \tag{1.10.11b}$$

对比(1.10.11b)式和(1.10.6b)式，并注意 $\boldsymbol{e}_i$ 的线性无关性，有

$$a^i|_j = g^{ik} a_k|_j \tag{1.10.12}$$

(1.10.12)式说明：$a_i|_j$ 和 $a^i|_j$ 可以通过由度量张量对非求导指标上升指标(或下降指标)而相互转换，它们确是同一个 2 阶张量的不同分量，统称为矢量 $\boldsymbol{a}$ 的协变导数，并称此 2 阶张量为矢量 $\boldsymbol{a}$ 的梯度张量。

用类似的方法可以建立高阶张量的协变导数。以 2 阶张量 $\boldsymbol{T}$ 的混合分量 $T^{i}_{\cdot j}$ 的协变导数为例，利用(1.10.5a)式和(1.10.9a)式并对相应项进行适当的换标，我们有

$$\begin{aligned}\frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial x^k} &= \frac{\partial}{\partial x^k}(T^{i}_{\cdot j}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}^j) = \frac{\partial T^{i}_{\cdot j}}{\partial x^k}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}^j + T^{i}_{\cdot j}\frac{\partial \boldsymbol{e}_i}{\partial x^k}\boldsymbol{e}^j + T^{i}_{\cdot j}\boldsymbol{e}_i\frac{\partial \boldsymbol{e}^j}{\partial x^k} \\ &= \frac{\partial T^{i}_{\cdot j}}{\partial x^k}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}^j + T^{i}_{\cdot j}\Gamma^{l}_{ik}\boldsymbol{e}_l\boldsymbol{e}^j - T^{i}_{\cdot j}\boldsymbol{e}_i\Gamma^{j}_{lk}\boldsymbol{e}^l = \frac{\partial T^{i}_{\cdot j}}{\partial x^k}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}^j + T^{l}_{\cdot j}\Gamma^{i}_{lk}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}^j - T^{i}_{\cdot l}\Gamma^{l}_{jk}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}^j\end{aligned}$$

定义量

$$T^{i}_{\cdot j}|_k = \frac{\partial T^{i}_{\cdot j}}{\partial x^k} + T^{l}_{\cdot j}\Gamma^{i}_{lk} - T^{i}_{\cdot l}\Gamma^{l}_{jk} \tag{1.10.13}$$

则有

$$\frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial x^k} = T^{i}_{\cdot j}|_k \boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}^j \tag{1.10.14}$$

由于在坐标变换之下$\dfrac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial x^k}$、$\boldsymbol{e}_i$、$\boldsymbol{e}^j$ 分别满足 1 次协变、1 次协变、1 次逆变规则，对(1.10.14)式应用商法则，则可知(1.10.13)式所定义的量 $T^{i}_{\cdot j}|_k$ 必为 1 次逆变 2 次协变的 3 阶混合张量，称之为 $T^{i}_{\cdot j}$的协变导数。

对更高阶的张量我们不再举例，但是我们可以很容易地总结出前面各例的规

律而给出张量协变导数的如下定义和求法：

张量分量的协变导数是一个比原张量分量协变次数高 1 阶的新张量，它的分量除了原张量分量对坐标的偏导数项以外，以如下方式增添了一些附加项：加上一些由原张量每一逆变指标和第二类克氏记号相乘并缩并求和的项，减去一些由原张量每一协变指标和第二类克氏记号相乘并缩并求和的项，而每一项的微分指标总位于克氏记号的右下方，同时克氏记号的另一指标是由原张量分量中的求和指标置换出的指标。

1.10.4 张量的逆变导数

前面我们讲了张量分量的协变导数是一个协变次数比原张量分量协变次数高 1 阶的新张量，同时，张量不同分量的协变导数可以通过对其非求导指标提升和下降指标而相互转换。如果我们对张量的协变导数通过和度量张量 g^{ij} 相乘而提升其求导指标，即可得到张量的逆变导数。

以矢量 $\boldsymbol{v}$ 和 2 阶张量 $\boldsymbol{T}$ 为例，可以定义其逆变导数如下：

$$v^i|^j = v^i|_k g^{kj}, \quad v_i|^j = v_i|_k g^{kj}, \quad T_{ij}|^k = T_{ij}|_l g^{lk}, \quad T^{ij}|^k = T^{ij}|_l g^{lk}, \quad \cdots \tag{1.10.15}$$

显然，张量分量的逆变导数是一个比原张量分量逆变次数高 1 阶的新张量。但我们强调指出：张量的逆变导数是由其协变导数派生出来的，故后者具有更基本的意义。张量的协变导数和逆变导数统称为张量的张量导数或绝对导数，或者称为原张量的梯度张量。张量的张量导数是笛卡尔坐标中张量对坐标偏导数在曲线坐标中张量求导的推广，它的意义在于求导的结果仍然保持了张量导数的张量特性，即张量运算的封闭性。

1.10.5 克里斯托弗记号的求法和性质

1. 以其定义通过笛卡尔坐标求之

因为

$$\boldsymbol{e}_i = \frac{\partial z^m}{\partial x^i}\boldsymbol{i}_m, \quad \boldsymbol{i}_m = \frac{\partial x^k}{\partial z^m}\boldsymbol{e}_k$$

所以

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_i}{\partial x^j} = \frac{\partial^2 z^m}{\partial x^j \partial x^i}\frac{\partial x^k}{\partial z^m}\boldsymbol{e}_k$$

将此式与(1.10.5a)式对比并根据 $\boldsymbol{e}_k$ 的线性无关性，可得

$$\Gamma_{ij}^{k} = \frac{\partial^2 z^m}{\partial x^j \partial x^i} \frac{\partial x^k}{\partial z^m} \tag{1.10.16}$$

由(1.10.16)式和2阶混合偏导数的可交换性,显然 Γ_{ij}^{k}有如下的对称特性:

$$\Gamma_{ij}^{k} = \Gamma_{ji}^{k} \tag{1.10.17}$$

2. 通过度量张量求之

将 $g_{jl} = \boldsymbol{e}_j \cdot \boldsymbol{e}_l$ 对 x^k 求偏导数,并利用式(1.10.5b),易得

$$\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^k} = g_{jm}\Gamma_{lk}^{m} + g_{lm}\Gamma_{jk}^{m} \tag{1.10.18a}$$

对(1.10.18a)式的 j、l、k 进行圆轮转换,可得类似式子:

$$\frac{\partial g_{lk}}{\partial x^j} = g_{lm}\Gamma_{kj}^{m} + g_{km}\Gamma_{lj}^{m} \tag{1.10.18b}$$

$$\frac{\partial g_{kj}}{\partial x^l} = g_{km}\Gamma_{jl}^{m} + g_{jm}\Gamma_{kl}^{m} \tag{1.10.18c}$$

(1.10.18)式的前二式相加并减去其第三式,并利用 $\boldsymbol{g}$ 的对称性和 Γ 的对称性(1.10.17)式,可得

$$2g_{lm}\Gamma_{jk}^{m} = \frac{\partial g_{jl}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{lk}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^l} \tag{1.10.19}$$

(1.10.19)式两端同乘以 g^{il}并注意$g^{il}g_{lm} = \delta_m^i$,即有

$$\Gamma_{jk}^{i} = \frac{1}{2}g^{il}\left[\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{lk}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^l}\right] = g^{il}\Gamma_{jk,l} \tag{1.10.20a}$$

其中

$$\Gamma_{jk,l} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{lj}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l}\right] \tag{1.10.20b}$$

称为第一类克氏记号,显然它对其前二指标也是对称的:

$$\Gamma_{jk,l} = \Gamma_{kj,l} \tag{1.10.21}$$

式(1.10.20)给出了以度量张量求克氏记号的方法。这种求法相对于第一种求法的优点是它并不依赖于空间是否存在着笛卡尔坐标系,而总是适用的。由于度量张量 $\boldsymbol{g}$ 是空间的性质,故克氏记号也是空间的性质。但是,我们强调指出:尽管克氏记号在形式上是3阶系统,且两类克氏记号也可通过度量张量升、降指标而互相转换,但是它们都并非是3阶张量。由第一类克氏记号的定义(1.10.5b)式、复合函数求导的链锁法则以及协变基和逆变基矢量的坐标变换规则,我们不难推出第一类克氏记号在坐标变换下的变换规则如下(读者可作为练习证明之):

$$\overline{\Gamma}_{ij}^{k} = \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^n}\Gamma_{lm}^{n} + \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^l} \frac{\partial^2 x^l}{\partial \bar{x}^j \partial \bar{x}^i} \tag{1.10.22}$$

可见，它并不满足3阶张量的变换规则。只有在笛卡尔系到笛卡尔系的坐标变换之下，由于变换为线性变换$\frac{\partial^2 x^l}{\partial \bar{x}^j \partial \bar{x}^i}=0$，它才满足3阶张量的变换规则，而在笛卡尔系中$g_{ij}=\delta_{ij}$，故由(1.10.20)式显然可见$\Gamma^i_{jk}=0$，$\Gamma_{jk,l}=0$，也就没有必要引入克氏记号了。这样我们就回到笛卡尔张量分析的运算了。

1.10.6 度量张量的协变导数

由(1.10.18a)式移项，并根据协变导数的定义，我们可得

$$g_{jl}|_k = 0 \tag{1.10.23}$$

即度量张量的协变导数为0。用几何的语言来表达，即对于张量导数的运算而言，空间各处的度量或“尺度”是均匀的，故当我们求某量的协变导数时，可以将度量张量因子作为常量而看待。

1.10.7 张量的高阶张量导数

既然张量的张量导数(协变导数或逆变导数)是比原张量阶数高1阶的新张量，所以我们可以对它们再求张量导数而得到1个阶数又高1阶的新的张量，称其为原张量的2阶张量导数，依此类推可得张量的更高阶导数。我们以矢量$\boldsymbol{v}$的2阶协变导数为例来加以说明。$\boldsymbol{v}$的协变分量v_i的2阶协变导数$v_i|_{jk}$定义为其1阶协变导数$v_i|_j$的协变导数，即

$$v_i|_{jk} \equiv (v_i|_j)|_k = \frac{\partial v_i|_j}{\partial x^k} - (v_l|_j)\Gamma^l_{ik} - v_i|_l\Gamma^l_{jk} \tag{1.10.24}$$

将

$$v_i|_j = \frac{\partial v_i}{\partial x^j} - v_m\Gamma^m_{ij}, \quad v_l|_j = \frac{\partial v_l}{\partial x^j} - v_m\Gamma^m_{lj}, \quad v_i|_l = \frac{\partial v_i}{\partial x^l} - v_m\Gamma^m_{il}$$

代入(1.10.24)式，可得

$$v_i|_{jk} = \frac{\partial^2 v_i}{\partial x^j \partial x^k} - \frac{\partial v_m}{\partial x^k}\Gamma^m_{ij} - \frac{\partial v_l}{\partial x^j}\Gamma^l_{ik} - \frac{\partial v_i}{\partial x^l}\Gamma^l_{jk} - v_m\left[\frac{\partial}{\partial x^k}\Gamma^m_{ij} - \Gamma^l_{ik}\Gamma^m_{lj} - \Gamma^l_{jk}\Gamma^m_{il}\right]$$

适当换标，有

$$v_i|_{jk} = \frac{\partial^2 v_i}{\partial x^j \partial x^k} - \frac{\partial v_m}{\partial x^k}\Gamma^m_{ij} - \frac{\partial v_m}{\partial x^j}\Gamma^m_{ik} - \frac{\partial v_i}{\partial x^m}\Gamma^m_{jk} - v_m\left[\frac{\partial}{\partial x^k}\Gamma^m_{ij} - \Gamma^l_{ik}\Gamma^m_{lj} - \Gamma^l_{jk}\Gamma^m_{il}\right] \tag{1.10.25a}$$

同理有

$$v_i|_{kj} = \frac{\partial^2 v_i}{\partial x^k \partial x^j} - \frac{\partial v_m}{\partial x^j}\Gamma^m_{ik} - \frac{\partial v_m}{\partial x^k}\Gamma^m_{ij} - \frac{\partial v_i}{\partial x^m}\Gamma^m_{kj} - v_m\left[\frac{\partial}{\partial x^j}\Gamma^m_{ik} - \Gamma^l_{ij}\Gamma^m_{lk} - \Gamma^l_{kj}\Gamma^m_{il}\right] \tag{1.10.25b}$$

(1.10.25)式的两式相减,并利用克氏记号的对称性,可得

$$v_i|_{jk} - v_i|_{kj} = v_m R^{m}_{\cdot ijk} \tag{1.10.26}$$

其中

$$R^{m}_{\cdot ijk} \equiv \frac{\partial}{\partial x^j}\Gamma^m_{ik} - \frac{\partial}{\partial x^k}\Gamma^m_{ij} + \Gamma^m_{lj}\Gamma^l_{ik} - \Gamma^m_{lk}\Gamma^l_{ij} \tag{1.10.27}$$

将商法则应用于式(1.10.26),由于其左端的量 $v_i|_{jk} - v_i|_{kj}$ 在坐标变换之下满足3次协变规则,其右端的因子 v_m 满足1次协变规则,故可以得出结论:其右边的另一因子即式(1.10.27)所定义的量 $R^{m}_{\cdot ijk}$ 在坐标变换之下必满足1次逆变3次协变的规则,即 $R^{m}_{\cdot ijk}$ 是某一个4阶张量 $\boldsymbol{R}$ 的1次逆变3次协变的混合分量,我们称此张量 $\boldsymbol{R}$ 为空间的黎曼-克里斯托弗张量(Riemann-Christoffel tensor),或曲率张量(curvature tensor)。由于克氏记号是空间的性质,所以曲率张量 $\boldsymbol{R}$ 也是空间的某种性质,进一步的研究表明它是和空间在某一点的高斯曲率有关的,故称为空间的曲率张量。如果在我们所讨论的空间中存在着直角笛卡尔坐标系的话,则在此坐标系中我们有 $g_{ij} = \delta_{ij}$,由式(1.10.20a),我们有 $\Gamma^n_{ij} = 0$,于是由式(1.10.27),我们将有 $R^{m}_{\cdot ijk} = 0$。但由于 $\boldsymbol{R}$ 是张量,由张量分量变换规则的齐次性,可知在任何坐标系中此张量也都是零张量,即 $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{0}$,所以存在着直角笛卡尔坐标系的空间是曲率张量为 $\boldsymbol{0}$ 的平直空间,我们称此种空间为欧几里德(Euclid)空间,而曲率张量不为 $\boldsymbol{0}$ 的弯曲的非平直空间称为非欧几里德空间。直线、平面、三维几何空间、以伽利略变换为基础的时空四维空间分别是一维、二维、三维、四维的欧几里德空间,有曲率的曲线、有曲率的曲面、以洛仑兹变换为基础的时空四维空间分别是一维、二维、四维的非欧几里德空间。最重要的非欧几里德空间是"有曲率而无扭率"的黎曼(Riemann)空间,在壳体理论和边界层理论中有重要的应用,但在本书中我们将主要讨论欧几里德空间,而不讨论黎曼空间。

在欧几里德空间中,由于 $R^{m}_{\cdot ijk} = 0$,所以由式(1.10.26),显然我们有

$$v_i|_{jk} = v_i|_{kj} \tag{1.10.28}$$

即在Euclid空间中,张量的2阶协变导数是可以交换求导次序的。而在弯曲的黎曼空间中,张量的2阶协变导数一般是不可以交换求导次序的。

1.11 梯度算子∇，张量的梯度、散度和旋度

1.11.1 梯度算子∇

在笛卡尔张量分析中，人们曾引入梯度算子∇：

$$\nabla = \boldsymbol{i}^i \frac{\partial}{\partial z^i} \tag{1.11.1}$$

它具有矢量和求导的双重含义，即∇为一矢量，其笛卡尔分量为$\frac{\partial}{\partial z^i}$。由于张量的协变导数和逆变导数是张量在直角笛卡尔坐标系中对坐标偏导数的推广，而且可以保持其张量特性，所以我们可以将直角笛卡尔坐标系中的公式(1.11.1)式推广到一般的曲线坐标中而写出：

$$\nabla = \boldsymbol{e}^i \nabla_i = \boldsymbol{e}_i \nabla^i \tag{1.11.2}$$

其中∇_i和∇^i分别称为协变微分算子和逆变微分算子，可以将它们分别视为梯度算子∇的协变分量和逆变分量。协变算子∇_i的表达式为

$$\nabla_i = \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum \Gamma_i \tag{1.11.3}$$

其中Γ_i是含有一个求导下标i的第二类克氏记号，而$\sum \Gamma_i$是与被求导量的各变异指标对应的全部附加项之和，对应被求导量的每一逆变指标加上3项之和，对应被求导量每一协变指标减去3项之和，其方法见协变导数的求法和说明。当被求导量不含指标时附加项则为0，∇_i即与$\frac{\partial}{\partial x_i}$重合了。而式(1.11.2)中的$\nabla^i$称为逆变算子，它是由协变算子$\nabla_i$与度量张量$g^{ij}$相乘提升指标而派生出来的，即

$$\nabla^i = \nabla_j g^{ji} = g^{ij} \nabla_j \tag{1.11.4}$$

由于逆变算子∇^i是由协变算子∇_i派生出来的，所以以后我们将以协变算子为主来进行叙述。按照我们的记法约定，当被求导的量没有显含的指标时，协变算子和逆变算子作用于任何被求导量，也便与对该量求偏导数等同了，如$\nabla_i \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}$，$\nabla_i \boldsymbol{a} = \frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial x^i}$，$\nabla_i \boldsymbol{T} = \frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial x^i}$等等。

按照我们现在的记法，1.10 节中的式(1.10.5a)和式(1.10.9a)可以分别写为

$$\boldsymbol{e}_i \overleftarrow{\nabla}_j = \overrightarrow{\nabla}_j \boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{e}^i \overleftarrow{\nabla}_j = \overrightarrow{\nabla}_j \boldsymbol{e}^i = \boldsymbol{0} \quad (i = 1,2,3; j = 1,2,3) \tag{1.11.5}$$

其中的“$\overleftarrow{\nabla}$”和“$\overrightarrow{\nabla}$”分别表示对左边和右边的量求导。由于 $g_{ij} = \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j$，故我们显然又有

$$g_{ij} \overleftarrow{\nabla}_k = \overrightarrow{\nabla}_k g_{ij} = g_{ij}|_k = 0 \quad (i = 1,2,3;\ j = 1,2,3;\ k = 1,2,3) \tag{1.11.6a}$$

对 g^{ij}、g^i_j 可以写出与式(1.11.6a)类似的式子。同样，置换张量的协变导数也为0，即

$$\varepsilon^{ijk} \overleftarrow{\nabla}_l = \overrightarrow{\nabla}_l \varepsilon^{ijk} = 0, \quad \varepsilon_{ijk} \overleftarrow{\nabla}_l = \overrightarrow{\nabla}_l \varepsilon_{ijk} = 0$$
$$(i = 1,2,3;\ j = 1,2,3;\ k = 1,2,3; l = 1,2,3) \tag{1.11.6b}$$

由式(1.11.5)和式(1.11.6)我们可以看到：当协变算子(或逆变算子)与基矢量、度量张量或置换张量相乘时其结果都为0，因此以协变算子(或逆变算子)进行运算时，可以将曲线坐标中的基矢量、度量张量和置换张量作为常量而看待，就像在直角笛卡尔坐标中求偏导时将笛卡尔幺正基作为常矢量看待一样。

1.11.2 张量的梯度(gradient)

张量的梯度定义为该张量与梯度算子∇的外积，是一个比原张量高1阶的新张量。

标量 φ 的梯度记为 $\mathrm{grad}\varphi$，为一矢量，即

$$\begin{aligned}\mathrm{grad}\varphi &= \varphi \overleftarrow{\nabla} = \varphi \overleftarrow{\nabla}_i \boldsymbol{e}^i = \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}\boldsymbol{e}^i \\ &= \overrightarrow{\nabla} \varphi = \boldsymbol{e}^i \overrightarrow{\nabla}_i \varphi = \boldsymbol{e}^i \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}\end{aligned} \tag{1.11.7a}$$

若以 s 表示某方向的弧长，以 $\boldsymbol{s} = \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}$ 表示 $\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mathrm{d}x^i \boldsymbol{e}_i$ 方向的单位矢量，则其逆变分量为 $s^i = \dfrac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}s}$，而 φ 在一点处沿 $\boldsymbol{s}$ 的方向导数将为

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s} = \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}s} = \varphi \overleftarrow{\nabla}_i s^i = (\varphi \overleftarrow{\nabla}) \cdot \boldsymbol{s} = (\mathrm{grad}\varphi) \cdot \boldsymbol{s} \tag{1.11.7b}$$

这就是说“标量 φ 沿任意方向的方向导数等于其梯度矢量在该方向的正交投影”，所以梯度方向是 φ 变化最快的方向，φ 在梯度方向的方向导数恰等于梯度矢量之

模。这是大家在高等数学场论中所熟知的，只不过我们是用曲线坐标中的形式通过 $\boldsymbol{s}$ 的逆变分量和梯度矢量的协变分量相乘并约定求和的形式将之表达出来了。

矢量 $\boldsymbol{v}$ 的梯度记为 $\mathrm{grad}\boldsymbol{v}$，为一 2 阶张量，通常取为右梯度 $\boldsymbol{v}\overleftarrow{\nabla}$，即

$$\begin{aligned}\mathrm{grad}\boldsymbol{v} &= \boldsymbol{v}\overleftarrow{\nabla} = v^i\overleftarrow{\nabla}_j\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}^j = v^i|_j\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}^j \\ &= v_i\overleftarrow{\nabla}_j\boldsymbol{e}^i\boldsymbol{e}^j = v_i|_j\boldsymbol{e}^i\boldsymbol{e}^j\end{aligned} \tag{1.11.8a}$$

当然也可把矢量 $\boldsymbol{v}$ 的梯度定义为左梯度 $\overrightarrow{\nabla}\boldsymbol{v}$，即

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\nabla}\boldsymbol{v} &= \overrightarrow{\nabla}_j v^i\boldsymbol{e}^j\boldsymbol{e}_i = v^i|_j\boldsymbol{e}^j\boldsymbol{e}_i \\ &= \overrightarrow{\nabla}_j v_i\boldsymbol{e}^j\boldsymbol{e}^i = v_i|_j\boldsymbol{e}^j\boldsymbol{e}^i\end{aligned} \tag{1.11.8b}$$

显然(1.11.8a)式和(1.11.8b)式所定义的 $\boldsymbol{v}$ 的梯度是不相同的，它们互为转置，即 $\overrightarrow{\nabla}\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{v}\overleftarrow{\nabla})^{\mathrm{T}}$，故对任意的矢量 $\boldsymbol{a}$，我们都有

$$\boldsymbol{a}\cdot(\overrightarrow{\nabla}\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{v}\overleftarrow{\nabla})\cdot\boldsymbol{a} \tag{1.11.8c}$$

2 阶张量 $\boldsymbol{T}$ 的梯度记为 $\mathrm{grad}\boldsymbol{T}$，为一 3 阶张量，通常取为右梯度 $\boldsymbol{T}\overleftarrow{\nabla}$，即

$$\mathrm{grad}\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}\overleftarrow{\nabla} = T^{ij}\overleftarrow{\nabla}_k\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}^k = T^{i}_{\cdot j}\overleftarrow{\nabla}_k\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}^j\boldsymbol{e}^k = T_{ij}\overleftarrow{\nabla}_k\boldsymbol{e}^i\boldsymbol{e}^j\boldsymbol{e}^k = T_{i}^{\cdot j}\overleftarrow{\nabla}_k\boldsymbol{e}^i\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}^k \tag{1.11.9a}$$

当然也可把 2 阶张量 $\boldsymbol{T}$ 的梯度定义为左梯度 $\overrightarrow{\nabla}\boldsymbol{T}$，即

$$\overrightarrow{\nabla}\boldsymbol{T} = \overrightarrow{\nabla}_k T^{ij}\boldsymbol{e}^k\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j = \overrightarrow{\nabla}_k T^{i}_{\cdot j}\boldsymbol{e}^k\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}^j = \overrightarrow{\nabla}_k T_{ij}\boldsymbol{e}^k\boldsymbol{e}^i\boldsymbol{e}^j = \overrightarrow{\nabla}_k T_{i}^{\cdot j}\boldsymbol{e}^k\boldsymbol{e}^i\boldsymbol{e}_j \tag{1.11.9b}$$

显然(1.11.9a)式和(1.11.9b)式所定义的 $\boldsymbol{T}$ 的梯度是不同的。但对任意的矢量 $\boldsymbol{a}$，我们都有

$$(\boldsymbol{T}\overleftarrow{\nabla})\cdot\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}\cdot(\overrightarrow{\nabla}\boldsymbol{T}) \tag{1.11.9c}$$

对任意高阶张量的梯度可类似定义，而且类似于式(1.11.7b)，我们也有

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}s} = \frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial x^i}\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}s} = \boldsymbol{A}\overleftarrow{\nabla}_i s^i = (\boldsymbol{A}\overleftarrow{\nabla})\cdot\boldsymbol{s} = (\mathrm{grad}\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{s} \tag{1.11.9d}$$

1.11.3 张量的散度(divergence)

张量的散度定义为该张量与梯度算子 ∇ 的点积，是一个比原张量低 1 阶的新张量。

矢量 $\boldsymbol{v}$ 的散度记为 $\mathrm{div}\boldsymbol{v}$，为一标量，即

$$\mathrm{div}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} \cdot \overleftarrow{\nabla} = v^i \overleftarrow{\nabla}_i = v^i|_i$$
$$= \overrightarrow{\nabla} \cdot \boldsymbol{v} = \overrightarrow{\nabla}_i v^i = v^i|_i \tag{1.11.10}$$

2 阶张量 $\boldsymbol{T}$ 的散度记为 $\mathrm{div}\boldsymbol{T}$，为一矢量，通常取为右散度 $\boldsymbol{T} \cdot \overleftarrow{\nabla}$，即

$$\mathrm{div}\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T} \cdot \overleftarrow{\nabla} = T^{ij} \overleftarrow{\nabla}_j \boldsymbol{e}_i = T_i{}^j \overleftarrow{\nabla}_j \boldsymbol{e}^i \tag{1.11.11a}$$

当然也可把矢量 $\boldsymbol{T}$ 的散度取为左散度 $\overrightarrow{\nabla} \cdot \boldsymbol{T}$，即

$$\overrightarrow{\nabla} \cdot \boldsymbol{T} = \overrightarrow{\nabla}_j T^{ji} \boldsymbol{e}_i = \overrightarrow{\nabla}_j T^j{}_{\cdot i} \boldsymbol{e}^i \tag{1.11.11b}$$

显然(1.11.11a)式和(1.11.11b)式所定义的 $\boldsymbol{T}$ 的散度是不同的，但我们有

$$\overrightarrow{\nabla} \cdot \boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}^{\mathrm{T}} \cdot \overleftarrow{\nabla}, \quad \overrightarrow{\nabla} \cdot \boldsymbol{T}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{T} \cdot \overleftarrow{\nabla} \tag{1.11.11c}$$

1.11.4 张量的旋度(rotation)

张量的旋度定义为该张量与梯度算子 ∇ 的叉积，是一个与原张量同阶的新张量。

矢量 $\boldsymbol{v}$ 的旋度记为 $\mathrm{rot}\boldsymbol{v}$，为一矢量，通常取为左旋度 $\overrightarrow{\nabla} \times \boldsymbol{v}$，即

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{v} = \overrightarrow{\nabla} \times \boldsymbol{v} = \varepsilon^{ijk} \overrightarrow{\nabla}_i v_j \boldsymbol{e}_k \tag{1.11.12a}$$

当然也可以将 $\boldsymbol{v}$ 的旋度取为右旋度 $\boldsymbol{v} \times \overleftarrow{\nabla}$，则显然有

$$\boldsymbol{v} \times \overleftarrow{\nabla} = -\overrightarrow{\nabla} \times \boldsymbol{v} \tag{1.11.12b}$$

对矢量的旋度，我们通常取左旋度，这是因为在直角笛卡尔坐标系中，式(1.11.12a)所给出的结果恰恰是与高等数学中大家所见到的形式是一致的。

2 阶张量 $\boldsymbol{T}$ 的旋度记为 $\mathrm{rot}\boldsymbol{T}$，为 2 阶张量，通常取为左旋度 $\overrightarrow{\nabla} \times \boldsymbol{T}$，即

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{T} = \overrightarrow{\nabla} \times \boldsymbol{T} = \overrightarrow{\nabla}_k \boldsymbol{e}^k \times T_{ji} \boldsymbol{e}^j \boldsymbol{e}^i = \overrightarrow{\nabla}_k T_{ji} \varepsilon^{kjl} \boldsymbol{e}_l \boldsymbol{e}^i \tag{1.11.13a}$$

如将 2 阶张量 $\boldsymbol{T}$ 的旋度取为右旋度 $\boldsymbol{T} \times \overleftarrow{\nabla}$，则有

$$\boldsymbol{T} \times \overleftarrow{\nabla} = T_{ij} \boldsymbol{e}^i \boldsymbol{e}^j \times \overleftarrow{\nabla}_k \boldsymbol{e}^k = T_{ij} \overleftarrow{\nabla}_k \boldsymbol{e}^i \varepsilon^{jkl} \boldsymbol{e}_l = T_{ij} \overleftarrow{\nabla}_k \varepsilon^{jkl} \boldsymbol{e}^i \boldsymbol{e}_l \tag{1.11.13b}$$

如分别记 $\boldsymbol{D} = \overrightarrow{\nabla} \times \boldsymbol{T}$ 和 $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{T} \times \overleftarrow{\nabla}$，则由于 $D^l{}_{\cdot i} = \overrightarrow{\nabla}_k T_{ji} \varepsilon^{kjl}$，$C_i{}^l = T_{ij} \overleftarrow{\nabla}_k \varepsilon^{jkl}$，则显然我们有

$$(\overrightarrow{\nabla} \times \boldsymbol{T})^{\mathrm{T}} = -\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}} \times \overleftarrow{\nabla} \tag{1.11.13c}$$

1.11.5 拉普拉斯算子(Laplace operator)

拉普拉斯算子(Laplace operator)Δ 定义为$\nabla \cdot \nabla$，即

$$\Delta = \nabla \cdot \nabla = g^{ij} \nabla_i \nabla_j = \nabla^j \nabla_j \tag{1.11.14}$$

它是一个求 2 阶导数的标量算子，我们可以把它与任意阶的张量相乘而进行相应的 2 阶求导的运算。

1.12 常用的积分定理

为了简洁和易于理解，本节将以直角笛卡尔坐标为基础简单导出几个常用的积分定理，根据张量运算的坐标普适性和不变性原则，这些积分定理在任何曲线坐标系中都是成立的，只需将其中对笛卡尔坐标的偏导数改为曲线坐标系中的协变导数即可。

1.12.1 高斯(Gauss)定理

考虑由有限个光滑曲面组成的外表面为 S 的任意一个体积 V 上的如下体积分：

$$\int_V \frac{\partial \varphi}{\partial z^3} \mathrm{d}V = \iiint_V \frac{\partial \varphi}{\partial z^3} \mathrm{d}z^1 \mathrm{d}z^2 \mathrm{d}z^3 \tag{1.12.1}$$

其中 $\varphi(z^1, z^2, z^3)$ 是任意连续可微的场函数。将 V 分割为无穷多个轴线平行于 z^3 轴的小柱体 V_i，如图 1.12 所示，$V = \sum V_i$，则有

$$\int_V \frac{\partial \varphi}{\partial z^3} \mathrm{d}V = \sum \int_{V_i} \frac{\partial \varphi}{\partial z^3} \mathrm{d}V_i \tag{1.12.2}$$

若再将 V_i 分为一系列底面平行于平面 $z^1 z^2$、高度为 $\mathrm{d}z^3$ 的小薄饼(见图 1.12)，则 $\mathrm{d}V_i = \mathrm{d}z^3 \mathrm{d}\sigma$，于是有

$$\begin{aligned} \int_{V_i} \frac{\partial \varphi}{\partial z^3} \mathrm{d}V_i &= \int_{z^{**}}^{z^*} \frac{\partial \varphi}{\partial z^3} \mathrm{d}\sigma \mathrm{d}z^3 = \mathrm{d}\sigma \int_{z^{**}}^{z^*} \frac{\partial \varphi}{\partial z^3} \mathrm{d}z^3 \\ &= \mathrm{d}\sigma[\varphi(z^*) - \varphi(z^{**})] = \mathrm{d}\sigma(\varphi^* - \varphi^{**}) \end{aligned} \tag{1.12.3}$$

其中，z^* 和 z^{**} 表示 V_i 和曲面 S 所交的上、下微面积 $\mathrm{d}S^*$、$\mathrm{d}S^{**}$ 处的坐标，$\mathrm{d}\sigma$ 为

柱体 V_i 投影到平面 z^1z^2 上的面积。

若以 $\boldsymbol{n}=n_i\boldsymbol{i}^i$ 代表曲面 S 的单位外法矢量，则显然有

$$d\sigma = dS^* n_3^* = -dS^{**} n_3^{**} \tag{1.12.4}$$

故(1.12.3)式可写为

$$\int_{V_i} \frac{\partial \varphi}{\partial z^3} dV_i = \varphi^* n_3^* dS^* + \varphi^{**} n_3^{**} dS^{**} \tag{1.12.5}$$

由(1.12.5)式和(1.12.2)式，有

$$\int_V \frac{\partial \varphi}{\partial z^3} dV = \oint_S \varphi n_3 dS \tag{1.12.6}$$

类似地，我们可得

$$\int_V \frac{\partial \varphi}{\partial z^i} dV = \oint_S \varphi n_i dS \quad (i=1,2,3) \tag{1.12.7}$$

或推广到一般曲线坐标中，我们有

$$\int_V \varphi \overleftarrow{\nabla}_i dV = \oint_S \varphi n_i dS \quad (i=1,2,3) \tag{1.12.8}$$

把式(1.12.8)两边与 $\boldsymbol{e}^i$ 相乘并相加，可得

$$\int_V \varphi \overleftarrow{\nabla} dV = \oint_S \varphi \boldsymbol{n} dS \tag{1.12.9}$$

这个推导过程是与 φ 是标量、矢量还是张量无关的。例如，当我们在上式中取 $\varphi=v^j$ 时，可得

$$\int_V v^j \overleftarrow{\nabla}_i dV = \oint_S v^j n_i dS \tag{1.12.10}$$

或表示为

$$\int_V \boldsymbol{v} \overleftarrow{\nabla} dV = \oint_S \boldsymbol{v}\boldsymbol{n} dS \tag{1.12.11}$$

当 φ 取为任意阶张量 $\boldsymbol{T}$ 时，可有

$$\int_V \boldsymbol{T} \overleftarrow{\nabla} dV = \oint_S \boldsymbol{T}\boldsymbol{n} dS \tag{1.12.12}$$

这可以视为高斯定理的一般形式，它表明：任意张量的梯度 $\boldsymbol{T}\overleftarrow{\nabla}$ 在体积 V 上的体积分等于该张量与 V 的表面积 S 之单位外法矢量 $\boldsymbol{n}$ 的外积 $\boldsymbol{T}\boldsymbol{n}$ 在 S 上的面积分。显然，当将(1.12.12)式中的右梯

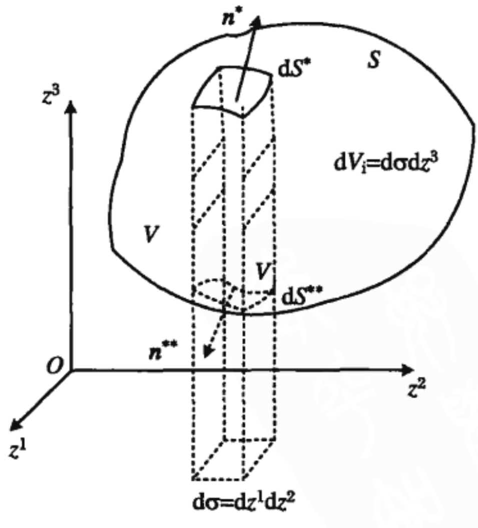


图 1.12

度 $T\overleftarrow{\nabla}$ 改为左梯度$\overrightarrow{\nabla}T$ 时，T 与 $\boldsymbol{n}$ 的右外积 $\boldsymbol{Tn}$ 则需改为 T 与 $\boldsymbol{n}$ 的左外积 $\boldsymbol{nT}$。

若将(1.12.10)式进行一次缩并，可得

$$\int_V \mathrm{div}\boldsymbol{v}\mathrm{d}V = \int_V \boldsymbol{v}\cdot\overleftarrow{\nabla}\mathrm{d}V = \oint_S \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S \tag{1.12.13}$$

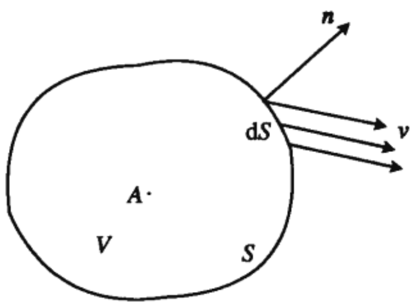


图 1.13

该式即为高等数学中常见的高斯(Gauss)定理。当 $\boldsymbol{v}$ 表示介质的质点速度时，(1.12.13)式的含义为：通过表面 S 的介质体积发散率等于介质速度散度的体积分(见图 1.13)。当取 V 为一个包含某点 A 的无限小体积并对(1.12.13)式利用中值定理时，有

$$(\mathrm{div}\boldsymbol{v})_A V = \oint_S \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S \tag{1.12.14}$$

由此可得到矢量 $\boldsymbol{v}$ 散度的物理定义如下：

$$\mathrm{div}\boldsymbol{v} = \lim_{V\to 0}\frac{1}{V}\oint_S \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S \tag{1.12.15}$$

即场内一点处的 $\mathrm{div}\boldsymbol{v}$ 表示矢量 $\boldsymbol{v}$ 通过包围该点的体积 V 向外的单位体积(极限意义下)的发散量。式(1.12.15)中的 $\boldsymbol{v}$ 改为任意阶的张量时，即得到该张量散度的物理定义。

式(1.12.8)～式(1.12.13)各式都可称为高斯定理，推广到一般曲线坐标中，只需将 ∇、∇_j、n_j 分别理解为梯度算子、协变算子、$\boldsymbol{n}$ 的协变分量即可。而式(1.12.9)、式(1.12.11)、式(1.12.12)则是高斯定理的张量直接记法，其中的乘积都是外积。

1.12.2 广义高斯定理

广义高斯定理 设 $L(\nabla)$ 为一个 ∇ 的线性算子，即对任意的数量因子 λ、μ(包括微分算子)和矢量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$，都有

$$L(\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}) = \lambda L(\boldsymbol{a}) + \mu L(\boldsymbol{b}) \tag{1.12.16}$$

则有

$$\int_V L(\nabla)\mathrm{d}V = \oint_S L(\boldsymbol{n})\mathrm{d}S \tag{1.12.17}$$

证明

$$\int_V L(\nabla)\mathrm{d}V = \int_V L(\nabla_i\boldsymbol{e}^i)\mathrm{d}V = \int_V \nabla_i L(\boldsymbol{e}^i)\mathrm{d}V$$

$$= \oint_S n_i L(e^i)\mathrm{d}S = \oint_S L(n_i e^i)\mathrm{d}S = \oint_S L(n)\mathrm{d}S \qquad (1.12.18)$$

证毕。

但我们要注意：因为定理中数量因子 λ 和 μ 可以是微分算子，而两个量乘积的微分等于两项之和，故当体积分中只有一个因子求导和两个因子的乘积求导时结果将是不同的，即

$$\begin{cases} \int_V (f\varphi)\overleftarrow{\nabla}\mathrm{d}V = \oint_S f\varphi \boldsymbol{n}\mathrm{d}S \\ \int_V (\varphi)\overleftarrow{\nabla} f\mathrm{d}V = \int_V [(f\varphi)\overleftarrow{\nabla} - f\overleftarrow{\nabla}\varphi]\mathrm{d}S = \oint_S f\varphi\boldsymbol{n}\mathrm{d}S - \int_V f\overleftarrow{\nabla}\varphi\mathrm{d}V \end{cases} \qquad (1.12.19)$$

以上各式中虽然我们写的都是 $\overleftarrow{\nabla}$，但显然改为 $\overrightarrow{\nabla}$ 时也是一样的，只需保持 $\boldsymbol{n}$ 在相应的位置即可。

1.12.3 斯托克斯(Stokes)定理

取 $L(\nabla) = \nabla \times \boldsymbol{v}$，则广义高斯定理给出一个结果：

$$\int_V \nabla \times \boldsymbol{v}\mathrm{d}V = \oint_S \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{v}\mathrm{d}S \qquad (1.12.20)$$

将式(1.12.20)应用到如图 1.14 所示的高为 h 的微薄圆盘，并与圆盘上表面的单位法矢量 $\boldsymbol{n}_1$ 点积，则有

$$\int_V \boldsymbol{n}_1 \cdot (\nabla \times \boldsymbol{v})\mathrm{d}V = \oint_S \boldsymbol{n}_1 \cdot (\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{v})\mathrm{d}S = \oint_S \boldsymbol{v} \cdot (\boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{n})\mathrm{d}S \qquad (1.12.21)$$

其中 S 包括上、下表面和侧表面。注意到上表面和下表面的单位法向矢量分别为 $\boldsymbol{n}_1$ 和 $-\boldsymbol{n}_1$，故沿上、下表面有 $\boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{n} = \boldsymbol{0}$；侧面的单位法矢为 $\boldsymbol{n}_2$，有 $\boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{n} = \boldsymbol{\tau}$，恰为沿侧面环线 C 的单位切矢量 $\boldsymbol{\tau}$，并与 $\boldsymbol{n}_1$、$\boldsymbol{n}_2$ 成右手系，如图 1.14。故(1.12.21)式右端为

$$\int_S \boldsymbol{v} \cdot (\boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{n})\mathrm{d}S = \oint_C \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\tau} h\mathrm{d}l = h\oint_C \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \qquad (1.12.22)$$

又有 $\boldsymbol{n}_1\mathrm{d}V = \boldsymbol{n}_1 h\mathrm{d}\sigma = h\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$（$\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$ 为上表面的面积矢量），故(1.12.21)式左端为

$$\int_V (\nabla \times \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{n}_1\mathrm{d}V = h\int_\sigma (\nabla \times \boldsymbol{v}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} \qquad (1.12.23)$$

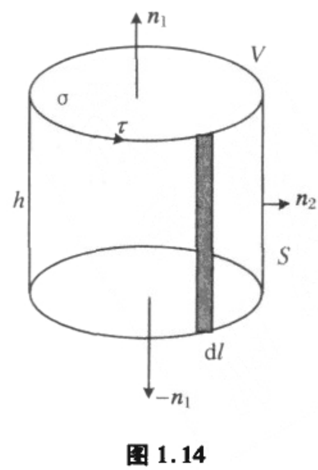


图 1.14

将(1.12.22)式和(1.12.23)式代入(1.12.21)式,可得

$$\oint_{\sigma}(\nabla \times \boldsymbol{v}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} = \oint_{C}\boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{1.12.24}$$

(1.12.24)式就是平面闭曲线 C 条件下的斯托克斯(Stokes)定理。对任意的闭曲线 C,设 S 是以其为周线的曲面,其中 C 与 S 的外法向成右手系,则容易证明斯托克斯定理也是成立的,即

$$\int_{S}(\nabla \times \boldsymbol{v}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_{S}\mathrm{rot}\boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_{S}(\mathrm{rot}\boldsymbol{v})_n \mathrm{d}S = \oint_{C}\boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{1.12.25}$$

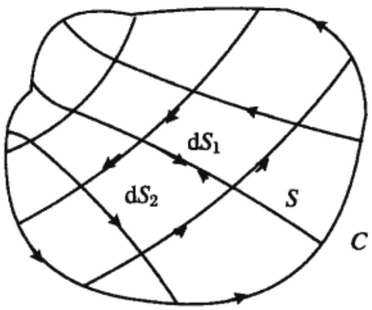


图 1.15

其中 $\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \boldsymbol{n}\mathrm{d}S$ 为面积矢量。这是因为:当将 S 分为许多微面积 $\mathrm{d}S_i$ 时,沿每两个相邻的微面积 $\mathrm{d}S_1$ 和 $\mathrm{d}S_2$ 的公共边界上的线积分因其方向相反而相互抵消了(见图 1.15)。

将第二型曲面积分和第二型曲线积分相联系的公式(1.12.25)式,即是斯托克斯定理的一般形式。当 $\boldsymbol{v}$ 是介质质点速度时,它的物理意义是:速度的旋度沿曲面 S 的发散量等于介质沿 S 的环线 C 的环流量。由此可给出旋度 $\mathrm{rot}\boldsymbol{v}$ 的物理定义如下:

$$(\mathrm{rot}\boldsymbol{v})_n = \lim_{S\to 0}\frac{1}{S}\oint_{C}\boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{1.12.26}$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 与闭曲线 C 成右手系。(1.12.26)式说明:$(\mathrm{rot}\boldsymbol{v})_n$ 等于该点处速度 $\boldsymbol{v}$ 沿与 $\boldsymbol{n}$ 垂直的微面积 S 的周环线 C 每单位面积上的环流量(极限意义下)。

1.12.4 位势定理

1. 无旋矢量的标量势

定义 若对矢量场 $\boldsymbol{v}$,存在一个标量场 φ,使得处处有

$$\nabla\varphi = \boldsymbol{v} \tag{1.12.27}$$

则称 $\boldsymbol{v}$ 存在标量势 φ。

定理一 矢量场 $\boldsymbol{v}$ 无旋的充要条件是它存在标量势 φ。

证明 先证充分性。设 $\boldsymbol{v}$ 存在标量势 φ,即 $\nabla\varphi = \boldsymbol{v}$,则显然有

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{v} = \nabla \times \boldsymbol{v} = \nabla \times (\nabla\varphi) = \boldsymbol{0} \tag{1.12.28}$$

这说明:存在标量势 φ 的矢量 $\boldsymbol{v}$ 必然是无旋的,充分性证毕。

再证必要性。设 $\boldsymbol{v}$ 无旋,即处处有

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{v} = \nabla \times \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0} \tag{1.12.29}$$

则由斯托克斯定理，对空间中任何一条闭合曲线 C，都有

$$\oint_C \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_S (\nabla \times \boldsymbol{v}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_S \boldsymbol{0} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0 \tag{1.12.30}$$

这说明线积分与路径无关。于是可以通过线积分来定义一个空间点函数 $\varphi(z)$，即

$$\varphi(z) = \varphi(z^0) + \int_{z^0}^{z} \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{1.12.31}$$

其中可差一个任意常数 $\varphi(z_0)$，z_0 和 z 是任意取的起始点和变点的位置矢量。特别地，当 z_0 和 z 无限接近时，则上式变为

$$\mathrm{d}\varphi = \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}z = v_i \mathrm{d}z^i \tag{1.12.32}$$

又由于 $\mathrm{d}\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial z^i}\mathrm{d}z^i$，对比此式和(1.12.32)式，并由 $\mathrm{d}z^i$ 的任意性，可得

$$v_i = \frac{\partial \varphi}{\partial z^i} = \nabla_i \varphi, \quad \boldsymbol{v} = \nabla \varphi = \mathrm{grad}\varphi \tag{1.12.33}$$

这说明无旋矢量 $\boldsymbol{v}$ 存在标量势 φ，且式(1.12.31)还给出了标量势 φ 的求法，必要性证毕。

2. 无散(等容)矢量的矢量势

定义 若对矢量场 $\boldsymbol{v}$，存在另一个矢量场 $\boldsymbol{a}$，使得处处有

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{a} = \nabla \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{v} \tag{1.12.34}$$

则称矢量场 $\boldsymbol{v}$ 存在矢量势 $\boldsymbol{a}$。

定理二 矢量无散(等容)的充要条件是它存在矢量势 $\boldsymbol{a}$。

证明 定理的充分性是显然的，因为如果 $\boldsymbol{v}$ 存在矢量势 $\boldsymbol{a}$，即 $\boldsymbol{v} = \nabla \times \boldsymbol{a}$，则有

$$\mathrm{div}\boldsymbol{v} = \nabla \cdot \boldsymbol{v} = \nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{a}) = 0 \tag{1.12.35}$$

即 $\boldsymbol{v}$ 是无散的，充分性证毕。

现证其必要性。设 $\boldsymbol{v}$ 无散，即

$$\mathrm{div}\boldsymbol{v} = \nabla \cdot \boldsymbol{v} = \frac{\partial v_i}{\partial z^i} = 0 \tag{1.12.36}$$

我们来证明：一定存在一个矢量场 $\boldsymbol{a}$，使得 $\mathrm{rot}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{v}$，即

$$\begin{cases} \dfrac{\partial a_3}{\partial z^2} - \dfrac{\partial a_2}{\partial z^3} = v_1 \\ \dfrac{\partial a_1}{\partial z^3} - \dfrac{\partial a_3}{\partial z^1} = v_2 \\ \dfrac{\partial a_2}{\partial z^1} - \dfrac{\partial a_1}{\partial z^2} = v_3 \end{cases} \tag{1.12.37}$$

我们的问题归结为：由条件(1.12.36)式来证明方程组(1.12.37)式必有解。试设 $a_1=0$，积分(1.12.37)式的第三式和第二式，分别有

$$a_2(z^1,z^2,z^3)=\int_{z^{10}}^{z^1}v_3(z^1,z^2,z^3)\mathrm{d}z^1+\psi_2(z^2,z^3) \tag{1.12.38}$$

$$a_3(z^1,z^2,z^3)=-\int_{z^{10}}^{z^1}v_2(z^1,z^2,z^3)\mathrm{d}z^1+\psi_3(z^2,z^3) \tag{1.12.39}$$

其中 ψ_2 和 ψ_3 是 z^2 和 z^3 的任意函数，可由(1.12.37)式的第一个方程求出。事实上，将(1.12.38)式和(1.12.39)式代入到(1.12.37)式的第一个方程中，可得

$$v_1(z^1,z^2,z^3)=-\int_{z^{10}}^{z^1}\left(\frac{\partial v_2}{\partial z^2}+\frac{\partial v_3}{\partial z^3}\right)\mathrm{d}z^1+\frac{\partial\psi_3}{\partial z^2}-\frac{\partial\psi_2}{\partial z^3}\quad (z^{10}\text{ 为点 }z^0\text{ 的 }z^1\text{ 值})$$

利用(1.12.36)式并积分上式右端的第一项，上式可写为

$$\frac{\partial\psi_3}{\partial z^2}-\frac{\partial\psi_2}{\partial z^3}=v_1(z^{10},z^2,z^3) \tag{1.12.40}$$

试设 $\psi_2=0$，积分(1.12.40)式，可得

$$\psi_3(z^2,z^3)=\int_{z^{20}}^{z^2}v_1(z^{10},z^2,z^3)\mathrm{d}z^2+\psi(z^3)\quad (z^{20}\text{ 为点 }z^0\text{ 的 }z^2\text{ 值}) \tag{1.12.41}$$

其中 $\psi(z^3)$为 z^3 的任意函数。这样，我们就得到了(1.12.37)式的一组解如下：

$$\begin{cases} a_1(z^1,z^2,z^3)=0 \\ a_2(z^1,z^2,z^3)=\displaystyle\int_{z^{10}}^{z^1}v_3(z^1,z^2,z^3)\mathrm{d}z^1 \\ a_3(z^1,z^2,z^3)=-\displaystyle\int_{z^{10}}^{z^1}v_2(z^1,z^2,z^3)\mathrm{d}z^1+\int_{z^{20}}^{z^2}v_1(z^{10},z^2,z^3)\mathrm{d}z^2+\psi(z^3) \end{cases} \tag{1.12.42}$$

即我们由 $\boldsymbol{v}$ 的无散条件(1.12.36)式证明了其矢量势的存在性，必要性证毕。

显然无散矢量 $\boldsymbol{v}$ 的矢量势 $\boldsymbol{a}$ 并不是唯一的。事实上若 $\boldsymbol{a}$ 是 $\boldsymbol{v}$ 的矢量势，那么 $\boldsymbol{a}'=\boldsymbol{a}+\nabla\varphi$ 也必然是 $\boldsymbol{v}$ 的矢量势，这是因为

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{a}'=\mathrm{rot}\boldsymbol{a}+\nabla\times(\nabla\varphi)=\boldsymbol{v} \tag{1.12.43}$$

定理三(赫尔姆霍兹(Holmholtz)定理) 任意一个矢量场 $\boldsymbol{v}$ 都可分解为一个无旋的矢量场 $\boldsymbol{v}_1$ 和一个无散的矢量场 $\boldsymbol{v}_2$ 之和，即

$$\begin{cases} \boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2 \\ \mathrm{rot}\boldsymbol{v}_1=\boldsymbol{0},\quad \boldsymbol{v}_1=\nabla\varphi \\ \mathrm{div}\boldsymbol{v}_2=0,\quad \boldsymbol{v}_2=\mathrm{rot}\boldsymbol{a} \end{cases} \tag{1.12.44}$$

该定理的证明比较复杂冗长，本书略去，读者可参考有关书籍，如(前苏联)柯

青(H. E. Кочин)所著的《向量计算及张量计算初步》(史福培等译,高等教育出版社出版,1958 年)。

1.13　张量方程及其意义

我们把各项都具有同阶张量性质的方程称为张量方程。在讲了张量的代数运算、微分运算和积分运算之后,我们就可以理解张量方程可以是代数方程、微分方程、积分方程或微分-积分方程等等。在指出张量方程的意义之前,我们首先指出张量的两个最简单然而却是最重要的性质,即:

(1) 如果一个张量在某一个坐标系中是零张量(即所有分量都是 0)的话,则它在任何坐标系中仍然是零张量(即所有分量仍然是 0)。

(2) 同阶张量的任何线性组合仍然是同阶的张量。

这两个命题的成立是一目了然的,因为在坐标变换下张量分量的变化规则对其分量是齐次的。

根据以上两条性质,我们可以说张量方程的价值和含义是:为了描述某一个物理定律,我们找到了某些同阶张量的线性组合,该组合张量在某一个坐标系当中为零张量,而且在任何坐标系中都是零张量。这就意味着:只要我们在一个坐标系中得到了某一个物理定律的张量方程的话,它也就是该物理定律在任何坐标系中的张量方程,即物理定律的张量方程形式具有坐标普适性和不变性的特征,所以物理定律的张量方程才是其普适性的数学表达形式。这也就是我们学习张量理论的意义所在。

1.14　正交曲线坐标系中的张量和物理分量

在 1.9 节中我们曾经介绍了张量的物理分量,它们虽然不像张量的张量分量一样在坐标变换之下满足张量定义所规定的确定变换规则,但是却比张量的张量分量有着如下的优越性:物理意义比较明确且同一张量的不同物理分量都有相同

的量纲。在 1.9 节中我们也曾指出，定义张量物理分量的方法并不是唯一的，但是在正交曲线坐标系中，各种不同方法所定义的各类物理分量则是相同的，它们事实上都等于张量在正交曲线坐标系中该点处局部幺正基上的笛卡尔分量，这样我们就从张量的一般理论回到了笛卡尔张量的理论框架。正交曲线坐标是最常用的曲线坐标，当我们采用正交曲线坐标时，一方面我们可以从张量的一般理论出发并引入协变导数等概念，从而得出物理定律的一般张量方程形式，并将之转换为由各量的物理分量所表达的笛卡尔张量方程形式；另一方面我们也可以直接在笛卡尔张量的理论框架之内，以张量物理分量的形式写出物理定律的笛卡尔张量方程形式。在实践上，人们用得更多的是后一种方法，因此本节我们将以正交曲线坐标中张量物理分量的概念为基础，来介绍正交曲线坐标中的有关知识，而其核心内容就是引入正交曲线坐标中的局部幺正基、正交曲线坐标中的笛卡尔梯度算子、正交曲线坐标中幺正基对坐标的偏导数。

1.14.1 正交曲线坐标和正交曲线坐标中的梯度算子

在 1.7 节中我们曾通过 3 个一对一的可逆映射引入过曲线坐标 x^k：

$$x^k = x^k(z^1, z^2, z^3) \quad (k = 1,2,3) \tag{1.14.1}$$

并通过公式

$$\boldsymbol{e}_k(p) = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^k} = \frac{\partial z^j}{\partial x^k}\boldsymbol{i}_j \quad (k = 1,2,3) \tag{1.14.2}$$

建立了曲线坐标中在任意点 p 处的 3 个协变基矢量 $\boldsymbol{e}_k(p)$，其长度称为拉梅系数(Lame coefficients)，记为 $H_k(p)$：

$$H_k(p) = |\boldsymbol{e}_k(p)| = \sqrt{\left(\frac{\partial z^1}{\partial x^k}\right)^2 + \left(\frac{\partial z^2}{\partial x^k}\right)^2 + \left(\frac{\partial z^3}{\partial x^k}\right)^2} \quad (k = 1,2,3) \tag{1.14.3}$$

引入 $\boldsymbol{e}_k$ 方向的单位矢量 $\hat{\boldsymbol{e}}_k$，则利用(1.14.2)式，我们就有

$$\hat{\boldsymbol{e}}_k = \frac{1}{H_k}\frac{\partial z^j}{\partial x^k}\boldsymbol{i}_j = \alpha_k^j \boldsymbol{i}_j \quad (k = 1,2,3;\text{对 } k \text{ 不求和}) \tag{1.14.4a}$$

其中

$$\alpha_k^j = \frac{1}{H_k}\frac{\partial z^j}{\partial x^k} \quad (j = 1,2,3; k = 1,2,3;\text{对 } k \text{ 不求和}) \tag{1.14.5}$$

α_k^j 是由幺正基 $\boldsymbol{i}_j$ 到单位基 $\hat{\boldsymbol{e}}_k$ 的变换系数矩阵，在一般情况下 $\hat{\boldsymbol{e}}_k$ 未必是幺正基，故矩阵 $\boldsymbol{\alpha}$ 未必是正交矩阵。如果在空间的每一点 $\boldsymbol{e}_k$ 都两两正交(因而 $\hat{\boldsymbol{e}}_k$ 是幺正

基)的话，则我们称此种曲线坐标为正交曲线坐标，此时矩阵 $\boldsymbol{\alpha}$ 是幺正基到幺正基的变换系数矩阵，那么它必然是正交矩阵。我们来证明此点。由于是幺正基，为了简单起见，如果我们只用下标，则(1.14.4a)式可写为

$$\hat{\boldsymbol{e}}_k = \alpha_{jk}\boldsymbol{i}_j = \beta_{kj}\boldsymbol{i}_j \tag{1.14.4b}$$

其中 $\beta_{kj} = \alpha_{jk}$ 是由幺正基 $\boldsymbol{i}_j$ 到幺正基 $\hat{\boldsymbol{e}}_k$ 的变换系数矩阵。由于我们有

$$\beta_{ki} = \hat{\boldsymbol{e}}_k \cdot \boldsymbol{i}_i = \boldsymbol{i}_i \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_k$$

所以

$$\boldsymbol{i}_i = (\boldsymbol{i}_i \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_k)\hat{\boldsymbol{e}}_k = \beta_{ki}\hat{\boldsymbol{e}}_k \tag{1.14.5a}$$

利用(1.14.4b)式和(1.14.5a)式，我们可分别有

$$\delta_{kl} = \hat{\boldsymbol{e}}_k \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_l = \beta_{kj}\boldsymbol{i}_j \cdot \beta_{lm}\boldsymbol{i}_m = \beta_{kj}\beta_{lm}\delta_{jm} = \beta_{kj}\beta_{lj}$$

$$\delta_{ij} = \boldsymbol{i}_i \cdot \boldsymbol{i}_j = \beta_{ki}\hat{\boldsymbol{e}}_k \cdot \beta_{lj}\hat{\boldsymbol{e}}_l = \beta_{ki}\beta_{lj}\delta_{kl} = \beta_{li}\beta_{lj}$$

即

$$\beta_{kj}\beta_{lj} = \delta_{kl} = \beta_{jk}\beta_{jl} \tag{1.14.6}$$

(1.14.6)式即说明矩阵 $\beta_{kj} = \alpha_{jk}$ 确为正交矩阵。

在正交曲线坐标中，位置矢量的微分 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 及其长度 $\mathrm{d}s$ 分别为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{e}_k\mathrm{d}x^k = H_k\mathrm{d}x^k\hat{\boldsymbol{e}}_k \tag{1.14.7a}$$

$$(\mathrm{d}s)^2 = (H_1\mathrm{d}x^1)^2 + (H_2\mathrm{d}x^2)^2 + (H_3\mathrm{d}x^3)^2 = (\mathrm{d}s_1)^2 + (\mathrm{d}s_2)^2 + (\mathrm{d}s_3)^2 \tag{1.14.7b}$$

其中

$$\mathrm{d}s_1 = H_1\mathrm{d}x^1,\quad \mathrm{d}s_2 = H_2\mathrm{d}x^2,\quad \mathrm{d}s_3 = H_3\mathrm{d}x^3 \tag{1.14.7c}$$

分别是沿坐标线方向对应 $\mathrm{d}x^1$、$\mathrm{d}x^2$、$\mathrm{d}x^3$ 的微弧长。

由式(1.14.5a)和复合函数求导的链锁法则，可得

$$\nabla = \boldsymbol{i}_1\frac{\partial}{\partial z^i} = \beta_{ki}\hat{\boldsymbol{e}}_k\frac{\partial}{\partial z^i} = \frac{1}{H_k}\frac{\partial z^i}{\partial x^k}\frac{\partial}{\partial z^i}\hat{\boldsymbol{e}}_k = \frac{1}{H_k}\frac{\partial}{\partial x^k}\hat{\boldsymbol{e}}_k \tag{1.14.8a}$$

如果采用如下的记号：

$$\hat{\nabla}_k = \frac{1}{H_k}\frac{\partial}{\partial x^k} = \frac{\partial}{\partial s^k}\quad (k = 1,2,3;\text{不求和}) \tag{1.14.8b}$$

则有

$$\nabla = \hat{\nabla}_k\hat{\boldsymbol{e}}_k,\quad \vec{\nabla} = \hat{\boldsymbol{e}}_k\hat{\vec{\nabla}}_k = \hat{\boldsymbol{e}}_k\frac{1}{H_k}\frac{\vec{\partial}}{\partial x^k},\quad \overleftarrow{\nabla} = \hat{\overleftarrow{\nabla}}_k\hat{\boldsymbol{e}}_k = \frac{1}{H_k}\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x^k}\hat{\boldsymbol{e}}_k \tag{1.14.8c}$$

式(1.14.8a)和式(1.14.8c)即是梯度算子∇在正交曲线坐标中的表达式，式(1.14.8b)给出了梯度算子∇在正交曲线坐标中的物理分量$\hat{\nabla}_k$(而不是其一般的张量分量)。

1.14.2 正交曲线坐标中单位基矢量对坐标的偏导数

当我们利用正交曲线坐标中的物理分量并在笛卡尔张量的理论框架之内进行有关方程的推导和运算时，正交曲线坐标中单位基矢量对坐标的偏导数具有极其重要的应用价值，故我们列出这些公式，并给以简要证明。公式为

$$\left[\frac{\partial \hat{e}_i}{\partial x^j}\right] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{H_2}\frac{\partial H_1}{\partial x^2}\hat{e}_2 - \frac{1}{H_3}\frac{\partial H_1}{\partial x^3}\hat{e}_3 & \frac{1}{H_1}\frac{\partial H_2}{\partial x^1}\hat{e}_2 & \frac{1}{H_1}\frac{\partial H_3}{\partial x^1}\hat{e}_3 \\ \frac{1}{H_2}\frac{\partial H_1}{\partial x^2}\hat{e}_1 & -\frac{1}{H_3}\frac{\partial H_2}{\partial x^3}\hat{e}_3 - \frac{1}{H_1}\frac{\partial H_2}{\partial x^1}\hat{e}_1 & \frac{1}{H_2}\frac{\partial H_3}{\partial x^2}\hat{e}_3 \\ \frac{1}{H_3}\frac{\partial H_1}{\partial x^3}\hat{e}_1 & \frac{1}{H_3}\frac{\partial H_2}{\partial x^3}\hat{e}_2 & -\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_3}{\partial x^1}\hat{e}_1 - \frac{1}{H_2}\frac{\partial H_3}{\partial x^2}\hat{e}_2 \end{bmatrix} \tag{1.14.9a}$$

证明 将$\hat{e}_i \cdot \hat{e}_k = \delta_{ik}$两边对$q_j$求导，可得

$$\frac{\partial \hat{e}_i}{\partial x^j} \cdot \hat{e}_k = -\frac{\partial \hat{e}_k}{\partial x^j} \cdot \hat{e}_i \quad (i = 1,2,3; j = 1,2,3; k = 1,2,3) \tag{1.14.10}$$

特别地，我们有

$$\frac{\partial \hat{e}_1}{\partial x^j} \cdot \hat{e}_1 = 0, \quad \frac{\partial \hat{e}_2}{\partial x^j} \cdot \hat{e}_2 = 0, \quad \frac{\partial \hat{e}_3}{\partial x^j} \cdot \hat{e}_3 = 0 \quad (j = 1,2,3) \tag{1.14.11}$$

$$\frac{\partial \hat{e}_1}{\partial x_j} \cdot \hat{e}_2 = -\frac{\partial \hat{e}_2}{\partial x_j} \cdot \hat{e}_1 \quad (j = 1,2,3) \tag{1.14.12}$$

由于位置矢量$\boldsymbol{r}$的2阶混合偏导数可以交换顺序：

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial x^1 \partial x^2} = \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial x^2 \partial x^1} \tag{1.14.13}$$

即

$$\frac{\partial}{\partial x^1}(H_2 \hat{e}_2) = \frac{\partial}{\partial x^2}(H_1 \hat{e}_1) \tag{1.14.14}$$

展开之，可得

$$H_2 \frac{\partial \hat{e}_2}{\partial x^1} + \frac{\partial H_2}{\partial x^1} \hat{e}_2 = H_1 \frac{\partial \hat{e}_1}{\partial x^2} + \frac{\partial H_1}{\partial x^2} \hat{e}_1 \tag{1.14.15}$$

(1.14.15)式两端点乘以 $\hat{e}_1$，得

$$H_2 \frac{\partial \hat{e}_2}{\partial x^1} \cdot \hat{e}_1 + \frac{\partial H_2}{\partial x^1} \hat{e}_2 \cdot \hat{e}_1 = H_1 \frac{\partial \hat{e}_1}{\partial x^2} \cdot \hat{e}_1 + \frac{\partial H_1}{\partial x^2} \hat{e}_1 \cdot \hat{e}_1 \tag{1.14.16}$$

由式(1.14.11)和式(1.14.12)，我们有

$$\frac{\partial \hat{e}_1}{\partial x^2} \cdot \hat{e}_1 = 0, \quad \frac{\partial \hat{e}_2}{\partial x^1} \cdot \hat{e}_1 = -\frac{\partial \hat{e}_1}{\partial x^1} \cdot \hat{e}_2 \tag{1.14.17}$$

故(1.14.16)式成为

$$\frac{\partial \hat{e}_1}{\partial x^1} \cdot \hat{e}_2 = -\frac{1}{H_2} \frac{\partial H_1}{\partial x^2} \tag{1.14.18a}$$

类似有

$$\frac{\partial \hat{e}_1}{\partial x^1} \cdot \hat{e}_3 = -\frac{1}{H_3} \frac{\partial H_1}{\partial x^3} \tag{1.14.18b}$$

利用式(1.14.11)，我们又有

$$\frac{\partial \hat{e}_1}{\partial x^1} \cdot \hat{e}_1 = 0 \tag{1.14.18c}$$

式(1.14.18a)、式(1.14.18b)、式(1.14.18c)即证明了式(1.14.9a)第一行的第一式。

同样，若把(1.14.15)式两端点乘以 $\hat{e}_2$，有

$$H_2 \frac{\partial \hat{e}_2}{\partial x^1} \cdot \hat{e}_2 + \frac{\partial H_2}{\partial x^1} \hat{e}_2 \cdot \hat{e}_2 = H_1 \frac{\partial \hat{e}_1}{\partial x^2} \cdot \hat{e}_2 + \frac{\partial H_1}{\partial x^2} \hat{e}_1 \cdot \hat{e}_2 \tag{1.14.19}$$

根据(1.14.11)式的第二式，上式中的第一项为0，故整理后可得

$$\frac{\partial \hat{e}_1}{\partial x^2} \cdot \hat{e}_2 = \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_2}{\partial x^1} \tag{1.14.20}$$

若把(1.14.15)式两端点乘以 $\hat{e}_3$，有

$$H_2 \frac{\partial \hat{e}_2}{\partial x^1} \cdot \hat{e}_3 + \frac{\partial H_2}{\partial x^1} \hat{e}_2 \cdot \hat{e}_3 = H_1 \frac{\partial \hat{e}_1}{\partial x^2} \cdot \hat{e}_3 + \frac{\partial H_1}{\partial x^2} \hat{e}_1 \cdot \hat{e}_3 \tag{1.14.21}$$

整理后有

$$\frac{\partial \hat{e}_1}{\partial x^2} \cdot \hat{e}_3 = \frac{H_2}{H_1} \frac{\partial \hat{e}_2}{\partial x^1} \cdot \hat{e}_3 \tag{1.14.22a}$$

对(1.14.22)式中的1、2、3进行圆轮转换，我们可得如下两式：

$$\frac{\partial \hat{e}_2}{\partial x^3} \cdot \hat{e}_1 = \frac{H_3}{H_2} \frac{\partial \hat{e}_3}{\partial x^2} \cdot \hat{e}_1 \tag{1.14.22b}$$

$$\frac{\partial \hat{e}_3}{\partial x^1} \cdot \hat{e}_2 = \frac{H_1}{H_3} \frac{\partial \hat{e}_1}{\partial x^3} \cdot \hat{e}_2 \tag{1.14.22c}$$

利用式(1.14.22)的各式和式(1.14.10),我们可有

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{e}_1}{\partial x^2} \cdot \hat{e}_3 &= \frac{H_2}{H_1} \frac{\partial \hat{e}_2}{\partial x^1} \cdot \hat{e}_3 = -\frac{H_2}{H_1} \frac{\partial \hat{e}_3}{\partial x^1} \cdot \hat{e}_2 = -\frac{H_2}{H_1} \frac{H_1}{H_3} \frac{\partial \hat{e}_1}{\partial x^3} \cdot \hat{e}_2 \\ &= \frac{H_2}{H_3} \frac{\partial \hat{e}_2}{\partial x^3} \cdot \hat{e}_1 = \frac{H_2}{H_3} \frac{H_3}{H_2} \frac{\partial \hat{e}_3}{\partial x^2} \cdot \hat{e}_1 = -\frac{\partial \hat{e}_1}{\partial x^2} \cdot \hat{e}_3 \end{aligned}$$

由该式可见:

$$\frac{\partial \hat{e}_1}{\partial x^2} \cdot \hat{e}_3 = 0 \tag{1.14.23}$$

由式(1.14.11)、式(1.14.20)和式(1.14.23)我们即证明了式(1.14.9a)第一行的第二式。

式(1.14.9a)第一行的第三式可与第二式类似证明之,把其中的指标 2 改为 3 即可。

式(1.14.9a)第二行和第三行的各式可由第一行通过对 1、2、3 的圆轮转换而得到。

证毕。

由式(1.14.9a)可以立即得出以下各式:

$$\left\{\begin{aligned} \left[\hat{e}_1 \cdot \frac{\partial \hat{e}_i}{\partial x^j}\right] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{H_2}\frac{\partial H_1}{\partial x^2} & -\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_2}{\partial x^1} & 0 \\ \frac{1}{H_3}\frac{\partial H_1}{\partial x^3} & 0 & -\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_3}{\partial x^1} \end{bmatrix} \\ \left[\hat{e}_2 \cdot \frac{\partial \hat{e}_i}{\partial x^j}\right] &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{H_2}\frac{\partial H_1}{\partial x^2} & \frac{1}{H_1}\frac{\partial H_2}{\partial x^1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{H_3}\frac{\partial H_2}{\partial x^3} & -\frac{1}{H_2}\frac{\partial H_3}{\partial x^2} \end{bmatrix} \\ \left[\hat{e}_3 \cdot \frac{\partial \hat{e}_i}{\partial x^j}\right] &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{H_3}\frac{\partial H_1}{\partial x^3} & 0 & \frac{1}{H_1}\frac{\partial H_3}{\partial x^1} \\ 0 & -\frac{1}{H_3}\frac{\partial H_2}{\partial x^3} & \frac{1}{H_2}\frac{\partial H_3}{\partial x^2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}\right. \tag{1.14.9b}$$

有时为了书写紧凑起见，人们也常常把(1.14.9a)式和 (1.14.9b)式分别写为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \hat{e}_i}{\partial x^i} = \dfrac{1}{H_j}\dfrac{\partial H_i}{\partial x^j}\hat{e}_j - \dfrac{1}{H_k}\dfrac{\partial H_i}{\partial x^k}\hat{e}_k & (i、j、k \text{ 互不相等,不求和}) \\ \dfrac{\partial \hat{e}_i}{\partial x^j} = \dfrac{1}{H_i}\dfrac{\partial H_j}{\partial x^i}\hat{e}_j & (i \neq j) \end{cases} \tag{1.14.9c}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \hat{e}_i}{\partial x^i}\cdot\hat{e}_i = 0 \ (\text{不求和}), & \dfrac{\partial \hat{e}_i}{\partial x^i}\cdot\hat{e}_j = -\dfrac{1}{H_j}\dfrac{\partial H_i}{\partial x^j} \ (i \neq j,\text{不求和}) \\ \dfrac{\partial \hat{e}_i}{\partial x^j}\cdot\hat{e}_j = \dfrac{1}{H_i}\dfrac{\partial H_j}{\partial x^i} \ (i \neq j,\text{不求和}), & \dfrac{\partial \hat{e}_i}{\partial x^j}\cdot\hat{e}_k = 0 \ (i、j、k \text{ 互不相等}) \end{cases} \tag{1.14.9d}$$

1.14.3 柱坐标和球坐标

最常用的正交曲线坐标是柱坐标和球坐标，下面我们列出相应的公式。

1. 柱坐标$(\rho,\theta,z)=(x^1,x^2,x^3)$

柱坐标和直角笛卡尔坐标的关系是

$$z^1 = x^1\cos x^2,\quad z^2 = x^1\sin x^2,\quad z^3 = x^3 \tag{1.14.24a}$$

$$x^1 = \sqrt{(z^1)^2+(z^2)^2},\quad x^2 = \arctan\frac{z^2}{z^1},\quad x^3 = z^3 \tag{1.14.24b}$$

故容易得到以下各式：

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}_1 = \dfrac{\partial z^m}{\partial x^1}\boldsymbol{i}_m = (\cos x^2)\boldsymbol{i}_1 + (\sin x^2)\boldsymbol{i}_2 \\ \boldsymbol{e}_2 = \dfrac{\partial z^m}{\partial x^2}\boldsymbol{i}_m = -x^1(\sin x^2)\boldsymbol{i}_1 + x^1(\cos x^2)\boldsymbol{i}_2 \\ \boldsymbol{e}_3 = \dfrac{\partial z^m}{\partial x^3}\boldsymbol{i}_m = \boldsymbol{i}_3 \end{cases} \tag{1.14.24c}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}^1 = \dfrac{\partial x^1}{\partial z^m}\boldsymbol{i}^m = (\cos x^2)\boldsymbol{i}^1 + (\sin x^2)\boldsymbol{i}^2 \\ \boldsymbol{e}^2 = \dfrac{\partial x^2}{\partial z^m}\boldsymbol{i}^m = -\dfrac{1}{x^1}(\sin x^2)\boldsymbol{i}^1 + \dfrac{1}{x^1}(\cos x^2)\boldsymbol{i}^2 \\ \boldsymbol{e}^3 = \dfrac{\partial x^3}{\partial z^m}\boldsymbol{i}^m = \boldsymbol{i}^3 \end{cases} \tag{1.14.24d}$$

$$[g_{ij}]=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & (x^1)^2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\quad [g^{ij}]=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & (x^1)^{-2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \tag{1.14.24e}$$

$$[\Gamma^1_{ij}]=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & -x^1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},\quad [\Gamma^2_{ij}]=\begin{bmatrix}0 & \dfrac{1}{x^1} & 0\\ \dfrac{1}{x^1} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},\quad [\Gamma^3_{ij}]=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \tag{1.14.24f}$$

$$H_1=1,\quad H_2=x^2,\quad H_3=1 \tag{1.14.25}$$

$$\hat{\boldsymbol{e}}_1=\frac{1}{H_1}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^1}=(\cos x^2)\boldsymbol{i}_1+(\sin x^2)\boldsymbol{i}_2 \tag{1.14.26a}$$

$$\hat{\boldsymbol{e}}_2=\frac{1}{H_2}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^2}=-(\sin x^2)\boldsymbol{i}_1+(\cos x^2)\boldsymbol{i}_2 \tag{1.14.26b}$$

$$\hat{\boldsymbol{e}}_3=\frac{1}{H_3}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^3}=\boldsymbol{i}_3 \tag{1.14.26c}$$

$$[\beta_{ij}]=[\hat{\boldsymbol{e}}_i\cdot\boldsymbol{i}_i]=\left[\frac{1}{H_j}\frac{\partial z^i}{\partial x^j}\right]=\begin{bmatrix}\cos x^2 & \sin x^2 & 0\\ -\sin x^2 & \cos x^2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \tag{1.14.26d}$$

将式(1.14.25)代入式(1.14.9),即有

$$\left[\frac{\partial \hat{\boldsymbol{e}}_i}{\partial x^j}\right]=\begin{bmatrix}\boldsymbol{0} & \hat{\boldsymbol{e}}_2 & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & -\hat{\boldsymbol{e}}_1 & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\end{bmatrix} \tag{1.14.27}$$

2. 球坐标$(r,\theta,\varphi)=(x^1,x^2,x^3)$

球坐标和直角笛卡尔坐标的关系是

$$z^1=x^1\sin x^2\cos x^3,\quad z^2=x^1\sin x^2\sin x^3,\quad z^3=x^1\cos x^2 \tag{1.14.28a}$$

$$x^1=\sqrt{(z^1)^2+(z^2)^2+(z^3)^2},\quad x^2=\arctan\frac{\sqrt{(z^1)^2+(z^2)^2}}{z^3},$$

$$x^3=\arctan\frac{z^2}{z^1} \tag{1.14.28b}$$

故容易得到以下各式:

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}_1 = \dfrac{\partial z^m}{\partial x^1}\boldsymbol{i}_m = (\sin x^2)(\cos x^3)\boldsymbol{i}_1 + (\sin x^2)(\cos x^3)\boldsymbol{i}_2 + (\cos x^2)\boldsymbol{i}_3 \\ \boldsymbol{e}_2 = \dfrac{\partial z^m}{\partial x^2}\boldsymbol{i}_m = x^1(\cos x^2)(\cos x^3)\boldsymbol{i}_1 + x^1(\cos x^2)(\sin x^3)\boldsymbol{i}_2 - (\sin x^2)\boldsymbol{i}_3 \\ \boldsymbol{e}_3 = \dfrac{\partial z^m}{\partial x^3}\boldsymbol{i}_m = -x^1(\sin x^2)(\sin x^3)\boldsymbol{i}_1 + x^1(\sin x^2)(\cos x^3)\boldsymbol{i}_2 \end{cases} \tag{1.14.28c}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}^1 = \dfrac{\partial x^1}{\partial z^m}\boldsymbol{i}_m = (\sin x^2)(\cos x^3)\boldsymbol{i}^1 + (\sin x^2)(\sin x^3)\boldsymbol{i}^2 + (\cos x^2)\boldsymbol{i}^3 \\ \boldsymbol{e}^2 = \dfrac{\partial x^2}{\partial z^m}\boldsymbol{i}^m = \dfrac{1}{x^1}(\cos x^2)(\cos x^3)\boldsymbol{i}^1 + \dfrac{1}{x^1}(\cos x^2)(\sin x^3)\boldsymbol{i}^2 - \dfrac{1}{x^1}(\sin x^2)\boldsymbol{i}^3 \\ \boldsymbol{e}^3 = \dfrac{\partial x^3}{\partial z^m}\boldsymbol{i}^m = -\dfrac{1}{x^1}\dfrac{\sin x^3}{\sin x^2}\boldsymbol{i}^1 + \dfrac{1}{x^1}\dfrac{\cos x^3}{\sin x^2}\boldsymbol{i}^2 \end{cases} \tag{1.14.28d}$$

$$[g_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (x^1)^2 & 0 \\ 0 & 0 & (x^1\sin x^2)^2 \end{bmatrix}, \quad [g^{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (x^1)^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & (x^1\sin x^2)^{-2} \end{bmatrix} \tag{1.14.28e}$$

$$\begin{cases} [\Gamma^1_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -x^1 & 0 \\ 0 & 0 & -x^1\sin^2 x^2 \end{bmatrix}, \quad [\Gamma^2_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{1}{x^1} & 0 \\ \dfrac{1}{x^1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sin x^2\cos x^2 \end{bmatrix} \\ [\Gamma^3_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dfrac{1}{x^1} \\ 0 & 0 & \operatorname{ctan} x^2 \\ \dfrac{1}{x^1} & \operatorname{ctan} x^2 & 0 \end{bmatrix} \end{cases} \tag{1.14.28f}$$

$$H_1 = 1, \quad H_2 = x^1, \quad H_3 = x^1\sin x^2 \tag{1.14.29}$$

$$\hat{\boldsymbol{e}}_1 = \frac{1}{H_1}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^1} = (\sin x^2)(\cos x^3)\boldsymbol{i}_1 + (\sin x^2)(\sin x^3)\boldsymbol{i}_2 + (\cos x^2)\boldsymbol{i}_3 \tag{1.14.30a}$$

$$\hat{\boldsymbol{e}}_2 = \frac{1}{H_2}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^1} = (\cos x^2)(\cos x^3)\boldsymbol{i}_1 + (\cos x^2)(\sin x^3)\boldsymbol{i}_2 - (\sin x^2)\boldsymbol{i}_3 \tag{1.14.30b}$$

$$\hat{e}_3 = \frac{1}{H_3}\frac{\partial r}{\partial x^3} = -(\sin x^3)i_1 + (\cos x^3)i_2 \qquad (1.14.30c)$$

$$[\beta_{ij}] = [\hat{e}_i \cdot i_j] = \left[\frac{1}{H_1}\frac{\partial z^i}{\partial x^j}\right] = \begin{bmatrix} (\sin x^2)(\cos x^3) & (\sin x^2)(\sin x^3) & (\cos x^2) \\ (\cos x^2)(\cos x^3) & (\cos x^2)(\sin x^3) & -(\sin x^2) \\ -(\sin x^3) & (\cos x^3) & 0 \end{bmatrix} \qquad (1.14.30d)$$

将式(1.14.29)代入式(1.14.9)，即有

$$\left[\frac{\partial \hat{e}_i}{\partial x^j}\right] = \begin{bmatrix} 0 & \hat{e}_2 & (\sin x^2)\hat{e}_3 \\ 0 & -\hat{e}_1 & (\cos x^2)\hat{e}_3 \\ 0 & 0 & -(\sin x^2)\hat{e}_1 - (\cos x^2)\hat{e}_2 \end{bmatrix} \qquad (1.14.31)$$

作为练习，读者可尝试求出标量 φ、矢量 $\boldsymbol{v}$、2 阶张量 $\boldsymbol{T}$ 的梯度、散度及旋度的张量分量表达式以及它们在柱坐标和球坐标中物理分量的表达式。

1.14.4 正交曲线坐标中常用的一些张量公式

由于在正交曲线坐标中按不同方法所定义的张量的各种物理分量是相同的，为了记号的简单起见，我们将以 $\hat{v}_i$、$\hat{T}_{ij}$ 等来表示矢量和 2 阶张量在正交曲线坐标中的物理分量。利用各阶张量在正交曲线坐标中以物理分量表达的直接记法、正交曲线坐标中单位基矢量对坐标偏导数的公式(1.14.9)式以及正交曲线坐标中的梯度算子公式(1.14.8)式，我们可以得出以下一些常用的张量公式，读者可作为练习证明之。

1. 标量 Φ 的梯度

$$\mathrm{grad}\Phi = \vec{\nabla}\Phi = (\hat{e}_i \hat{\vec{\nabla}}_i)\Phi = \left(\hat{e}_i \frac{1}{H_i}\frac{\vec{\partial}}{\partial x^i}\right)\Phi = \frac{\hat{e}_i}{H_i}\frac{\partial \Phi}{\partial x^i} \qquad (1.14.32)$$

2. 矢量 $\boldsymbol{v}$ 的梯度

$$\begin{aligned}\mathrm{grad}\boldsymbol{v} &\equiv \boldsymbol{v}\overleftarrow{\nabla} = (\hat{v}_i\hat{e}_i)(\hat{\overleftarrow{\nabla}}_j\hat{e}_j) = (\hat{v}_i\hat{e}_i)\left(\frac{1}{H_j}\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x^j}\hat{e}_j\right) \\ &= \frac{1}{H_j}\frac{\partial \hat{v}_i}{\partial x^j}\hat{e}_i\hat{e}_j + \hat{v}_i\frac{1}{H_j}\frac{\partial \hat{e}_i}{\partial x^j}\hat{e}_j = \frac{1}{H_j}\frac{\partial \hat{v}_i}{\partial x^j}\hat{e}_i\hat{e}_j + \left[\frac{\hat{v}_k}{H_j}\frac{\partial \hat{e}_k}{\partial x^j}\cdot\hat{e}_i\right]\hat{e}_i\hat{e}_j\end{aligned}$$

此式即是 $\mathrm{grad}\boldsymbol{v}$ 在基并矢 $\hat{e}_i\hat{e}_j$ 上的分解式，对$(i,j)=(1,1)$，$(i,j)=(1,2)$，$(i,j)=(1,3)$，…的不同选择，分别利用式(1.14.9)之后，即可得到

$$\mathrm{grad}\boldsymbol{v}\equiv\boldsymbol{v}\overleftarrow{\nabla}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{1}{H_1}\frac{\partial\hat{v}_1}{\partial x^1}+\left[\frac{\hat{v}_2}{H_2}\frac{\partial H_1}{\partial x^2}+\frac{\hat{v}_3}{H_3}\frac{\partial H_1}{\partial x^3}\right]\frac{1}{H_1} & \frac{1}{H_2}\frac{\partial\hat{v}_1}{\partial x^2}-\frac{\hat{v}_2}{H_2H_1}\frac{\partial H_2}{\partial x^1} & \frac{1}{H_3}\frac{\partial\hat{v}_1}{\partial x^3}-\frac{\hat{v}_3}{H_3H_1}\frac{\partial H_3}{\partial x^1}\\ \frac{1}{H_1}\frac{\partial\hat{v}_2}{\partial x^1}-\frac{\hat{v}_1}{H_1H_2}\frac{\partial H_1}{\partial x^2} & \frac{1}{H_2}\frac{\partial\hat{v}_2}{\partial x^2}+\left[\frac{\hat{v}_3}{H_3}\frac{\partial H_2}{\partial x^3}+\frac{\hat{v}_1}{H_1}\frac{\partial H_2}{\partial x^1}\right]\frac{1}{H_2} & \frac{1}{H_3}\frac{\partial\hat{v}_2}{\partial x^3}-\frac{\hat{v}_3}{H_3H_2}\frac{\partial H_3}{\partial x^2}\\ \frac{1}{H_1}\frac{\partial\hat{v}_3}{\partial x^1}-\frac{\hat{v}_1}{H_1H_3}\frac{\partial H_1}{\partial x^3} & \frac{1}{H_2}\frac{\partial\hat{v}_3}{\partial x^2}-\frac{\hat{v}_2}{H_2H_3}\frac{\partial H_2}{\partial x^3} & \frac{1}{H_3}\frac{\partial\hat{v}_3}{\partial x^3}+\left[\frac{\hat{v}_1}{H_1}\frac{\partial H_3}{\partial x^1}+\frac{\hat{v}_2}{H_2}\frac{\partial H_3}{\partial x^2}\right]\frac{1}{H_3}\end{bmatrix}\tag{1.14.33a}$$

对矢量 $\boldsymbol{v}$ 的左梯度 $\overrightarrow{\nabla}\boldsymbol{v}$，我们有

$$\overrightarrow{\nabla}\boldsymbol{v}=(\boldsymbol{v}\overleftarrow{\nabla})^{\mathrm{T}}\tag{1.14.33b}$$

同时我们又有

$$\boldsymbol{v}\cdot(\overrightarrow{\nabla}\boldsymbol{v})=(\boldsymbol{v}\overleftarrow{\nabla})\cdot\boldsymbol{v}=(\boldsymbol{v}\overleftarrow{\nabla})_{ij}\hat{\boldsymbol{e}}_i\hat{\boldsymbol{e}}_j\cdot\hat{\boldsymbol{e}}_k\hat{v}_k=(\boldsymbol{v}\overleftarrow{\nabla})_{ij}\hat{v}_j\hat{\boldsymbol{e}}_i$$

$$=\left[(\boldsymbol{v}\overleftarrow{\nabla})_{i1}\hat{v}_1+(\boldsymbol{v}\overleftarrow{\nabla})_{i2}\hat{v}_2+(\boldsymbol{v}\overleftarrow{\nabla})_{i3}\hat{v}_3\right]\hat{\boldsymbol{e}}_i$$

该式即是矢量 $\boldsymbol{v}\cdot(\overrightarrow{\nabla}\boldsymbol{v})=(\boldsymbol{v}\overleftarrow{\nabla})\cdot\boldsymbol{v}$ 在基矢 $\hat{\boldsymbol{e}}_i$ 上的分解式。例如对 $i=1$，在利用式(1.14.33a)之后，可有

$$\left[\boldsymbol{v}\cdot(\overrightarrow{\nabla}\boldsymbol{v})\right]_1=\left[(\boldsymbol{v}\overleftarrow{\nabla})\cdot\boldsymbol{v}\right]_1=\left[(\boldsymbol{v}\overleftarrow{\nabla})_{11}\hat{v}_1+(\boldsymbol{v}\overleftarrow{\nabla})_{12}\hat{v}_2+(\boldsymbol{v}\overleftarrow{\nabla})_{13}\hat{v}_3\right]$$

$$=\frac{\hat{v}_1}{H_1}\left[\frac{\partial\hat{v}_1}{\partial x^1}+\frac{\hat{v}_2}{H_2}\frac{\partial H_1}{\partial x^2}+\frac{\hat{v}_3}{H_3}\frac{\partial H_1}{\partial x^3}\right]+\frac{\hat{v}_2}{H_2}\left[\frac{\partial\hat{v}_1}{\partial x^2}-\frac{\hat{v}_2}{H_1}\frac{\partial H_2}{\partial x^1}\right]$$

$$+\frac{\hat{v}_3}{H_3}\left[\frac{\partial\hat{v}_1}{\partial x^3}-\frac{\hat{v}_3}{H_1}\frac{\partial H_3}{\partial x^1}\right]\tag{1.14.34}$$

对其另外两个分量，则可由式(1.14.34)通过对1、2、3的圆轮转换而得到。当 $\boldsymbol{v}$ 为质点速度并对其以正交曲线坐标给出其E氏描述时，此式即是质点迁移加速度分量的表达式(参见2.1节中对介质运动的E氏描述说明及相应的公式(2.1.9)式)。

3. 矢量 $\boldsymbol{v}$ 的散度

$$\mathrm{div}\boldsymbol{v}\equiv\boldsymbol{v}\cdot\overleftarrow{\nabla}=\overrightarrow{\nabla}\cdot\boldsymbol{v}=(\hat{\boldsymbol{e}}_j\overrightarrow{\hat{\nabla}}_j)\cdot(\hat{v}_i\hat{\boldsymbol{e}}_i)=\hat{\boldsymbol{e}}_j\cdot\frac{1}{H_j}\frac{\partial\hat{v}_i\hat{\boldsymbol{e}}_i}{\partial x^j}$$

$$=\hat{\boldsymbol{e}}_j\cdot\hat{\boldsymbol{e}}_i\frac{1}{H_j}\frac{\partial\hat{v}_i}{\partial x^j}+\hat{v}_i\hat{\boldsymbol{e}}_j\cdot\frac{1}{H_j}\frac{\partial\hat{\boldsymbol{e}}_i}{\partial x^j}=\frac{1}{H_j}\frac{\partial\hat{v}_j}{\partial x^j}+\frac{\hat{v}_i}{H_j}\hat{\boldsymbol{e}}_j\cdot\frac{\partial\hat{\boldsymbol{e}}_i}{\partial x^j}$$

在利用单位基矢量对坐标偏导数的公式(1.14.9)式之后，即有

$$\mathrm{div}\boldsymbol{v}=\frac{1}{H_1H_2H_3}\left[\frac{\partial(\hat{v}_1H_2H_3)}{\partial x^1}+\frac{\partial(\hat{v}_2H_3H_1)}{\partial x^2}+\frac{\partial(\hat{v}_3H_1H_2)}{\partial x^3}\right]\tag{1.14.35a}$$

如采用记号

$$V = H_1 H_2 H_3 \tag{1.14.35b}$$

则(1.14.35a)式也可以更紧凑地写为

$$\mathrm{div}\boldsymbol{v} = \frac{1}{V}\left[\frac{\partial(\hat{v}_i V)}{H_i \partial x^i}\right] \tag{1.14.35c}$$

4. 矢量 $\boldsymbol{v}$ 的旋度

$$\begin{aligned}
\mathrm{rot}\boldsymbol{v} &= \vec{\nabla} \times \boldsymbol{v} = (\hat{\boldsymbol{e}}_k \vec{\nabla}_k) \times (\hat{v}_i \hat{\boldsymbol{e}}_i) = \left(\hat{\boldsymbol{e}}_k \frac{1}{H_k} \frac{\vec{\partial}}{\partial x^k}\right) \times (\hat{v}_i \hat{\boldsymbol{e}}_i) \\
&= \hat{\boldsymbol{e}}_k \times \hat{\boldsymbol{e}}_i \frac{1}{H_k} \frac{\partial \hat{v}_i}{\partial x^k} + \frac{\hat{v}_i}{H_k} \hat{\boldsymbol{e}}_k \times \frac{\partial \hat{\boldsymbol{e}}_i}{\partial x^k} \\
&= e_{kij} \frac{1}{H_k} \frac{\partial \hat{v}_i}{\partial x^k} \hat{\boldsymbol{e}}_j + \left[\left(\frac{\hat{v}_i}{H_k} \hat{\boldsymbol{e}}_k \times \frac{\partial \hat{\boldsymbol{e}}_i}{\partial x^k}\right) \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_j\right] \hat{\boldsymbol{e}}_j
\end{aligned}$$

此式即是矢量 $\mathrm{rot}\boldsymbol{v}$ 在基矢 $\hat{\boldsymbol{e}}_j$ 上的分解式。在利用单位基矢量对坐标偏导数的公式(1.14.9)式之后，将其展开，即可得

$$\begin{aligned}
\mathrm{rot}\boldsymbol{v} = &\left[\frac{1}{H_2} \frac{\partial \hat{v}_3}{\partial x^2} - \frac{1}{H_3} \frac{\partial \hat{v}_2}{\partial x^3} + \frac{\hat{v}_3}{H_2 H_3} \frac{\partial H_3}{\partial x^2} - \frac{\hat{v}_2}{H_3 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial x^3}\right] \hat{\boldsymbol{e}}_1 \\
&+ \left[\frac{1}{H_3} \frac{\partial \hat{v}_1}{\partial x^3} - \frac{1}{H_1} \frac{\partial \hat{v}_3}{\partial x^1} + \frac{\hat{v}_1}{H_3 H_1} \frac{\partial H_1}{\partial x^3} - \frac{\hat{v}_3}{H_1 H_3} \frac{\partial H_3}{\partial x^1}\right] \hat{\boldsymbol{e}}_2 \\
&+ \left[\frac{1}{H_1} \frac{\partial \hat{v}_2}{\partial x^1} - \frac{1}{H_2} \frac{\partial \hat{v}_1}{\partial x^2} + \frac{\hat{v}_2}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial x^1} - \frac{\hat{v}_1}{H_2 H_1} \frac{\partial H_1}{\partial x^2}\right] \hat{\boldsymbol{e}}_3
\end{aligned} \tag{1.14.36a}$$

或

$$\begin{aligned}
\mathrm{rot}\boldsymbol{v} = &\frac{1}{H_2 H_3}\left[\frac{\partial(\hat{v}_3 H_3)}{\partial x^2} - \frac{\partial(\hat{v}_2 H_2)}{\partial x^3}\right] \hat{\boldsymbol{e}}_1 + \frac{1}{H_3 H_1}\left[\frac{\partial(\hat{v}_1 H_1)}{\partial x^3} - \frac{\partial(\hat{v}_3 H_3)}{\partial x^1}\right] \hat{\boldsymbol{e}}_2 \\
&+ \frac{1}{H_1 H_2}\left[\frac{\partial(\hat{v}_2 H_2)}{\partial x^1} - \frac{\partial(\hat{v}_1 H_1)}{\partial x^2}\right] \hat{\boldsymbol{e}}_3
\end{aligned} \tag{1.14.36b}$$

$$\boldsymbol{v} \times \overleftarrow{\nabla} = -(\vec{\nabla} \times \boldsymbol{v}) \tag{1.14.36c}$$

5. 标量 Φ 的 Laplacian 算子

$$\begin{aligned}
\Delta\Phi &= (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla})\Phi = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla}\Phi) = \mathrm{div}(\mathrm{grad}\Phi) \\
&= \frac{1}{V} \frac{\partial}{\partial x^i}\left[\frac{V}{H_i}(\mathrm{grad}\Phi)_i\right] = \frac{1}{V} \frac{\partial}{\partial x^i}\left[\frac{V}{H_i} \frac{1}{H_i} \frac{\partial \Phi}{\partial x^i}\right]
\end{aligned} \tag{1.14.37}$$

这里我们利用了矢量散度的公式(1.14.35c)式以及标量梯度的公式(1.14.32)式。

6. 二阶张量 T 的散度

在这里我们先写出 T 的左散度：

$$\vec{\nabla}\cdot\boldsymbol{T}=\left(\frac{\hat{\boldsymbol{e}}_k}{H_k}\frac{\vec{\partial}}{\partial x^k}\right)\cdot(\hat{T}_{ij}\hat{\boldsymbol{e}}_i\hat{\boldsymbol{e}}_j)$$

$$=\left(\frac{\hat{\boldsymbol{e}}_k\cdot\hat{\boldsymbol{e}}_i}{H_k}\frac{\partial\hat{T}_{ij}}{\partial x^k}\right)\hat{\boldsymbol{e}}_j+\left(\frac{\hat{\boldsymbol{e}}_k\hat{T}_{ij}}{H_k}\cdot\frac{\partial\hat{\boldsymbol{e}}_i}{\partial x^k}\right)\hat{\boldsymbol{e}}_j+\left(\frac{\hat{\boldsymbol{e}}_k\hat{T}_{ij}}{H_k}\cdot\hat{\boldsymbol{e}}_i\frac{\partial\hat{\boldsymbol{e}}_j}{\partial x^k}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{H_i}\frac{\partial\hat{T}_{ij}}{\partial x^i}\right)\hat{\boldsymbol{e}}_j+\left(\frac{\hat{T}_{ij}}{H_k}\hat{\boldsymbol{e}}_k\cdot\frac{\partial\hat{\boldsymbol{e}}_i}{\partial x^k}\right)\hat{\boldsymbol{e}}_j+\left(\frac{\hat{T}_{ij}}{H_i}\frac{\partial\hat{\boldsymbol{e}}_j}{\partial x^i}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{H_i}\frac{\partial\hat{T}_{ij}}{\partial x^i}\right)\hat{\boldsymbol{e}}_j+\left(\frac{\hat{T}_{ij}}{H_k}\hat{\boldsymbol{e}}_k\cdot\frac{\partial\hat{\boldsymbol{e}}_i}{\partial x^k}\right)\hat{\boldsymbol{e}}_j+\left(\frac{\hat{T}_{ik}}{H_i}\frac{\partial\hat{\boldsymbol{e}}_k}{\partial x^i}\cdot\hat{\boldsymbol{e}}_j\right)\hat{\boldsymbol{e}}_j$$

该式就是矢量$\vec{\nabla}\cdot\boldsymbol{T}$ 在基矢 $\hat{\boldsymbol{e}}_j$ 上的分解式。对 $j=1$，有

$$[\vec{\nabla}\cdot\boldsymbol{T}]_1=\frac{1}{H_i}\frac{\partial\hat{T}_{i1}}{\partial x^i}+\frac{\hat{T}_{i1}}{H_k}\hat{\boldsymbol{e}}_k\cdot\frac{\partial\hat{\boldsymbol{e}}_i}{\partial x^k}+\frac{\hat{T}_{ik}}{H_i}\frac{\partial\hat{\boldsymbol{e}}_k}{\partial x^i}\cdot\hat{\boldsymbol{e}}_1 \tag{1.14.38a}$$

在利用单位矢量对坐标偏导数的公式(1.14.9)式之后，式(1.14.38a)即可化为

$$[\vec{\nabla}\cdot\boldsymbol{T}]_1=\frac{1}{H_1H_2H_3}\left[\frac{\partial}{\partial x^1}(H_2H_3\hat{T}_{11})+\frac{\partial}{\partial x^2}(H_3H_1\hat{T}_{21})+\frac{\partial}{\partial x^3}(H_1H_2\hat{T}_{31})\right]$$
$$+\frac{\hat{T}_{12}}{H_1H_2}\frac{\partial H_1}{\partial x^2}+\frac{\hat{T}_{13}}{H_1H_3}\frac{\partial H_1}{\partial x^3}-\frac{\hat{T}_{22}}{H_2H_1}\frac{\partial H_2}{\partial x^1}-\frac{\hat{T}_{33}}{H_3H_1}\frac{\partial H_3}{\partial x^1} \tag{1.14.38b}$$

至于$\vec{\nabla}\cdot\boldsymbol{T}$ 的另外两个分量，可以由(1.14.38b)式通过 1、2、3 的圆轮转换而得到。

2 阶张量 T 的右散度 $\boldsymbol{T}\cdot\overleftarrow{\nabla}$ 则为

$$\mathrm{div}\boldsymbol{T}\equiv\boldsymbol{T}\cdot\overleftarrow{\nabla}=\vec{\nabla}\cdot\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}} \tag{1.14.38c}$$

7. 矢量 $\boldsymbol{v}$ 的 Laplacian 算子

$$\Delta\boldsymbol{v}=(\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla})\boldsymbol{v}=\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\boldsymbol{v}) \tag{1.14.39}$$

只要在此式中取 $\boldsymbol{T}=\vec{\nabla}\boldsymbol{v}$，并利用矢量梯度的公式(1.14.33)式和 2 阶张量 T 的散度公式(1.14.38)式，我们即可求出 $\Delta\boldsymbol{v}$。

8. 2 阶张量 T 的旋度

关于 2 阶张量 T 的旋度 $\mathrm{rot}\boldsymbol{T}\equiv\vec{\nabla}\times\boldsymbol{T}$，尽管运算比较繁杂，但并没有原则上的困难，我们不再列出具体公式，读者可作为练习推导之。

1.15 几类空间简介

1.15.1 仿射联络空间

若在 n 维实数域空间 R^n 中的每一点 $M(x^i)$ 处定义一组 3 阶系统 $\Gamma_{ij}^k(i=1,2,3;j=1,2,3;k=1,2,3)$，在坐标变换 $\bar{x}^i=\bar{x}^i(x^j)$ 之下 Γ_{ij}^k 按下列规律变化：

$$\bar{\Gamma}_{ij}^k=\frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^n}\Gamma_{lm}^n+\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^l}\frac{\partial^2 x^l}{\partial \bar{x}^j \partial \bar{x}^i} \tag{1.15.1}$$

且 Γ_{ij}^k 是连续可微的，则称空间 R^n 为仿射联络空间，一般记为 L^n。Γ_{ij}^k 称为仿射联络系数，它不是 3 阶张量，对下标 i、j 也不一定对称。但显然我们易证，3 阶量

$$T_{ij}^k=\Gamma_{ij}^k-\Gamma_{ji}^k \tag{1.15.2}$$

确实是 3 阶张量，我们称 T_{ij}^k 为仿射联络空间 L^n 的挠率张量。特别地，如果空间 L^n 的挠率张量处处为 0，则其仿射联络系数对下标便是对称的，反之亦然，即

$$T_{ij}^k=0,\quad T_{ij}^k=\Gamma_{ij}^k-\Gamma_{ji}^k=0 \tag{1.15.3}$$

此时我们称空间 L^n 为无挠率的仿射联络空间，通常记为 L_0^n。

1.15.2 黎曼空间

若在 n 维实数域空间 R^n 中的每一点 $M(x^i)$ 处定义一组正定的 2 阶对称系统 $g_{ij}=g_{ji}$，使得相邻两点 x^i 和 $x^i+\mathrm{d}x^i$ 的距离 $\mathrm{d}s$ 由如下的正定二次型所确定：

$$\mathrm{d}s^2=g_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j \tag{1.15.4}$$

则称空间 R^n 为黎曼(Riemann)空间，通常记为 V^n。在一对一的可逆变换 $\bar{x}^i=\bar{x}^i(x^j)$ 下，$\mathrm{d}s^2$ 为不变量，即

$$\mathrm{d}\bar{s}^2=\bar{g}_{ij}\mathrm{d}\bar{x}^i\mathrm{d}\bar{x}^j=\mathrm{d}s^2=g_{kl}\mathrm{d}x^k\mathrm{d}x^l=g_{kl}\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^j}\mathrm{d}\bar{x}^i\mathrm{d}\bar{x}^j \tag{1.15.5}$$

由 $\mathrm{d}\bar{x}^i$ 的任意性和 $\bar{g}_{ij}$ 的对称性，容易证明(参见 1.5 节定理 4)：

$$\bar{g}_{ij}=g_{kl}\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^j} \tag{1.15.6}$$

式(1.15.6)说明：2 阶对称系统 g_{ij} 为 2 阶协变张量，称之为黎曼(Riemann)空间度量张量的协变分量，其逆变分量 g^{ij} 和混合分量 g_j^i 可以通过如下公式定义：

$$g^{ij}g_{jk}=\delta^l_k,\quad g^i_j=\delta^i_j \tag{1.15.7}$$

黎曼空间的仿射联络由下式定义：

$$\Gamma^i_{jk}=\frac{1}{2}g^{il}\left[\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^k}+\frac{\partial g_{lk}}{\partial x^j}-\frac{\partial g_{kj}}{\partial x^l}\right] \tag{1.15.8}$$

Γ^i_{jk}称为第二类克里斯托弗(Christoffel)记号。显然它对下标是对称的，即

$$\Gamma^i_{jk}=\Gamma^i_{kj} \tag{1.15.9}$$

因此黎曼空间 V^n 是挠度张量为 0 的仿射联络空间，即

$$T^k_{ij}=\Gamma^k_{ij}-\Gamma^k_{ji}=0 \tag{1.15.10}$$

但其曲率张量即黎曼－克里斯托弗(Riemann-Christoffel)张量未必是 0：

$$R^m_{\cdot ijk}\equiv\frac{\partial}{\partial x^j}\Gamma^m_{ik}-\frac{\partial}{\partial x^k}\Gamma^m_{ij}+\Gamma^m_{lj}\Gamma^l_{ik}-\Gamma^m_{lk}\Gamma^l_{ij}\neq 0 \tag{1.15.11}$$

1.15.3 欧几里德空间

存在着直角笛卡尔坐标系的黎曼空间称为欧几里德(Euclid)空间，通常记为 E^n。

在欧几里德空间中，当取直角笛卡尔坐标系时，我们有

$$g_{ij}=\delta_{ij},\quad g^{ij}=\delta^{ij},\quad g^i_j=\delta^i_j,\quad \Gamma^k_{ij}=0,\quad R^m_{\cdot ijk}=0 \tag{1.15.12}$$

即在直角笛卡尔坐标系中曲率张量为零张量，根据在坐标变换之下张量分量变换规则的齐次性，曲率张量在任何坐标系中也都是零张量，即 $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{0}$。故欧几里德空间是存在直角笛卡尔坐标系因而曲率为 **0** 的平直空间。

1.16 若干补充知识

本节将结合连续介质力学的需要把线性代数的某些重要知识和张量分析的知识结合起来作一简要介绍。由于在一般曲线坐标中，一个 2 阶张量可有 4 种表象，分别对应 4 个不同的矩阵，所以在一般的曲线坐标中进行讨论会增加不少形式和表达上的复杂性(其中一个例子就是，对于下面要讲的所谓的 2 阶正交张量，并非它的每一种分量的矩阵都一定是正交矩阵)。因此，为了简洁和应用的方便，本节将在直角笛卡尔坐标中即在笛卡尔张量的框架内进行讨论，于是 2 阶张量便和矩阵有着一一对应的关系了，下面将直接以矩阵进行叙述。由于矩阵乘积的运算对

应张量的点积，所以下面对两个矩阵相乘的表述中间将加一个点“·”。

1.16.1 2阶正交张量和正交矩阵

定义 2阶张量 $\boldsymbol{B}$ 称为2阶张量 $\boldsymbol{A}$ 的逆张量，并记为 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{-1}$，如果 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}=\boldsymbol{g}$；2阶张量 $\boldsymbol{Q}$ 称为2阶正交张量，如果 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{Q}^{-1}$，即

$$\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{g}=\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{Q} \tag{1.16.1}$$

如果我们只在笛卡尔坐标系中进行讨论，则2阶张量 $\boldsymbol{B}$ 便和矩阵有着一一对应的关系，以上的定义也即是矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的逆矩阵和正交矩阵的定义了，度量张量 $\boldsymbol{g}$ 也即对应单位矩阵 $\boldsymbol{I}$，故(1.16.1)式可写为

$$Q_{ij}Q_{kj}=\delta_{ik}=Q_{ji}Q_{jk} \tag{1.16.2a}$$

$$\boldsymbol{r}_i\cdot\boldsymbol{r}_k=\delta_{ik}=\boldsymbol{c}_i\cdot\boldsymbol{c}_k \tag{1.16.2b}$$

其中

$$\boldsymbol{r}_i^{\mathrm{T}}=\{Q_{i1}\quad Q_{i2}\quad\cdots\quad Q_{in}\},\quad \boldsymbol{c}_i=\begin{bmatrix}Q_{1i}\\Q_{2i}\\\vdots\\Q_{ni}\end{bmatrix} \tag{1.16.3}$$

分别是矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 的第 i 个行矢量和第 i 个列矢量。

式(1.16.2b)说明：正交矩阵的行矢量组和列矢量组都组成 n 维空间的幺正基；反之，如果矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 的列矢量组或行矢量组是幺正基即式(1.16.2b)成立，则由式(1.16.2a)即可说明矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 确为正交矩阵。这就是正交矩阵名称的来源。

在笛卡尔坐标系中对(1.16.1)取行列式，并利用 $\|\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\|=\|\boldsymbol{Q}\|$，我们有

$$\|\boldsymbol{Q}\|=\pm 1 \tag{1.16.4}$$

我们将 $\|\boldsymbol{Q}\|=1$ 和 $\|\boldsymbol{Q}\|=-1$ 的正交矩阵分别称为正则的(proper)和非正则的(improper)正交矩阵。

1.16.2 2阶正交张量(正交矩阵)的几何意义

我们曾给出过2阶张量的第二定义，即2阶张量是把矢量映射成矢量的2阶系统或2阶线性映射变换。以此为基础，我们把以2阶正交张量为系数矩阵的线性变换称为正交变换。

定理 以2阶正交张量(正交矩阵)作为线性映射系数的正交变换，不改变空间中任一矢量的长度和任意两个矢量间的夹角大小；正则的正交矩阵不改变任意两个矢量夹角的定向，几何上代表旋转；非正则的正交矩阵则改变任意两个矢量夹

角的定向，几何上代表反射。

证明　我们以三维空间为例加以证明。设 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 为空间中的任意3个像原矢量，正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 将之分别映射为空间中的像矢量 $\hat{\boldsymbol{a}}$、$\hat{\boldsymbol{b}}$、$\hat{\boldsymbol{c}}$，即

$$\hat{\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{a},\quad \hat{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{b},\quad \hat{\boldsymbol{c}} = \boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{c} \tag{1.16.5}$$

则

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{a}}\cdot\hat{\boldsymbol{b}} &= (\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{a})\cdot(\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}})\cdot(\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{b})\\ &= \boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{Q})\cdot\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\end{aligned} \tag{1.16.6}$$

当 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}$ 时，(1.16.6)式给出 $|\hat{\boldsymbol{a}}|^2 = |\boldsymbol{a}|^2$，即像矢量和像原矢量等长，定理前半部分证毕。

在一般情况下，(1.16.6)式给出 $|\hat{\boldsymbol{a}}||\hat{\boldsymbol{b}}|\cos\angle(\hat{\boldsymbol{a}},\hat{\boldsymbol{b}}) = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$，因为 $|\hat{\boldsymbol{a}}| = |\boldsymbol{a}|$，$|\hat{\boldsymbol{b}}| = |\boldsymbol{b}|$，所以

$$\angle(\hat{\boldsymbol{a}},\hat{\boldsymbol{b}}) = \pm\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) \tag{1.16.7}$$

即正交矩阵不改变任二矢量之间夹角的大小。

接下来我们证明(1.16.7)式中的“+”号和“−”号分别对应(1.16.4)式中的“1”和“−1”，这即是定理的后半部分。事实上，在任意一组幺正基 $\boldsymbol{i}_i$（不妨设其为右手系）之中，我们可有

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{a}}\cdot(\hat{\boldsymbol{b}}\times\hat{\boldsymbol{c}}) &= e_{ijk}\hat{a}_i\hat{b}_j\hat{c}_k = e_{ijk}Q_{il}a_lQ_{jm}b_mQ_{kn}c_n\\ &= e_{lmn}\,\|\boldsymbol{Q}\|\,a_lb_mc_n = \|\boldsymbol{Q}\|\,\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\end{aligned} \tag{1.16.8}$$

(1.16.8)式即说明：$\|\boldsymbol{Q}\| = \pm 1$ 分别对应像原矢量和像矢量同定向和反定向。证毕。

正交矩阵的另一个意义是：笛卡尔幺正基到笛卡尔幺正基变换的基变换系数矩阵必是正交矩阵。这可以表达为如下的定理：

定理　由笛卡尔幺正基到笛卡尔幺正基的基变换系数矩阵必为正交矩阵；正则的正交矩阵保持新、旧幺正基为同定向，非正则的正交矩阵保持新、旧幺正基为反定向。

现在我们来证明这一定理。事实上，设由旧的笛卡尔幺正基 $\boldsymbol{i}_j$ 到新的笛卡尔幺正基 $\hat{\boldsymbol{i}}_i$ 的基变换系数矩阵为 Q_{ij}，即

$$\hat{\boldsymbol{i}}_i = Q_{ij}\boldsymbol{i}_j \tag{a}$$

则我们有

$$\hat{\boldsymbol{i}}_1\cdot(\hat{\boldsymbol{i}}_2\times\hat{\boldsymbol{i}}_3) = Q_{1i}Q_{2j}Q_{3k}\boldsymbol{i}_i\cdot(\boldsymbol{i}_j\times\boldsymbol{i}_k) = Q_{1i}Q_{2j}Q_{3k}e_{ijk}\boldsymbol{i}_1\cdot(\boldsymbol{i}_2\times\boldsymbol{i}_3)$$

$$= \| Q \| \, \boldsymbol{i}_1 \times \boldsymbol{i}_2 \times \boldsymbol{i}_3$$

即

$$\| Q \| = \frac{\hat{\boldsymbol{i}}_1 \cdot (\hat{\boldsymbol{i}}_2 \times \hat{\boldsymbol{i}}_2)}{\boldsymbol{i}_1 \cdot (\boldsymbol{i}_2 \times \boldsymbol{i}_3)} \tag{b}$$

其中 $\| Q \|$ 表示(a)中的基变换系数矩阵 Q_{ij} 的行列式。由(b)式可见：正则的和非正则的正交矩阵 Q_{ij} 即 $\| Q \| = \pm 1$ 分别保持新、旧幺正基同定向和反定向。

此外，我们还可以给出正交矩阵作为正交映射变换和作为幺正基到幺正基的基变换系数矩阵之间关系的如下定理：

定理 设有一正交张量 $\boldsymbol{Q}$，将空间中的幺正基 $\boldsymbol{i}_i$ 映射为空间中的另一组幺正基 $\hat{\boldsymbol{i}}_i$（由上面的第一个定理可保证 $\hat{\boldsymbol{i}}_i$ 的幺正性），则由幺正基 $\boldsymbol{i}_j$ 到幺正基 $\hat{\boldsymbol{i}}_i$ 的基变换系数矩阵必为 Q^{T}。

现在我们来证明这一定理。事实上，由于我们有新、旧幺正基间的映射关系：

$$\hat{\boldsymbol{i}}_i = \boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{i}_i, \quad \boldsymbol{i}_i = \boldsymbol{Q}^{-1} \cdot \hat{\boldsymbol{i}}_i = \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \hat{\boldsymbol{i}}_i \tag{c}$$

设正交张量 $\boldsymbol{Q}$ 在新、旧幺正基 $\hat{\boldsymbol{i}}_i$ 和 $\boldsymbol{i}_j$ 中的表象分别为 $\hat{Q}_{jk}$ 和 Q_{jk}，即设

$$\boldsymbol{Q} = Q_{jk} \boldsymbol{i}_j \boldsymbol{i}_k, \quad \boldsymbol{Q} = \hat{Q}_{jk} \hat{\boldsymbol{i}}_j \hat{\boldsymbol{i}}_k \tag{d}$$

则由于在幺正的笛卡尔基中正交张量和正交矩阵有一一对应的关系，所以矩阵 $[Q_{jk}]$ 和 $[\hat{Q}_{jk}]$ 必然都是正交矩阵。此时我们有

$$\hat{\boldsymbol{i}}_i = \boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{i}_i = Q_{jk} \boldsymbol{i}_j \boldsymbol{i}_k \cdot \boldsymbol{i}_i = Q_{jk} \boldsymbol{i}_j \delta_{ki} = Q_{ji} \boldsymbol{i}_j, \quad \boldsymbol{I}_i = Q_{ij} \hat{\boldsymbol{i}}_j \tag{e}$$

$$\boldsymbol{i}_i = \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \hat{\boldsymbol{i}}_i = \hat{Q}_{kj} \hat{\boldsymbol{i}}_j \hat{\boldsymbol{i}}_k \cdot \hat{\boldsymbol{i}}_i = \hat{Q}_{kj} \hat{\boldsymbol{i}}_j \delta_{ki} = \hat{Q}_{ij} \hat{\boldsymbol{i}}_j, \quad \hat{\boldsymbol{I}}_i = \hat{Q}_{ji} \boldsymbol{i}_j \tag{f}$$

以上二式都说明：不管我们采用正交张量 $\boldsymbol{Q}$ 在旧幺正基中的表象 Q_{ij} 还是其在新幺正基中的表象 $\hat{Q}_{ij}$，则由旧的幺正基 $\boldsymbol{i}_j$ 到新的幺正基 $\hat{\boldsymbol{i}}_i$ 的坐标变换系数矩阵都恰是该正交张量所对应矩阵的转置矩阵 Q^{T}（为正交矩阵），或者说由新的幺正基 $\hat{\boldsymbol{i}}_j$ 到旧的幺正基 $\boldsymbol{i}_i$ 的坐标变换系数矩阵恰是该正交张量所对应的矩阵 Q（为正交矩阵）。这就证明了我们的定理。

1.16.3 2阶张量（矩阵）的特征值和特征矢量

在1.6节中我们曾以如下二式定义了2阶张量 $\boldsymbol{T}$ 的特征值 λ 和左、右特征矢量 $\boldsymbol{l}$、$\boldsymbol{r}$：

$$\boldsymbol{l} \cdot \boldsymbol{T} = \lambda \boldsymbol{l}, \quad \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{r} = \lambda \boldsymbol{r} \tag{1.16.9}$$

并曾指出由左、右特征矢量所定义的特征值是相同的，对应同样特征值的左、右特

征矢量一般是不同的，而 T 和 T^{T} 的左、右特征矢量则是地位互换的，故对对称张量，其左、右特征矢量将重合。在笛卡尔张量的框架内，上述2阶张量的特征值和特征矢量问题也即矩阵的特征值和特征矢量问题。

1. 实对称矩阵的特征值和特征矢量

关于实对称矩阵的特征值和特征矢量问题，线性代数中已进行了深入讨论，这里我们只列出其重要的结果而不再证明：

(1) 实对称矩阵的所有特征值都必然是实数。

(2) 不同的特征值 $\lambda_i \neq \lambda_j$ 所对应的特征矢量 $\boldsymbol{r}_i$ 和 $\boldsymbol{r}_j$ 必是正交的，即 $\boldsymbol{r}_i \cdot \boldsymbol{r}_j = 0$。

(3) k 重特征值λ 必对应k 个线性无关的特征矢量，它们的任何线性组合矢量仍是对应于此特征值的特征矢量(即这些特征矢量生成一个对应此特征值的 k 维不变子空间)；通过正交化和单位化手续可以找到对应此特征值的一组 k 个幺正特征矢量。

(4) 实对称矩阵一定存在一组 n 个线性无关的特征矢量，而且存在一组 n 个幺正的特征矢量。

2. 矩阵相似对角化的一个充分条件

定理　如果矩阵 T 存在一组n 个线性无关的特征矢量，则可以通过矩阵的相似变换而将之化为对角元素为特征值的对角矩阵，而其相似过渡矩阵恰是以这 n 个特征矢量为列矢量的矩阵的逆阵。

证明　下面的叙述中记号"·"代表两个矩阵相乘，并采用了两矩阵相乘运算的规则。以右特征矢量为例，设 T 存在一组n 个线性无关的特征矢量 $\boldsymbol{r}_i$，相应的特征值为 λ_i，即

$$\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{r}_i = \lambda_i\boldsymbol{r}_i,\quad [\boldsymbol{T}][\boldsymbol{r}_i] = [\lambda_i\boldsymbol{r}_i]\quad (i = 1,2,\cdots,n;\text{不求和})$$

将 n 个式子写在一起，即有

$$\boldsymbol{T}\cdot\{\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\cdots,\boldsymbol{r}_n\} = \{\lambda_1\boldsymbol{r}_1,\lambda_2\boldsymbol{r}_2,\cdots,\lambda_n\boldsymbol{r}_n\} = \{\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\cdots,\boldsymbol{r}_n\}\cdot\boldsymbol{\Lambda}$$

$$[\boldsymbol{T}]\{\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\cdots,\boldsymbol{r}_n\} = \{\lambda_1\boldsymbol{r}_1,\lambda_2\boldsymbol{r}_2,\cdots,\lambda_n\boldsymbol{r}_n\} = \{\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\cdots,\boldsymbol{r}_n\}[\boldsymbol{\Lambda}]$$

或

$$\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{\Lambda} \tag{1.16.10}$$

其中

$$\boldsymbol{R} = \{\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\cdots,\boldsymbol{r}_n\},\quad \boldsymbol{\Lambda} = \begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{bmatrix} \tag{1.16.11}$$

即 $\boldsymbol{R}$ 是依次以各特征矢量 $\boldsymbol{r}_i$ 为列矢量的矩阵，$\boldsymbol{\Lambda}$ 是依次以各特征值λ_i 为对角元

素的对角矩阵。由于各 $\boldsymbol{r}_i$ 是线性无关的,所以 $\boldsymbol{R}$ 是可逆的,以 $\boldsymbol{R}^{-1}$表示其逆矩阵,由(1.16.10)式可得

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{\Lambda} \cdot \boldsymbol{R}^{-1} \tag{1.16.12a}$$

$$\boldsymbol{R}^{-1} \cdot \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{R} = \boldsymbol{\Lambda} \tag{1.16.12b}$$

(1.16.12a)式说明矩阵 $\boldsymbol{T}$ 是和对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$ 相似的,其相似的过渡矩阵恰是 $\boldsymbol{R}$;(1.16.12b)式说明可以通过过渡矩阵为 $\boldsymbol{R}^{-1}$的相似变换而将矩阵 $\boldsymbol{T}$ 变为对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$。定理证毕。

特别说来,当我们取 n 个线性无关的右特征矢量为幺正的右特征矢量组 $\boldsymbol{r}_i$ 时,矩阵 $\boldsymbol{R}$ 将是正交矩阵,故式(1.16.12a)和式(1.16.12b)分别成为

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{\Lambda} \cdot \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} \tag{1.16.13a}$$

$$\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{R} = \boldsymbol{\Lambda} \tag{1.16.13b}$$

(1.16.13a)式说明矩阵 $\boldsymbol{T}$ 是和对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$ 不但是相似的,而且其相似的过渡矩阵恰是正交矩阵 $\boldsymbol{R}$;(1.16.13b)式说明可以通过正交过渡矩阵为 $\boldsymbol{R}^{-1} = \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}$ 的相似变换而将矩阵 $\boldsymbol{T}$ 变为对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$。

容易说明:如果矩阵 $\boldsymbol{T}$ 存在 n 个线性无关的左特征矢量 $\boldsymbol{l}_i$($i=1,2,\cdots,n$)的话,则对应式(1.16.12a)和式(1.16.12b),我们将有

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{L}^{-\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{\Lambda} \cdot \boldsymbol{L}^{\mathrm{T}} \tag{1.16.12a$'$}$$

$$\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{L}^{-\mathrm{T}} = \boldsymbol{\Lambda} \tag{1.16.12b$'$}$$

其中 $\boldsymbol{L}$ 是以 n 个左特征矢量 $\boldsymbol{l}_i$ 为列矢量的矩阵,即 $\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}$是以 n 个左特征矢量 $\boldsymbol{l}_i$ 为行矢量的矩阵。特别说来,当我们取 n 个线性无关的左特征矢量为幺正的左特征矢量组 $\boldsymbol{l}_i$ 时,矩阵 $\boldsymbol{L}$ 将是正交矩阵,故式(1.16.12a)′和式(1.16.12b)′分别成为

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{\Lambda} \cdot \boldsymbol{L}^{\mathrm{T}} \tag{1.16.13a$'$}$$

$$\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{L} = \boldsymbol{\Lambda} \tag{1.16.13b$'$}$$

式(1.16.13)在变形梯度张量的极分解中有重要的应用(见 2.2 节)。

1.16.4 实二次型

以实对称矩阵 $\boldsymbol{T}$ 为系数矩阵,变量 $\boldsymbol{x}$ 的实二次型可以写为

$$f = T_{ij}x_i x_j = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{x}, \quad T_{ij} = T_{ji} \tag{1.16.14}$$

以 λ_i 和 $\boldsymbol{r}_i$ 分别表示 $\boldsymbol{T}$ 的特征值和幺正的特征矢量组,则由(1.16.13)式,可将(1.16.14)式写为

$$f = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{\Lambda} \cdot \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{x} = (\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{\Lambda} \cdot (\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{x}) \tag{1.16.15}$$

引入正交变换:

$$\boldsymbol{\xi} = (\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{x}) \tag{1.16.16}$$

则我们即可把二次型变成新变量 $\boldsymbol{\xi}$ 的完全平方和形式的二次型如下：

$$f = \boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\Lambda} \cdot \boldsymbol{\xi} = \lambda_1(\xi_1)^2 + \lambda_2(\xi_2)^2 + \cdots + \lambda_n(\xi_n)^2 \tag{1.16.17}$$

如果对任意的矢量 $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$，都有二次型 $f = T_{ij}x_ix_j = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{x} > 0$，则称其为正定(positive definite)二次型或称对称矩阵 $\boldsymbol{T}$ 为正定矩阵；如果对任意的矢量 $\boldsymbol{x}$，都有二次型 $f = T_{ij}x_ix_j = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{x} \geqslant 0$，则称其为半正定(positive semidefinite)二次型或称对称矩阵 $\boldsymbol{T}$ 为半正定矩阵。对此线性代数中给出了如下的定理：

定理 实对称矩阵 $\boldsymbol{T}$ 为正定矩阵的充要条件是 $\boldsymbol{T}$ 的所有特征值 $\lambda_i > 0$，或 $\boldsymbol{T}$ 的所有主子式大于0；实对称矩阵 $\boldsymbol{T}$ 为半正定矩阵的充要条件是 $\boldsymbol{T}$ 的所有特征值 $\lambda_i \geqslant 0$，或 $\boldsymbol{T}$ 的所有主子式非负。

1.16.5 关于 $\boldsymbol{T}$ 的平方根矩阵

定义 如果 $\boldsymbol{A}^2 \equiv \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{T}$，则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为 $\boldsymbol{T}$ 的平方根矩阵，记为 $\boldsymbol{A} = \sqrt{\boldsymbol{T}}$。

显然矩阵 $\boldsymbol{T}$ 的平方根矩阵是不唯一的，例如：

$$\begin{bmatrix} \pm\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \mp\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}, \quad \cdots$$

都是对角元素为2的对角矩阵的平方根矩阵。线性代数中已经证明：在如下限制条件下可保证平方根矩阵的唯一性。

定理一 设 $\boldsymbol{T}$ 为半正定矩阵，特征值为 $\lambda_i \geqslant 0$，则特征值为 $\sqrt{\lambda_i}$、特征矢量与 $\boldsymbol{T}$ 的特征矢量相同的 $\sqrt{\boldsymbol{T}}$ 是唯一的。

定理二 设 $\boldsymbol{T}$ 为半正定矩阵，特征值为 $\lambda_i \geqslant 0$ 且各不相同，则特征值为 $\sqrt{\lambda_i}$ 的 $\sqrt{\boldsymbol{T}}$ 是唯一的。

定理三 设 $\boldsymbol{T}$ 为正定矩阵，则其正定的 $\sqrt{\boldsymbol{T}}$ 是唯一的。

以上的定理特别是定理三在2.2节变形梯度张量的极分解中有直接应用。

1.16.6 凯来-哈密尔顿定理

以 $I_1, I_2, \cdots, I_n$ 分别表示 $n \times n$ 阶矩阵 $\boldsymbol{T}$ 的各阶主子式，则矩阵 $\boldsymbol{T}$ 的特征方程为

$$\| \boldsymbol{T} - \lambda \boldsymbol{I} \| = (-1)^n[\lambda^n - I_1\lambda^{n-1} - I_2\lambda^{n-2} + \cdots + (-1)^n I_n] = 0 \tag{1.16.18}$$

在线性代数中证明了如下的凯来-哈密尔顿(Cauley-Hamilton)定理：

凯来-哈密尔顿(Cauley-Hamilton)定理 矩阵 T 必满足其特征方程，即

$$[T^n - I_1 T^{n-1} + I_2 T^{n-2} + \cdots + (-1)^n I] = 0 \qquad (1.16.19)$$

应用凯来-哈密尔顿定理我们可以直接写出各向同性张量函数的表达式(详见6.2节最后说明以及第6章的相关习题)。

习 题

1.1 试证明公式(1.1.3)式，即

$$\begin{cases} \delta_i^i = 3 \\ a^j \delta_j^i = a^i \quad (i = 1,2,3) \\ A_{ij}\delta_k^j = A_{ik} \quad (i = 1,2,3; k = 1,2,3) \end{cases}$$

1.2 设 e_{ijk} 为置换记号，而 $T^{ij}e_{ijk} = 0$，试证明 T^{ij} 必是对称的2阶系统。

1.3 试证明：对任意的3个矢量 $\boldsymbol{a}_1$、$\boldsymbol{a}_2$、$\boldsymbol{a}_3$，都有

$$\boldsymbol{a}_i \cdot (\boldsymbol{a}_j \times \boldsymbol{a}_k) = e_{ijk}\boldsymbol{a}_1 \cdot (\boldsymbol{a}_2 \times \boldsymbol{a}_3)$$

1.4 试证明：

$$\| \boldsymbol{A} \| = e^{ijk} A_{i1} A_{j2} A_{k3} = e^{ijk} A_{1i} A_{2j} A_{3k}$$

$$- \| \boldsymbol{A} \| = e^{ijk} A_{i2} A_{j1} A_{k3} = e^{ijk} A_{2i} A_{1j} A_{3k}$$

1.5 试证明：

$$e^{ijk} e^{lmn} A_{il} A_{jm} A_{kn} = 6 \| \boldsymbol{A} \|$$

1.6 设 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 为任意两个3×3的矩阵，以 $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$ 表示此二矩阵的乘积，试证明：

$$\| \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} \| = \| \boldsymbol{A} \| \, \| \boldsymbol{B} \|$$

1.7 设 $\boldsymbol{f}$ 和 $\boldsymbol{g}$ 为三维空间中的任意两个矢量，$\boldsymbol{I}$ 表示3×3的单位矩阵，试证明：

$$\| \boldsymbol{I} + \boldsymbol{f}\boldsymbol{g} \| = 1 + \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{g}$$

1.8 设 $\boldsymbol{i}_1$、$\boldsymbol{i}_2$、$\boldsymbol{i}_3$ 是笛卡尔直角坐标系中的幺正基，$\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{i}_2 + \boldsymbol{i}_3$，$\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{i}_3 + \boldsymbol{i}_1$，$\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{i}_1 + \boldsymbol{i}_2$。

(1) 试借助 $\boldsymbol{i}_i$ 表示 $\boldsymbol{e}_i$ 和 $\boldsymbol{e}^i$；

(2) 求出$[g_{ij}]$和$[g^{ij}]$；

(3) 设 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_3$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3$，试求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$。

1.9　试证明：

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\boldsymbol{b}(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})-\boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$$

1.10　试证明：

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})=\boldsymbol{c}[\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{d})]-\boldsymbol{d}[\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})]$$

1.11　试由$\bar{\boldsymbol{e}}_i=\alpha_i^j\boldsymbol{e}_j$，证明：$\boldsymbol{e}^i=\alpha_j^i\bar{\boldsymbol{e}}^j$；试由$\boldsymbol{e}_i=\beta_i^j\bar{\boldsymbol{e}}_j$，证明：$\bar{\boldsymbol{e}}^i=\beta_j^i\boldsymbol{e}^j$；试由$\bar{\boldsymbol{e}}^i=\beta_j^i\boldsymbol{e}^j$，证明：$\bar{a}^i=\beta_j^i a^j$；试由$\boldsymbol{e}^i=\alpha_j^i\bar{\boldsymbol{e}}^j$，证明：$a^i=\alpha_j^i\bar{a}^j$。

1.12　试说明：任意张量不同分量通过度量张量 g^{ij}、g_{ij}、$g_i^j=\delta_i^j$ 提升、下降、改换指标的关系如果在某一坐标系中成立的话，则其在任意坐标系中也必然成立。作为例子，设2阶张量 $\boldsymbol{A}$ 在某一坐标系中的协变分量和混合分量间有关系 $A_{ij}=A_i{}^k g_{kj}$，试证明：在任何坐标系中也仍然有关系 $\bar{A}_{ij}=\bar{A}_i{}^k\bar{g}_{kj}$。

1.13　设 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 为矢量，试证明由它们的分量所组成的2阶系统 $C_{ij}=a_ib_j$，$C^{ij}=a^ib^j$，$C_i{}^j=a_ib^j$，$C^i{}_j=a^ib_j$ 分别为2阶协变张量、2阶逆变张量、1次协变1次逆变的2阶混合张量、1次逆变1次协变的2阶混合张量，并证明它们是同一个2阶张量 $\boldsymbol{C}$ 的不同分量。

1.14　设 T_{kl}、T^{kl}、$T_l{}^k$、$T^k{}_l$分别为2次协变、2次逆变、1次协变1次逆变、1次逆变1次协变的2阶张量，n_k、n^k 分别为协变和逆变矢量，试证明：

$$t_l=n^kT_{kl}=n_kT^k{}_l,\quad t^l=n^kT_k{}^l=n_kT^{kl}$$

$$q_l=T_{lk}n^k=T_l{}^kn_k,\quad q^l=T^{lk}n_k=T^l{}_kn^k$$

分别是协变矢量、逆变矢量、协变矢量、逆变矢量；再证明 $t_l(q_l)$和 $t^l(q^l)$是同一矢量 $\boldsymbol{t}(\boldsymbol{q})$的不同分量。

1.15　设2阶系统 $T^k{}_l$将任意的协变矢量n_k 按上题中的第二式即$t_l=n_kT^k{}_l$都映射为协变矢量t_l，试证明2阶系统 $T^k{}_l$必为1次逆变1次协变的2阶混合张量。并对上题中的其他7式给出商法则的类似表述和证明。

1.16　设1阶系统 n^k 将任意的2阶协变张量 T_{kl}按1.14题中的第一式即 $t_l=n^kT_{kl}$都映射为协变矢量t_l，试证明一阶系统 n^k 必为逆变矢量。并对1.14题中的其他7式给出商法则的类似表述和证明。

1.17　设对任意的矢量 $\boldsymbol{a}$ 和2阶张量 $\boldsymbol{T}$，都有 $\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{S}$，即 $\boldsymbol{S}=\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}$，试证明：

$$S_{ij}=T_{ji},\quad S^{ij}=T^{ji},\quad S_i{}^j=T^j{}_i,\quad S^i{}_j=T_j{}^i$$

1.18　设$\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$、$\boldsymbol{e}_3$ 是直角笛卡尔坐标系中的幺正基，$\bar{\boldsymbol{e}}_1=\boldsymbol{e}_1$，$\bar{\boldsymbol{e}}_2=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{e}_1+$

$\frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{e}_2, \bar{\boldsymbol{e}}_3 = \boldsymbol{e}_3$。

(1) 试求出由旧基 $\boldsymbol{e}_i$ 到新基 $\bar{\boldsymbol{e}}_j$ 的协变系数矩阵$[\alpha_i^j]$和逆变系数矩阵$[\beta_i^j]$；

(2) 求出新的逆变基$\bar{\boldsymbol{e}}^i$；

(3) 求出新基中的度量张量表达式$[\bar{g}_{ij}]$和$[\bar{g}^{ij}]$；

(4) 设 2 阶对称张量 $\boldsymbol{T}$ 在新基$\bar{\boldsymbol{e}}_i$ 中的逆变分量为$[\bar{T}^{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,试求出其协变分量$[\bar{T}_{ij}]$和混合分量$[\bar{T}^i_{\cdot j}]$、$[\bar{T}_i^{\cdot j}]$；

(5) 设有一 2 阶正交张量 $\boldsymbol{Q}$,其在笛卡尔坐标系$\boldsymbol{e}_i$ 中的分量为

$$[Q_{ij}] = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

试求出 $\boldsymbol{Q}$ 在新基$\bar{\boldsymbol{e}}_i$ 中的表象$[\bar{Q}_{ij}]$、$[\bar{Q}^{ij}]$、$[\bar{Q}_i^{\cdot j}]$、$[\bar{Q}^i_{\cdot j}]$。

1.19 设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 为 2 阶张量,λ、μ 为标量,试证明 $\lambda\boldsymbol{A} + \mu\boldsymbol{B}$ 为 2 阶张量,例如 $\lambda A_{ij} + \mu B_{ij}$为 2 阶协变张量。

1.20 设在某一坐标系中度量张量的协变分量为$[g_{ij}] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$,2 阶张量 $\boldsymbol{T}$ 和 2 阶对称张量 $\boldsymbol{P}$ 的协变分量分别为$[T_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$和$[P_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$。试求出 2 阶张量 $\boldsymbol{T}$ 和$\boldsymbol{P}$ 其他分量所组成的矩阵以及$\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}$ 各分量所组成的矩阵。

1.21 试证明 2 阶张量的和分解定理,即任意 2 阶张量 $\boldsymbol{T}$ 都可以分解为对称张量$\boldsymbol{A}$ 和反对称张量$\boldsymbol{B}$ 之和：

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$$

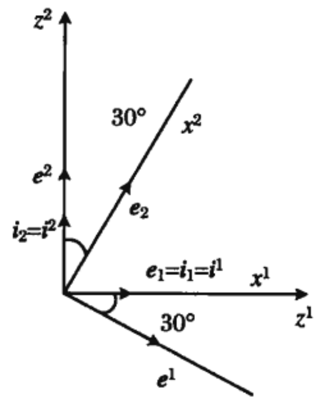
其中

$$A = \frac{1}{2}(T + T^{T}), \quad B = \frac{1}{2}(T - T^{T})$$

且这种和分解是唯一的。

1.22 以 z^i 和 x^i 分别表示直角笛卡尔坐标和斜角曲线坐标，二者通过如下线性变换相联系：

$$\begin{cases} x^1 = z^1 - \frac{1}{\sqrt{3}}z^2, \quad x^2 = \frac{2}{\sqrt{3}}z^2, \quad x^3 = z^3 \\ z^1 = x^1 + \frac{1}{2}x^2, \quad z^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}x^2, \quad z^3 = x^3 \end{cases}$$



题 1.22 图

(1) 证明由笛卡尔坐标到斜角曲线坐标的协变系数矩阵和逆变系数矩阵分别为

$$[\alpha_n^m] = \left[\frac{\partial z^m}{\partial x^n}\right] = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[\beta_n^m] = \left[\frac{\partial x^m}{\partial z^n}\right] = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(2) 证明斜角曲线坐标的基矢量和度量张量分别为

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{i}_1, \quad \boldsymbol{e}_2 = \frac{1}{2}\boldsymbol{i}_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{i}_2, \quad \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{i}_3 \\ \boldsymbol{e}^1 = \boldsymbol{i}^1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{i}^2, \quad \boldsymbol{e}^2 = \frac{2}{\sqrt{3}}\boldsymbol{i}^2, \quad \boldsymbol{e}^3 = \boldsymbol{i}^3 \end{cases}$$

$$[g_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [g^{ij}] = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(3) 对直角笛卡尔坐标中的单位矢量 $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{i}_1\cos\theta + \boldsymbol{i}_2\sin\theta$，求出 $\boldsymbol{n}$ 在斜角曲线坐标中的各种物理分量；

(4) 对直角笛卡尔坐标中的平面应力状态$[T^{i}_{\cdot j}]=\begin{bmatrix}T^{1}_{\cdot 1} & T^{1}_{\cdot 2} & 0\\ T^{2}_{\cdot 1} & T^{2}_{\cdot 2} & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$,求出斜角曲线坐标中的应力张量分量$[\bar{T}^{ij}]$、$[\bar{T}^{i}_{\cdot j}]$、$[\bar{T}_{i}^{\cdot j}]$、$[\bar{T}_{ij}]$以及各类物理分量。

1.23　设在球坐标中 Cauchy 应力张量的协变分量为$[T_{ij}]=\begin{bmatrix}2 & 0 & 1\\ 0 & 3 & 0\\ 1 & 0 & 4\end{bmatrix}$,试求:

(1) 其他分量$[T_{i}^{\cdot j}]$、$[T^{i}_{\cdot j}]$、$[T^{ij}]$;

(2) 其物理分量$[T^{\langle ij\rangle}]$。

1.24　设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 为 2 阶张量,$A_{ij}(B_{ij})$、$A^{ij}(B^{ij})$、$A_{i}^{\cdot j}(B_{i}^{\cdot j})$、$A^{i}_{\cdot j}(B^{i}_{\cdot j})$分别为其协变分量、逆变分量、第一种混合分量和第二种混合分量,试证明:

$$P_{il}=A_{ij}B^{j}_{\cdot l}=A_{i}^{\cdot j}B_{jl},\quad P^{il}=A^{ij}B_{j}^{\cdot l}=A^{i}_{\cdot j}B^{jl}$$
$$P_{i}^{\cdot l}=A_{ij}B^{jl}=A_{i}^{\cdot j}B_{j}^{\cdot l},\quad P^{i}_{\cdot l}=A^{ij}B_{jl}=A^{i}_{\cdot j}B^{j}_{\cdot l}$$

分别为具有相应变异特性的 2 阶张量。

1.25　设 2 阶系统 $B^{j}_{\cdot l}$按上题中的第一式即 $P_{il}=A_{ij}B^{j}_{\cdot l}$将任意的 2 阶协变张量 A_{ij}都映射为 2 阶协变张量 P_{il},试证明 2 阶系统 $B^{j}_{\cdot l}$必为 1 次逆变 1 次协变的 2 阶混合张量。并对上题中的其他 7 个公式进行商法则问题的类似表述和证明。

1.26　设 Σ^{IJ}为第二类 P-K 应力张量的逆变分量,E_{KL}为 L 氏应变张量的协变分量,弹性材料的本构关系为 $\Sigma^{IJ}=\Sigma^{IJ}(E_{KL})$。试证明:材料的弹性模量张量 $M^{IJKL}\equiv\dfrac{\partial\Sigma^{IJ}}{\partial E_{KL}}$必为 4 阶逆变张量。

1.27　设 h_i 为热流矢量的协变分量,g_j 为温度 E 式梯度的协变分量,热流的本构关系为 $h_i=h_i(g_j)$。试证明:材料的热传导张量 $k_{i}^{\cdot j}\equiv-\dfrac{\partial h_i}{\partial g_j}$必为 2 阶混合张量。

1.28　试证明(即式(1.4.12)):

$$\begin{cases}A_{ij}=\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{e}_j=(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{e}_j)\cdot\boldsymbol{e}_i, & A^{ij}=\boldsymbol{e}^i\cdot\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{e}^j=(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{e}^j)\cdot\boldsymbol{e}^i\\ A_{i}^{\cdot j}=\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{e}^j=(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{e}^j)\cdot\boldsymbol{e}_i, & A^{i}_{\cdot j}=\boldsymbol{e}^i\cdot\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{e}_j=(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{e}_j)\cdot\boldsymbol{e}^i\\ C_{ijk}=[(\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{e}_k)\cdot\boldsymbol{e}_j]\cdot\boldsymbol{e}_i=\boldsymbol{e}_k\cdot[\boldsymbol{e}_j\cdot(\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{C})]=\cdots\\ C^{ij}_{\cdot\cdot k}=[(\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{e}_k)\cdot\boldsymbol{e}^j]\cdot\boldsymbol{e}^i=\boldsymbol{e}_k\cdot[\boldsymbol{e}^j\cdot(\boldsymbol{e}^i\cdot\boldsymbol{C})]=\cdots\end{cases}$$

1.29　设 $\boldsymbol{T}$ 为 2 阶张量,试证明 $T^{m}_{\cdot m}$和 $T_{m}^{\cdot m}$ 都是标量,而且是同一标量。

1.30 设对任意的2阶协变张量 A_{ij},2阶系统 $B^{j}_{\cdot k}$都按映射关系 $A_{ij}B^{j}_{\cdot k}=C_{ik}$ 将之映射为2阶协变张量 C_{ik},试证明:2阶系统 $B^{j}_{\cdot k}$必为2阶混合张量。

1.31 设对任意的2阶协变张量 T_{ij},都有 $T_{ij}M^{ij}=\Phi$ 为一标量,试证明:2阶系统 M^{ij}必为2阶逆变张量。

1.32 试证明:$\varepsilon_{ijk}=\boldsymbol{e}_i\cdot(\boldsymbol{e}_j\times\boldsymbol{e}_k)$和 $\varepsilon^{ijk}=\boldsymbol{e}^i\cdot(\boldsymbol{e}^j\times\boldsymbol{e}^k)$分别为3阶协变和3阶逆变张量。并由此证明2阶反对称张量 $\boldsymbol{W}$ 和矢量$\boldsymbol{\omega}$ 存在着如下一一对应的对偶关系:

$$W_{ij}=-\varepsilon_{ijk}\omega^k$$

即如果 ω^k 为逆变矢量,则由上式所确定的2阶系统 W_{ij}(显然是反对称的)必是2阶协变张量;反之,如果 W_{ij}为2阶反对称张量,则满足以上映射关系的1阶系统 ω^k 必是逆变矢量。再由上式出发证明:

$$\omega^k=-\frac{1}{2}\varepsilon^{kij}W_{ij}$$

1.33 设对任意的逆变矢量 a^i,由2阶对称系统 $E_{ij}=E_{ji}$所作出的二次型都恒为0,即

$$a^iE_{ij}a^j=0$$

试证明必有 $E_{ij}=0$。

1.34 参照本书中以一点处协变基为棱的微四面体的动量守恒直接引入Cauchy应力张量 $\boldsymbol{T}$ 的逆变分量T^{ij}和混合分量$T^{i}_{\cdot j}$的方法,试以一点处的逆变基为棱的微四面体的动量守恒直接引入Cauchy应力张量 $\boldsymbol{T}$ 的协变分量 T_{ij}和混合分量 $T_{i}^{\cdot j}$。

1.35 对柱坐标 x^i:

$$x^1=\sqrt{(z^1)^2+(z^2)^2},\quad x^2=\arctan\left(\frac{z^2}{z^1}\right),\quad x^3=z^3$$

$$z^1=x^1\cos x^2,\quad z^2=x^1\sin x^2,\quad z^3=x^3$$

(1) 求出$\boldsymbol{e}_i=\dfrac{\partial z^k}{\partial x^i}\boldsymbol{i}_k,\boldsymbol{e}^i=\dfrac{\partial x^i}{\partial z^k}\boldsymbol{i}^k$;

(2) 求出 g_{ij}和g^{ij},并以矩阵表示;

(3) 求出柱坐标中的第二类克里斯托弗记号 Γ^n_{ij},并将 Γ^1_{ij}、Γ^2_{ij}、Γ^3_{ij}分别以矩阵表示。

1.36 对球坐标 x^i:

$$x^1=\sqrt{(z^1)^2+(z^2)^2+(z^3)^2},\quad x^2=\arctan\left(\frac{\sqrt{(z^1)^2+(z^2)^2}}{z^3}\right),\quad x^3=\arctan\frac{z^2}{z^1}$$

$$z^1 = x^1 \sin x^2 \cos x^3, \quad z^2 = x^1 \sin x^2 \sin x^3, \quad z^3 = x^1 \cos x^2$$

(1) 求出$\boldsymbol{e}_i = \frac{\partial z^k}{\partial x^i}\boldsymbol{i}_k, \boldsymbol{e}^i = \frac{\partial x^i}{\partial z^k}\boldsymbol{i}^k$;

(2) 求出 g_{ij}和g^{ij},并以矩阵表示;

(3) 求出球坐标中的第二类克里斯托弗记号 Γ_{ij}^n,并将 Γ_{ij}^1、Γ_{ij}^2、Γ_{ij}^3分别以矩阵表示。

1.37　试从介质中某点处以$\boldsymbol{e}^i$ 为棱的微四面体的动量守恒出发,直接引入 Cauchy 应力张量的协变分量 T_{ij}和混合分量 $T_i^{\cdot j}$。

1.38　试导出第二类克里斯托弗记号 Γ_{ij}^n的坐标变换公式:

$$\overline{\Gamma}_{ij}^k = \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^n}\Gamma_{lm}^n + \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^l}\frac{\partial^2 x^l}{\partial \bar{x}^j \partial \bar{x}^i}$$

1.39　通过求 3 阶张量 $\boldsymbol{T} = T^{i\cdot k}_{\cdot j\cdot}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}^j\boldsymbol{e}_k = T_{ij\cdot}^{\cdot\cdot k}\boldsymbol{e}^i\boldsymbol{e}^j\boldsymbol{e}_k = \cdots$对坐标的偏导数,并利用基矢量的微商公式和商法则,导出协变导数$T^{i\cdot k}_{\cdot j\cdot}|_l$、$T_{ij\cdot}^{\cdot\cdot k}|_l$ 等的表达式,并说明其张量特性。

1.40　试证明式(1.11.8c)和式(1.11.9c),即设 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{v}$ 为任意矢量,$\boldsymbol{T}$ 为任意的 2 阶张量,试证明:

$$\boldsymbol{a}\cdot(\vec{\nabla}\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{v}\overleftarrow{\nabla})\cdot\boldsymbol{a}, \quad (\boldsymbol{T}\overleftarrow{\nabla})\cdot\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}\cdot(\vec{\nabla}\boldsymbol{T})$$

1.41　试证明:对任意的 2 阶张量 $\boldsymbol{A}$,都有$(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}} = (\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}$。

1.42　试由矢量 $\boldsymbol{v}$ 的散度 div$\boldsymbol{v}$ 和旋度 rot$\boldsymbol{v}$ 的物理定义出发,即由公式

$$\mathrm{div}\boldsymbol{v} = \lim_{V\to 0}\frac{1}{V}\oint_S \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S, \quad (\mathrm{rot}\boldsymbol{v})_n = \lim_{S\to 0}\frac{1}{S}\oint_C \boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

出发,导出 div$\boldsymbol{v}$ 和 rot$\boldsymbol{v}$ 在直角笛卡尔坐标和正交曲线坐标中的表达式。

1.43　试由 2 阶张量 $\boldsymbol{T}$ 的散度 div$\boldsymbol{T}$ 的物理定义出发,即由公式

$$\mathrm{div}\boldsymbol{T} = \lim_{V\to 0}\frac{1}{V}\oint_S \boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S$$

出发,导出 div$\boldsymbol{T}$ 在直角笛卡尔坐标和正交曲线坐标中的表达式。

1.44　试导出 2 阶张量 $\boldsymbol{T}$ 的旋度 rot$\boldsymbol{T}\equiv\vec{\nabla}\times\boldsymbol{T}$ 在直角笛卡尔坐标系和正交曲线坐标中的表达式。

第2章　连续介质的运动和变形

2.1　构形和运动描述

2.1.1　构形和运动描述

在连续介质力学中，物体被看做是“粒子”（或“微团”）的连续集合。这些连续介质中的所谓“粒子”在微观上要足够地大，即它们要包含足够多的微观粒子（分子、原子、离子等），以保证这样的“粒子”的各种物理量在任一时刻都有一个宏观上的统计表观值；它们又要在宏观上是足够地小，以致可以视作几何上的“点”，从而允许我们应用场论的研究方法。我们把任一时刻，每一个物体所占的空间区域连同它的全部粒子在此区域中的位置的相应分配，称为此物体的一个构形(configuration)。把物体某一特定时刻的构形（通常取其未变形的构形）称为初始构形或参考构形(original or reference configuration)，记为 B，而把物体在任一时刻 t 的构形称为瞬时构形或当前构形(instantaneous or current configuration)，记为 b。为了描述一个粒子在参考构形和现时构形中的位置，我们可以在欧几里德空间的参考构形和瞬时构形中各取一坐标系，习惯上人们分别称二者为拉格朗日(Lagrange)坐标系和欧拉(Euler)坐标系（以后简称L氏坐标系和E氏坐标系），而称粒子初始时刻在L氏坐标系中的坐标为L氏坐标，称粒子在E氏坐标系中的坐标为E氏坐标。需要指出的是这两个坐标系可以相同也可以不同，可以是直角笛卡尔坐标系，也可以是任意的曲线坐标系。我们将以 $\boldsymbol{X}$ 和 $\boldsymbol{x}$ 分别表示粒子在初始构形中对某一参考点的位置矢量及其在瞬时构形中对某一参考点的位置矢量，

而以 X^I 和 x^i 分别表示粒子的 L 氏坐标和 E 氏坐标。如果 L 氏坐标系和 E 氏坐标系都是直角笛卡尔坐标系，则 X^I 和 x^i 将分别是粒子的初始位置矢量 $\boldsymbol{X}$ 和瞬时位置矢量 $\boldsymbol{x}$ 在相应坐标系中的笛卡尔分量；但需注意，当 L 氏坐标系和 E 氏坐标系都是曲线坐标系时，则 X^I 和 x^i 只表示粒子在相应曲线坐标系中的 L 氏坐标和 E 氏坐标，但它们并不是位置矢量 $\boldsymbol{X}$ 和 $\boldsymbol{x}$ 的逆变分量，而我们之所以在曲线坐标系中对位置矢量仍用记号 $\boldsymbol{X}$ 和 $\boldsymbol{x}$，只是为了和笛卡尔坐标系中的位置矢量记号相一致，而今后的大部分内容都是在笛卡尔坐标系中进行叙述的。为了清楚起见，我们将分别以英文大小写指标来表示与 L 氏坐标系和 E 氏坐标系有关的分量。为了描述的普遍性，我们在 2.1 节和 2.2 节中将在一般的曲线坐标系中进行叙述；但为了突出物理概念和减少数学上的繁杂性，在本书 2.3 节及以后的全部章节中，我们将直接在直角笛卡尔坐标系中进行叙述，但是有了第 1 章张量分析的知识以后，读者是不难写出有关内容在一般坐标系中的表述的。

我们可以把粒子在参考构形中的位置矢量 $\boldsymbol{X}$（或坐标 X^I）作为它的名称，而将之简称为粒子 $\boldsymbol{X}$（或 X^I）。物体的运动规律可由各粒子在参考构形中的位置矢量 $\boldsymbol{X}$（或坐标 X^I）和其在时刻 t 的瞬时位置矢量 $\boldsymbol{x}$（或坐标 x^i）间的映射关系所给出：

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{X}, t), \quad x^i = x^i(X^I, t) \tag{2.1.1}$$

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}, t), \quad X^I = X^I(x^i, t) \tag{2.1.2}$$

式(2.1.1)的含义是：初始时刻位置矢量为 $\boldsymbol{X}$（或 L 氏坐标为 X^I）的粒子在 t 时刻到达位置矢量为 $\boldsymbol{x}$（或 E 氏坐标为 x^i）的地方。式(2.1.2)的含义是：t 时刻到达位置矢量为 $\boldsymbol{x}$（或 E 氏坐标为 x^i）的粒子在初始时刻的位置矢量为 $\boldsymbol{X}$（或 L 氏坐标为 X^I）。除了都以时间 t 为参数以外，式(2.1.1)和式(2.1.2)分别是以 L 氏位置矢量 $\boldsymbol{X}$（或 L 氏坐标 X^I）和 E 氏位置矢量 $\boldsymbol{x}$（或 E 氏坐标 x^i）为自变量而对介质运动规律的描述，我们可分别称它们为介质运动规律的 L 氏描述和 E 氏描述。当然，也可把式(2.1.2)称为介质的逆运动描述。

类似于对介质运动规律的 L 氏描述和 E 氏描述，我们将任一物理量 f 作为 L 氏坐标和时间 t 的函数的描述方法称为 L 氏描述或物质描述：

$$f = f(\boldsymbol{X}, t), \quad f = f(X^I, t) \tag{2.1.3}$$

将任一物理量 f 作为 E 氏坐标和时间 t 的函数的描述方法称为 E 氏描述或空间描述：

$$f = f(\boldsymbol{x}, t), \qquad f = f(x^i, t) \tag{2.1.4}$$

在连续介质力学中，清楚认识 L 氏描述和 E 氏描述的不同是十分重要的。

2.1.2 随体导数

我们把跟随一个确定的粒子所感受到的某物理量 f 随时间的变化率称为量 f 的随体导数或物质导数(material derivative),常以量 f 上加一点表示之,即记为 $\dot{f}$。在L氏描述中,一个确定的粒子即是对应一个初始构形中确定的位置矢量 $\boldsymbol{X}$(或坐标 X^I),故L氏描述中 f 的随体导数即为

$$\dot{f}=\left[\frac{\partial f(\boldsymbol{X},t)}{\partial t}\right]_{\boldsymbol{X}}=\left[\frac{\partial f}{\partial t}\right]_{\boldsymbol{X}},\quad \dot{f}=\left[\frac{\partial f(X^I)}{\partial t}\right]_{X^I}=\left[\frac{\partial f}{\partial t}\right]_{X^I} \tag{2.1.5}$$

即在L氏描述之下任意物理量 f 的随体导数等于其对时间 t 的偏导数。特别地,当取式(2.1.5)中的 f 为粒子 $\boldsymbol{X}$ 的瞬时位置矢量 $\boldsymbol{x}$ 和瞬时速度矢量 $\boldsymbol{v}=\dot{\boldsymbol{x}}$ 时,我们便有

$$\boldsymbol{v}\equiv\dot{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{X},t)=\left[\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial t}\right]_{\boldsymbol{X}},\quad \boldsymbol{v}\equiv\dot{\boldsymbol{x}}(X^I,t)=\left[\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial t}\right]_{X^I} \tag{2.1.6a}$$

$$\dot{\boldsymbol{v}}=\ddot{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{X},t)=\left[\frac{\partial^2 \boldsymbol{x}}{\partial t^2}\right]_{\boldsymbol{X}},\quad \dot{\boldsymbol{v}}=\ddot{\boldsymbol{x}}(X^I,t)=\left[\frac{\partial^2 \boldsymbol{x}}{\partial t^2}\right]_{X^I} \tag{2.1.6b}$$

其中 $\boldsymbol{v}$ 和 $\dot{\boldsymbol{v}}$ 分别代表粒子 $\boldsymbol{X}$ 的速度和加速度。

但是当我们采用E氏描述(2.1.4)式时,量 f 的随体导数显然并不等于其对时间 t 的偏导数,即

$$\dot{f}\neq\left[\frac{\partial f(\boldsymbol{x},t)}{\partial t}\right]_{\boldsymbol{x}}$$

因为 $\left[\frac{\partial f(\boldsymbol{x},t)}{\partial t}\right]_{\boldsymbol{x}}$ 只是我们在一个确定的空间位置 $\boldsymbol{x}$ 感受到的量 f 随时间的变化率,而在不同的时刻经过同一空间位置 $\boldsymbol{x}$ 的粒子显然是不同的。$\left[\frac{\partial f(\boldsymbol{x},t)}{\partial t}\right]_{\boldsymbol{x}}$ 称为量 f 在 $\boldsymbol{x}$ 的局部导数。为了得到在E氏描述(2.1.4)式下任意量 f 的随体导数,我们可以把式(2.1.1)代入式(2.1.4)从而将其转换为量 f 的L氏描述,即

$$f=f[\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X},t),t]\equiv f(\boldsymbol{X},t) \tag{2.1.7a}$$

利用式(2.1.5),对式(2.1.7a)求随体导数并利用复合函数求导的链式法则,我们有

$$\dot{f}=\left[\frac{\partial f(\boldsymbol{X},t)}{\partial t}\right]_{\boldsymbol{X}}=\left[\frac{\partial f(\boldsymbol{x},t)}{\partial t}\right]_{\boldsymbol{x}}+\left[\frac{\partial f(\boldsymbol{x},t)}{\partial \boldsymbol{x}}\right]_{t}\cdot\left[\frac{\partial \boldsymbol{x}(\boldsymbol{X},t)}{\partial t}\right]_{\boldsymbol{X}}$$

利用式(2.1.6),上式中的最后一个因子恰为粒子速度 $\boldsymbol{v}$,再注意此式中 $\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}}$ 即量 f 在瞬时构形或E氏坐标中的梯度,故上式即

$$\dot{f} = \left[\frac{\partial f}{\partial t}\right]_x + (f\overleftarrow{\nabla})\cdot \boldsymbol{v} = \left[\frac{\partial f}{\partial t}\right]_x + \boldsymbol{v}\cdot(\overrightarrow{\nabla} f) \tag{2.1.8a}$$

式中的$\overleftarrow{\nabla}$表示E氏坐标中向左求导的梯度算子。由于$(f\overleftarrow{\nabla})\cdot\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}\cdot(\overrightarrow{\nabla} f)$，故有第二式。

如果采用曲线坐标而不是位置矢量来描述介质的运动，则E氏描述转换为L氏描述的公式(2.1.7a)式将变为

$$f = f[x^i(X^I, t), t] \equiv f(X^I, t) \tag{2.1.7b}$$

于是对复合函数(2.1.7b)式求随体导数，并利用复合函数求导的链式法则，我们即有

$$\begin{aligned}\dot{f} &= \left[\frac{\partial f(X^I,t)}{\partial t}\right]_{X^I} = \left[\frac{\partial f(x^i,t)}{\partial t}\right]_{x^i} + \left[\frac{\partial f(x^i,t)}{\partial x^i}\right]_t \left[\frac{\partial x^i(X^I,t)}{\partial t}\right]_{X^I} \\ &= \left[\frac{\partial f}{\partial t}\right]_{x^i} + \left[\frac{\partial f}{\partial x^i}\right]_t v^i = \left[\frac{\partial f}{\partial t}\right]_{x^i} + f\overleftarrow{\nabla}_i v^i\end{aligned}$$

即

$$\dot{f} = \left[\frac{\partial f}{\partial t}\right]_{x^i} + (f\overleftarrow{\nabla}_i)v^i = \left[\frac{\partial f}{\partial t}\right]_{x^i} + v^i(\overrightarrow{\nabla}_i f) \tag{2.1.8b}$$

式(2.1.8b)是(2.1.8a)在曲线坐标中的表达形式，它也可直接由式(2.1.8a)转换为张量方程的分量形式而写出。

如前所述，方程(2.1.8)中的第一项称为量f的局部导数(local derivative)，它代表量f在粒子于瞬时构形中的位置$\boldsymbol{x}$(或x^i)处随时间的变化率，由场的不定常性所引起；方程(2.1.8)中的第二项称为量f的迁移导数(convection derivative)，它是由于粒子在具有梯度$f\overleftarrow{\nabla}$或$\overrightarrow{\nabla} f$的不均匀场中以质点速度$\boldsymbol{v}$迁移所引起。所以式(2.1.8)表示，当采用量的$E$氏表述时，任意量的随体导数等于其局部导数和迁移导数之和。

我们指出，式(2.1.8a)中的量f可以是任何阶的张量，此时f的梯度$f\overleftarrow{\nabla}$应理解为张量f和梯度算子$\overleftarrow{\nabla}$的外积。例如，对速度矢量$\boldsymbol{v}$，式(2.1.8a)和式(2.1.8b)可分别写为

$$\dot{\boldsymbol{v}} = \left[\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}\right]_x + (\boldsymbol{v}\overleftarrow{\nabla})\cdot\boldsymbol{v} = \left[\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}\right]_x + \boldsymbol{v}\cdot(\overrightarrow{\nabla}\boldsymbol{v}) \tag{2.1.9a}$$

$$\dot{\boldsymbol{v}} = \left[\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}\right]_{x^i} + (\boldsymbol{v}\overleftarrow{\nabla}_i)v^i = \left[\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}\right]_{x^i} + v^i(\overrightarrow{\nabla}_i\boldsymbol{v}) \tag{2.1.9b}$$

当然，式(2.1.9b)也可直接由(2.1.9a)写为曲线坐标中的分量形式而得出。式(2.1.9)右端的两项分别代表粒子的局部加速度和迁移加速度。

2.2 变形梯度张量

本节将重点介绍对同一粒子在两个不同构形中所建立的“两点曲线坐标系”和“两点张量”的概念，并介绍两个最重要的两点张量：漂移张量和变形梯度张量。

2.2.1 两点坐标系和两点张量

如图2.1所示。设介质在初始构形 B 中的某粒子 P 于 t 时刻到达瞬时构形 b 中的位置 p 处。为了描述粒子在初始构形中的位置，我们建立一个笛卡尔坐标系 $OZ^1Z^2Z^3$，其幺正基矢量为 $\boldsymbol{I}_1$、$\boldsymbol{I}_2$、$\boldsymbol{I}_3$；在初始构形中以函数 $X^I=X^I(z^i)$ 可建立一个曲线坐标网，粒子 P 处曲线坐标系的协变基矢量为 $\boldsymbol{d}_1$、$\boldsymbol{d}_2$、$\boldsymbol{d}_3$，粒子 P 相对于笛卡尔系坐标原点 O 的位置矢量记为 $\boldsymbol{X}$。我们将坐标 Z^I 和 X^I 分别称为L氏笛卡尔坐标和L氏曲线坐标。为了描述粒子在瞬时构形中的位置，我们建立另一个笛卡尔坐标系 $oz^1z^2z^3$，其幺正基矢量为 $\boldsymbol{i}_1$、$\boldsymbol{i}_2$、$\boldsymbol{i}_3$；在瞬时构形中以函数 $x^i=x^i(z^i)$ 可建立另一个曲线坐标网，粒子 p 处该曲线坐标系的协变基矢量为 $\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$、$\boldsymbol{e}_3$，粒子 p 相对于笛卡尔系坐标原点 o 的位置矢量记为 $\boldsymbol{x}$。我们将坐标 z^i 和 x^i 分别称为E氏笛卡尔坐标和E氏曲线坐标。这样我们就对同一粒子在初始构形和瞬时构形中的两个不同位置点分别建立了L氏和E氏两个不同的曲线坐标系，即“两点坐标系”。

根据第1章中张量分析的知识，我们可以求出L氏坐标系当中的协变基矢量 $\boldsymbol{d}_K=\dfrac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial X^K}$，从而求出相应的L氏逆变基矢量 $\boldsymbol{d}^K=\dfrac{1}{2\sqrt{G}}e^{IJK}\boldsymbol{d}_I\times\boldsymbol{d}_J$（当L氏坐标系为右手系时），进而求出L氏度量张量 $\boldsymbol{G}$ 的分量 $G_{IJ}=\boldsymbol{d}_I\cdot\boldsymbol{d}_J$、$G^{IJ}=\boldsymbol{d}^I\cdot\boldsymbol{d}^J$、$G^I_J=\boldsymbol{d}^I\cdot\boldsymbol{d}_J=\delta^I_J$，以及L氏第二类克里斯托记号 $\Gamma^K_{IJ}=\dfrac{\partial \boldsymbol{d}_I}{\partial X^J}\cdot\boldsymbol{d}^K$ 等等；相应地，我们也可以求出E氏坐标系当中的协变基矢量 $\boldsymbol{e}_k=\dfrac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial x^k}$，从而求出相应的E氏逆变基矢量 $\boldsymbol{e}^k=\dfrac{1}{2\sqrt{g}}e^{ijk}\boldsymbol{e}_i\times\boldsymbol{e}_j$（当E氏坐标系为右手系时），进而求出E氏度量张量 $\boldsymbol{g}$ 的分量 $g_{ij}=\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j$、$g^{ij}=\boldsymbol{e}^i\cdot\boldsymbol{e}^j$、$g^i_j=\boldsymbol{e}^i\cdot\boldsymbol{e}_j=\delta^i_j$，以及E氏第二类克里斯托

记号 $\Gamma_{ij}^k = \frac{\partial \boldsymbol{e}_i}{\partial x^j} \cdot \boldsymbol{e}^k$，等等。在上面的各式中，我们分别以 G、g 表示行列式 $G = \| G_{IJ} \|$ 和 $g = \| g_{ij} \|$。

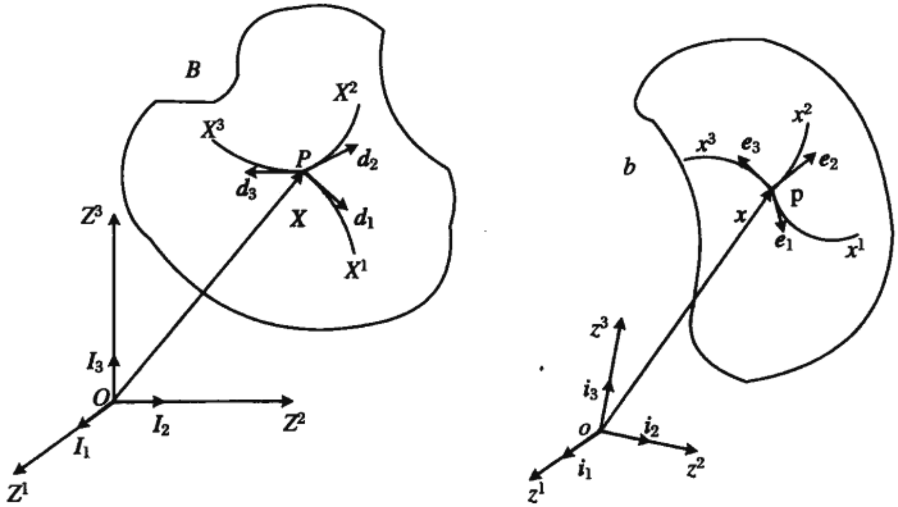


图 2.1

类似于张量 $\boldsymbol{G}$ 和 $\boldsymbol{g}$，我们可以建立联系 L 氏坐标系和 E 氏坐标系的所谓两点度量张量，通常称为漂移张量(shifter tensor)，分别以 $\boldsymbol{S}$ 和 $\boldsymbol{s}$ 表示之，其定义如下：

$$\begin{cases} S_{Ij} = \boldsymbol{d}_I \cdot \boldsymbol{e}_j = \boldsymbol{e}_j \cdot \boldsymbol{d}_I = s_{jI} \\ S^{Ij} = \boldsymbol{d}^I \cdot \boldsymbol{e}^j = \boldsymbol{e}^j \cdot \boldsymbol{d}^I = s^{jI} \\ S_I^{\cdot j} = \boldsymbol{d}_I \cdot \boldsymbol{e}^j = \boldsymbol{e}^j \cdot \boldsymbol{d}_I = s^j_{\cdot I} \\ S^I_{\cdot j} = \boldsymbol{d}_I \cdot \boldsymbol{e}_j = \boldsymbol{e}_j \cdot \boldsymbol{d}^I = s_j^{\cdot I} \end{cases} \tag{2.2.1}$$

在 L 氏坐标的坐标变换之下，$\boldsymbol{d}_I$ 和 $\boldsymbol{d}^I$ 分别满足 1 次协变和 1 次逆变规则，故 G_{IJ}、G^{IJ}、G_I^J 分别是 L 氏坐标中的 2 阶协变、2 阶逆变和 2 阶混合张量；在 E 氏坐标的坐标变换之下，$\boldsymbol{e}_i$ 和 $\boldsymbol{e}^i$ 分别满足 1 次协变和 1 次逆变规则，故 g_{ij}、g^{ij}、g_j^i 分别是 E 氏坐标中的 2 阶协变、2 阶逆变和 2 阶混合张量。类似地，容易证明：在 L 氏坐标和 E 氏坐标同时进行坐标变换时，$S_I^{\cdot j} = s^j_{\cdot I}$ 将是对 L 氏坐标 1 次协变对 E 氏坐标 1 次逆变的 2 阶张量，对其他各量的张量特性可类似说明。像这种和两点坐标系相关联的张量我们称之为两点张量(double or two-point tensor)，即漂移张量 $\boldsymbol{S}$ 和 $\boldsymbol{s}$ 都是两点张量。而根据定义显然它们是两个互为转置的张量，即 $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{s}^{\mathrm{T}}$。

我们容易写出 $\boldsymbol{d}_I$ 和 $\boldsymbol{d}^I$ 与 $\boldsymbol{e}_i$ 和 $\boldsymbol{e}^i$ 互相线性表达的如下式子：

$$\begin{cases} \boldsymbol{d}_I = S_{Ij}\boldsymbol{e}^j = s_{jI}\boldsymbol{e}^j, \quad \boldsymbol{d}_I = S_I^{\cdot j}\boldsymbol{e}_j = s^j_{\cdot I}\boldsymbol{e}_j, \\ \boldsymbol{d}^I = S^I_{\cdot j}\boldsymbol{e}^j = s_j^{\cdot I}\boldsymbol{e}^j, \quad \boldsymbol{d}^I = S^{Ij}\boldsymbol{e}_j = s^{jI}\boldsymbol{e}_j \\ \boldsymbol{e}_i = s_{iJ}\boldsymbol{d}^J = S_{Ji}\boldsymbol{d}^J, \quad \boldsymbol{e}_i = s_i^{\cdot J}\boldsymbol{d}_J = S^J_{\cdot i}\boldsymbol{d}_J, \\ \boldsymbol{e}^i = s^i_{\cdot J}\boldsymbol{d}^J = S_J^{\cdot i}\boldsymbol{d}^J, \quad \boldsymbol{e}^i = s^{iJ}\boldsymbol{d}_J = S^{Ji}\boldsymbol{d}_J \end{cases} \tag{2.2.2}$$

式(2.2.2)说明：漂移张量 $\boldsymbol{S}$ 和 $\boldsymbol{s}$ 恰是把同一粒子在L氏坐标中的基矢量和E氏坐标中的基矢量相互联系(或相互漂移的)的变换系数或二阶系统。而且容易证明：它们也是把任意张量的某一L氏分量和E氏分量相互漂移的变换系数。以矢量 $\boldsymbol{v}$ 和2阶张量 $\boldsymbol{T}$ 为例，利用式(2.2.2)，显然我们有

$$\begin{cases} v_k = s_{kK}v^K = s_k^{\cdot K}v_K, \quad v^k = s^{kK}v_K = s^k_{\cdot K}v^K \\ v_K = S_{Kk}v^k = S_K^{\cdot k}v_k, \quad v^K = s^{Kk}v_k = S^K_{\cdot k}v^k \\ T^k_{\cdot K} = s^{kI}T_{IK} = s^k_{\cdot I}T^I_{\cdot K}, \quad T^K_{\cdot k} = S^{Ki}T_{ik} = S^K_{\cdot i}T^i_{\cdot k}, \quad \cdots \end{cases} \tag{2.2.3}$$

式(2.2.3)表明：漂移张量 $\boldsymbol{S}$ 和 $\boldsymbol{s}$ 的分量通过约定求和作为一个映射因子起着与度量张量 $\boldsymbol{G}$ 和 $\boldsymbol{g}$ 的分量类似的作用，即提升指标、下降指标、改换指标的作用，只不过是把L氏指标提升、下降、改换为E氏指标或者相反。从这个意义上讲，我们可以把漂移张量称为两点度量张量。

前面曾指出，张量 $\boldsymbol{S}$ 和 $\boldsymbol{s}$ 是互为转置的，即 $\boldsymbol{S}=\boldsymbol{s}^{\mathrm{T}}$；此外，我们容易证明它们也是互逆的，即 $\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{s}=\boldsymbol{G}$ 或 $\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{S}=\boldsymbol{g}$ 恰为相应坐标中的度量张量(即单位张量)。事实上，例如我们有

$$G^I_J = \boldsymbol{d}^I\cdot\boldsymbol{d}_J = S^I_{\cdot j}\boldsymbol{e}^j\cdot S_J^{\cdot i}\boldsymbol{e}_i = S^I_{\cdot j}S_J^{\cdot i}\delta^j_i = S^I_{\cdot j}S_J^{\cdot j} = S^I_{\cdot j}s^j_{\cdot J}$$

即 $\boldsymbol{G}=\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{s}$，或 $\boldsymbol{S}$ 和 $\boldsymbol{s}$ 互为逆张量。因此我们可以说 $\boldsymbol{S}$ 或 $\boldsymbol{s}$ 都是所谓的正交张量。但是我们强调指出：在一般的曲线坐标中它们的任何一种分量所组成的矩阵一般都并非是正交矩阵；只有当L氏坐标和E氏坐标都是笛卡尔坐标系时，$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{s}^{\mathrm{T}}$ 是幺正基到幺正基的变换系数，它们才只对应一个正交矩阵；而当把L氏坐标和E氏坐标取为同一个笛卡尔坐标系时，该矩阵 $\boldsymbol{S}=\boldsymbol{s}^{\mathrm{T}}$ 则与 $\boldsymbol{G}$、$\boldsymbol{g}$ 一样同时成为单位矩阵。事实上，当L氏坐标和E氏坐标都是笛卡尔坐标系时，将 $\boldsymbol{G}=\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{s}=\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}$ 写为指标记法，即 $S_{Ii}S_{Ji}=\delta_{IJ}$，这说明矩阵 S_{Ii} 确为正交矩阵，此时因为 $G_{IJ}=\delta_{IJ}$，$g_{ij}=\delta_{ij}$，我们常以直接记法简写为 $\boldsymbol{G}=\boldsymbol{I}$，$\boldsymbol{g}=\boldsymbol{i}$；而当取L氏坐标和E氏坐标为同一个笛卡尔坐标系时，我们有 $S_{Ii}=\delta_{Ii}$，$s_{iI}=\delta_{iI}$ 都成为单位矩阵，我们常以直接记法简记为 $\boldsymbol{S}=\boldsymbol{I}$，此时L氏指标和E氏指标的区别也就不存在了。

2.2.2 变形梯度张量

现在我们来介绍描述介质在一点处变形特性的一个最重要的两点张量——变

形梯度张量。设介质的运动规律为

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{X}, t), \quad x^i = x^i(X^I, t) \tag{2.2.4}$$

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}, t), \quad X^I = X^I(x^i, t) \tag{2.2.5}$$

以 $\mathrm{d}\boldsymbol{X}$ 表示某粒子 P 附近在初始构形中的一个微线元矢量，在介质运动和变形后成为瞬时构形中 p 附近的微线元矢量 $\mathrm{d}\boldsymbol{x}$，则：

$$\mathrm{d}\boldsymbol{X} = \mathrm{d}X^I \boldsymbol{d}_I, \quad \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \mathrm{d}x^i \boldsymbol{e}_i$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{X}} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{X}, \quad \mathrm{d}x^i = \frac{\partial x^i}{\partial X^I} \mathrm{d}X^I$$

如果我们引入记号 $\boldsymbol{F}$ 和 $F^i_{\cdot I}$ 如下：

$$\boldsymbol{F} = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{X}} \equiv \boldsymbol{x} \overleftarrow{\nabla}, \quad F^i_{\cdot I} = \frac{\partial x^i}{\partial X^I} \tag{2.2.6}$$

则有

$$\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{X}, \quad \mathrm{d}x^i = F^i_{\cdot I} \mathrm{d}X^I \tag{2.2.7}$$

其中 $\overleftarrow{\nabla}$ 表示 L 氏坐标中的梯度算子。当我们同时对 L 氏坐标和 E 氏坐标进行如下的坐标变换时：

$$\bar{X}^K = \bar{x}^K(X^I), \quad \bar{x}^k = \bar{x}^k(x^i) \tag{2.2.8}$$

则根据复合函数求导的链式法则，我们有

$$\bar{F}^i_{\cdot I} = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial \bar{X}^I} = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} \frac{\partial x^j}{\partial X^J} \frac{\partial X^J}{\partial \bar{X}^I} = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} \frac{\partial X^J}{\partial \bar{X}^I} F^j_{\cdot J} \tag{2.2.9}$$

式(2.2.9)即说明：式(2.2.6)所定义的量 $\boldsymbol{F}$ 在新、旧坐标系中的分量 $\bar{F}^i_{\cdot I}$ 和 $F^j_{\cdot J}$ 之间满足对 E 氏坐标一次逆变对 L 氏坐标一次协变的变换规则，即 $F^i_{\cdot I}$ 是一个对 E 氏坐标一次逆变对 L 氏坐标一次协变的 2 阶混合张量，我们将之称为粒子 P 处的变形梯度张量(deformation gradient tensor)。根据两点张量的定义，变形梯度张量是一个两点张量。

式(2.2.7)的意义是：变形梯度张量 $\boldsymbol{F}$ 作为一个 2 阶映射系统，把初始构形当中的每一个微线元矢量 $\mathrm{d}\boldsymbol{X}$ 都映射成为瞬时构形中的微线元矢量 $\mathrm{d}\boldsymbol{x}$。故量 $\boldsymbol{F}$ 包含了一点处变形的全部信息。任意线元变换的这个解释可由图 2.2 来说明。

至于变形梯度张量 $\boldsymbol{F}$ 的其他分量，我们可以通过 $\boldsymbol{G}$、$\boldsymbol{g}$、$\boldsymbol{S}$、$\boldsymbol{s}$ 进行有关指标的上升、下降、改换或漂移而得出。例如

$$F^{iI} = F^i_{\cdot J} G^{JI}, \quad F_{iI} = F^j_{\cdot I} g_{ji}, \quad F^{ij} = F^i_{\cdot J} S^{Jj} = F^i_{\cdot J} s^{jJ}, \quad F_{IJ} = F^i_{\cdot J} S_{Ii} = s_{iI} F^i_{\cdot J} \tag{2.2.10}$$

等等。对于 $\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}$，我们有

$$\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}} = (F^{i}_{\cdot I}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{d}^I)^{\mathrm{T}} = F^{i}_{\cdot I}\boldsymbol{d}^I\boldsymbol{e}_i,\quad (\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}})_I^{\ i} = F^{i}_{\cdot I} \tag{2.2.11}$$

其他分量也可通过 $\boldsymbol{G}$、$\boldsymbol{g}$、$\boldsymbol{S}$、$\boldsymbol{s}$ 进行有关指标的上升、下降、改换或漂移而得出，我们不再列出。

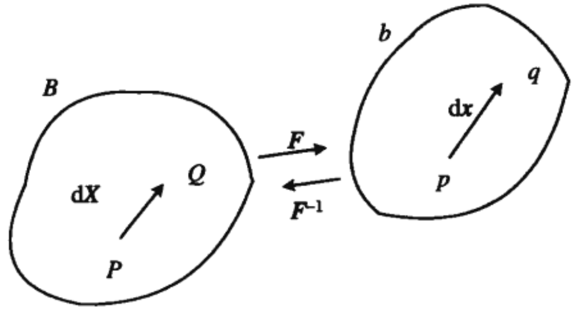


图 2.2　线元的变换和逆变换

2.2.3　变形梯度张量的逆张量

设介质的运动规律为

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{X},t),\quad x^i = x^i(X^I,t) \tag{2.2.12}$$

如果函数 $x^i(X^I,t)$ 的雅可比(Jacobi)行列式 J 不为 0，即

$$J \equiv \left\|\frac{\partial x^i}{\partial X^I}\right\| \neq 0 \tag{2.2.13}$$

则(2.2.12)式存在着唯一的反函数，它可描述介质的逆运动，简记为

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x},t),\quad X^I = X^I(x^i,t) \tag{2.2.14}$$

除了坐标之间的反函数关系之外，我们在形式上也写出了初始位置矢量和瞬时位置矢量之间的反函数关系。满足(2.2.13)式即 $J\neq 0$ 的运动称为非奇异的运动，如果 $J>0$，则(2.2.12)式称为正则的非奇异运动。

对非奇异的运动，我们有

$$\mathrm{d}\boldsymbol{X} = \left(\frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial \boldsymbol{x}}\right)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{X}\overleftarrow{\nabla}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x},\quad \mathrm{d}X^I = \frac{\partial X^I}{\partial x^i}\mathrm{d}x^i$$

如果我们引入记号 $\boldsymbol{F}^{-1}$ 和 $(\boldsymbol{F}^{-1})^I_{\cdot i}$ 如下：

$$\boldsymbol{F}^{-1} = \frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial \boldsymbol{x}} \equiv \boldsymbol{X}\overleftarrow{\nabla},\quad (\boldsymbol{F}^{-1})^I_{\cdot i} = \frac{\partial X^I}{\partial x^i} \tag{2.2.15}$$

则有

$$\mathrm{d}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{F}^{-1}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x},\quad \mathrm{d}X^I = (\boldsymbol{F}^{-1})^I_{\cdot i}\mathrm{d}x^i \tag{2.2.16}$$

其中 $\overleftarrow{\nabla}$ 是 $\boldsymbol{E}$ 氏坐标中的梯度算子。容易说明：当我们同时对 L 氏坐标和 E 氏坐标

进行坐标变换(2.2.8)式时,(2.2.15)式所定义的量$(\boldsymbol{F}^{-1})^{I}_{\cdot i}$是对L氏坐标1次逆变对E氏坐标一次协变的2阶张量,它也是一个两点张量,我们称之为变形梯度张量的逆张量。我们将$\boldsymbol{F}^{-1}$称之为$\boldsymbol{F}$的逆张量是恰当的,这是因为

$$\delta^i_j = \frac{\partial x^i}{\partial x^j} = \frac{\partial x^i}{\partial X^J}\frac{\partial X^J}{\partial x^j},\quad \delta^I_J = \frac{\partial X^I}{\partial X^J} = \frac{\partial X^I}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial X^J},\quad \boldsymbol{g} = \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{F}^{-1},\quad \boldsymbol{G} = \boldsymbol{F}^{-1}\cdot\boldsymbol{F} \tag{2.2.17}$$

即它们的点积等于度量张量。

式(2.2.16)的意义是:变形梯度张量的逆张量$\boldsymbol{F}^{-1}$作为一个2阶映射系统,把瞬时构形当中的每一个微线元矢量$\mathrm{d}\boldsymbol{x}$都映射成为初始构形中的微线元矢量$\mathrm{d}\boldsymbol{X}$,即它是映射$\boldsymbol{F}$的逆映射。线元$\mathrm{d}\boldsymbol{x}$到$\mathrm{d}\boldsymbol{X}$的逆映射关系也可由图2.2来说明。

2.2.4 微体元和微面元的变换

式(2.2.7)和式(2.2.16)分别通过变形梯度张量$\boldsymbol{F}$和其逆张量$\boldsymbol{F}^{-1}$建立了初始构形中的微线元$\mathrm{d}\boldsymbol{X}$和瞬时构形中的微线元$\mathrm{d}\boldsymbol{x}$间一一对应的映射关系。下面我们将说明:初始构形和瞬时构形中的微体元和微面元的映射关系,也是由$\boldsymbol{F}$和$\boldsymbol{F}^{-1}$所决定的。

不妨假设L氏坐标系和E氏坐标系都取为右手系。在初始构形中任取3个不共面的微线元$\mathrm{d}\underset{1}{\boldsymbol{X}}$、$\mathrm{d}\underset{2}{\boldsymbol{X}}$、$\mathrm{d}\underset{3}{\boldsymbol{X}}$,设其体积为$\mathrm{d}V$,变形后分别成为瞬时构形中的微线元$\mathrm{d}\underset{1}{\boldsymbol{x}}$、$\mathrm{d}\underset{2}{\boldsymbol{x}}$、$\mathrm{d}\underset{3}{\boldsymbol{x}}$,体积为$\mathrm{d}v$。则由式(2.2.6),我们有

$$\mathrm{d}\underset{1}{x}^i = F^i_{\cdot I}\mathrm{d}\underset{1}{X}^I,\quad \mathrm{d}\underset{2}{x}^j = F^j_{\cdot J}\mathrm{d}\underset{2}{X}^J,\quad \mathrm{d}\underset{3}{x}^k = F^k_{\cdot K}\mathrm{d}\underset{3}{X}^K \tag{a}$$

设$\mathrm{d}\underset{1}{\boldsymbol{X}}$、$\mathrm{d}\underset{2}{\boldsymbol{X}}$、$\mathrm{d}\underset{3}{\boldsymbol{X}}$成右手系,则有

$$\mathrm{d}V = \mathrm{d}\underset{1}{\boldsymbol{X}}\cdot(\mathrm{d}\underset{2}{\boldsymbol{X}}\times\mathrm{d}\underset{3}{\boldsymbol{X}}) = \sqrt{G}e_{IJK}\mathrm{d}\underset{1}{X}^I\mathrm{d}\underset{2}{X}^J\mathrm{d}\underset{3}{X}^K \tag{b}$$

对$\mathrm{d}\underset{1}{\boldsymbol{x}}$、$\mathrm{d}\underset{2}{\boldsymbol{x}}$、$\mathrm{d}\underset{3}{\boldsymbol{x}}$成右手系和左手系的情况,我们将分别有

$$\begin{aligned}\mathrm{d}v &= \pm\mathrm{d}\underset{1}{\boldsymbol{x}}\cdot(\mathrm{d}\underset{2}{\boldsymbol{x}}\times\mathrm{d}\underset{3}{\boldsymbol{x}}) = \pm\sqrt{g}e_{ijk}\mathrm{d}\underset{1}{x}^i\mathrm{d}\underset{2}{x}^j\mathrm{d}\underset{3}{x}^k = \pm\sqrt{g}e_{ijk}F^i_{\cdot I}F^j_{\cdot J}F^k_{\cdot K}\mathrm{d}\underset{1}{X}^I\mathrm{d}\underset{2}{X}^J\mathrm{d}\underset{3}{X}^K\\ &= \pm\sqrt{g}e_{IJK}J\mathrm{d}\underset{1}{X}^I\mathrm{d}\underset{2}{X}^J\mathrm{d}\underset{3}{X}^K = \pm\sqrt{\frac{g}{G}}J\mathrm{d}V\end{aligned} \tag{c}$$

故对非奇异的运动,我们有

$$0 < \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}V} = \pm\sqrt{\frac{g}{G}}J \equiv \|\boldsymbol{F}\| \tag{2.2.18}$$

其中

$$\|\boldsymbol{F}\| \equiv \pm\sqrt{\frac{g}{G}}J \tag{2.2.19}$$

称为变形梯度张量 F 的行列式。由于恒有 $\frac{dv}{dV}>0$，故由(2.2.18)式可见：对正则($J>0$)和非正则($J<0$)的非奇异运动，我们应该分别取其中的 ± 号。这说明正则的非奇异运动保持瞬时构形和初始构形为同样的定向，非正则的非奇异运动则使得瞬时构形与初始构形反定向。式(2.2.18)说明：$\|F\|$ 的物理意义是由初始构形到瞬时构形的过程中介质微元体积的膨胀比，它是与L氏坐标和E氏坐标的变换都没有关系的，即(2.2.19)式所定义的量是一个(两点)标量。以后我们将只讨论正则的非奇异运动，故(2.2.19)式也取 + 号。

如果以

$$d\boldsymbol{A} = d\underset{1}{\boldsymbol{X}} \times d\underset{2}{\boldsymbol{X}}, \quad d\boldsymbol{a} = d\underset{1}{\boldsymbol{x}} \times d\underset{2}{\boldsymbol{x}} \tag{d}$$

分别表示初始构形中的微面元矢量和瞬时构形中的微面元矢量，则容易证明：

$$d\boldsymbol{A} = \frac{1}{\|\boldsymbol{F}\|} d\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{F} = \frac{1}{\|\boldsymbol{F}\|} \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}} \cdot d\boldsymbol{a},$$

$$d\boldsymbol{a} = \|\boldsymbol{F}\| d\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{F}^{-1} = \|\boldsymbol{F}\| (\boldsymbol{F}^{-1})^{\mathrm{T}} \cdot d\boldsymbol{A} \tag{2.2.20}$$

读者可作为练习证明之。

2.2.5　直角笛卡尔坐标系中的相应公式

当L氏坐标系和E氏坐标系都取为直角笛卡尔坐标系时，我们将只用下标，此时我们有

$$G_{IJ} = \delta_{IJ}, \quad g_{ij} = \delta_{ij}, \quad S_{Ij}s_{jK} = \delta_{IK},$$

$$s_{iJ}S_{Jk} = \delta_{ik}, \quad G = 1, \quad g = 1, \quad \|\boldsymbol{F}\| = J \tag{2.2.21}$$

式(2.2.7)、式(2.2.16)、式(2.2.18)、式(2.2.20)以指标记法写分别为

$$dx_i = F_{iI} dX_I, \quad dX_I = (F^{-1})_{Ii} dx_i, 0 < \frac{dv}{dV} = J \equiv \|\boldsymbol{F}\| \quad (\text{对正则的运动}) \tag{2.2.22}$$

$$dA_I = \frac{1}{J} da_i F_{iI}, \quad da_i = J dA_I (F^{-1})_{Ii} \tag{2.2.23}$$

2.3　变形梯度张量的极分解

为了突出物理概念和避免过于繁琐的数学表达，以后我们将主要在笛卡尔坐

标系中进行叙述,只是在特别需要时才给出一般曲线坐标中的表述和数学形式。在笛卡尔坐标系中,2 阶张量和矩阵有着一一对应的关系,所以以张量和矩阵叙述都是一样的。

2.3.1 极分解定理

我们将首先给出如下的关于可逆 2 阶张量的极分解定理(polar decomposition theorem),并以两点张量变形梯度张量 $\boldsymbol{F}$ 来进行叙述。

极分解定理 任何一个 2 阶可逆张量 $\boldsymbol{F}$ 都可以有如下的两种极分解形式:

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{U} \quad (F_{iI} = R_{iK}U_{KI}) \tag{2.3.1}$$

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{R} \quad (F_{iI} = V_{ik}R_{kI}) \tag{2.3.2}$$

其中 $\boldsymbol{U}$ 和 $\boldsymbol{V}$ 是正定对称张量,$\boldsymbol{R}$ 为正交张量,而且这两种极分解形式都是唯一的。我们将分解式(2.3.1)式和(2.3.2)式分别称为张量的右极分解和左极分解。

证明 我们首先证明右极分解定理。

由给定的 2 阶可逆张量 $\boldsymbol{F}$,我们可定义一个 2 阶张量 $\boldsymbol{C}$:

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{F} \quad (C_{IJ} = F_{kI}F_{kJ}) \tag{2.3.3a}$$

显然张量 $\boldsymbol{C}$ 是对称的:

$$\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}} = (\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{F})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{F} = \boldsymbol{C} \tag{2.3.3b}$$

同时 $\boldsymbol{C}$ 也是正定的,这是因为对任意的非零矢量 $\boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{0}$,如下的 2 次型 f 都恒正:

$$\begin{aligned} f &\equiv \boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{X} \\ &= (\boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}})\cdot(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{X}) = (\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{X})\cdot(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{X}) > 0 \end{aligned}$$

(可逆张量 $\boldsymbol{F}$ 把任意的非零矢量 $\boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{0}$ 都映射为非零矢量$(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{X})\neq\boldsymbol{0}$,其长度恒正。)于是由 1.16.5 节中的定理三,正定对称的 2 阶张量 $\boldsymbol{C}$ 必然存在唯一的正定对称平方根张量 $\boldsymbol{U}$,即

$$\boldsymbol{U}^2 = \boldsymbol{C}, \quad \boldsymbol{U} = \sqrt{\boldsymbol{C}} \quad (U_{IK}U_{KJ} = C_{IJ}) \tag{2.3.4}$$

因为 $\boldsymbol{U}$ 是正定的,所以必然存在逆张量 $\boldsymbol{U}^{-1}$,定义张量 $\boldsymbol{R}$ 为

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{U}^{-1} \quad (R_{iI} = F_{iK}(U^{-1})_{KI}) \tag{2.3.5}$$

则我们有

$$\begin{aligned} \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{R} &= (\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{U}^{-1})^{\mathrm{T}}\cdot(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{U}^{-1}) = (\boldsymbol{U}^{-1})^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{U}^{-1} \\ &= (\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}})^{-1}\cdot\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{U}^{-1} = \boldsymbol{U}^{-1}\cdot\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{U}^{-1} = \boldsymbol{I} \end{aligned}$$

即(2.3.5)式所定义的张量 $\boldsymbol{R}$ 是正交张量。以 $\boldsymbol{U}$ 右点乘式(2.3.5)式的两端,即得右极分解(2.3.1)式。这样,我们不但证明了右极分解的存在性,而且给出了由(2.3.3)式、(2.3.4)式、(2.3.5)式确定其中正定对称张量 $\boldsymbol{U}$ 和正交张量 $\boldsymbol{R}$ 的具体

方法。现证明满足右极分解的正定对称张量 $\boldsymbol{U}$ 和正交张量 $\boldsymbol{R}$ 都是唯一的。

设有两个正定对称张量 $\boldsymbol{U}$、$\boldsymbol{U}^*$ 和正交张量 $\boldsymbol{R}$、$\boldsymbol{R}^*$ 同时满足右极分解(2.3.1)式，即

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{U} = \boldsymbol{R}^*\cdot\boldsymbol{U}^* \tag{2.3.6}$$

$$\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}} = (\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{U})^{\mathrm{T}} = (\boldsymbol{R}^*\cdot\boldsymbol{U}^*)^{\mathrm{T}} \tag{2.3.7}$$

则我们有

$$(\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{U})^{\mathrm{T}}\cdot(\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{U}) = \boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}^2$$

类似地，可有

$$(\boldsymbol{R}^*\cdot\boldsymbol{U}^*)^{\mathrm{T}}\cdot(\boldsymbol{R}^*\cdot\boldsymbol{U}^*) = (\boldsymbol{U}^*)^2$$

由(2.3.6)式、(2.3.7)式和以上两式，我们即有 $\boldsymbol{U}^2 = \boldsymbol{U}^{*2}$，由于 $\boldsymbol{U}$ 和 $\boldsymbol{U}^*$ 都是正定的，故 $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}^*$。以 $\boldsymbol{U}^{-1} = (\boldsymbol{U}^*)^{-1}$ 分别点乘式(2.3.6)两式的右端，即得 $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}^*$。这就证明了右极分解的唯一性。整个右极分解定理证毕。

左极分解定理的证明是类似的，我们简述之。由给定的 2 阶可逆张量 $\boldsymbol{F}$，定义一个 2 阶张量 $\boldsymbol{B}$：

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}} \quad (B_{ij} = F_{iK}F_{jK}) \tag{2.3.8a}$$

显然张量 $\boldsymbol{B}$ 是对称的：

$$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} = (\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{B} \tag{2.3.8b}$$

类似于 $\boldsymbol{C}$ 正定性的证明，可知(2.3.8)式所定义的 $\boldsymbol{B}$ 不但是对称的而且也是正定的，所以也存在着唯一的正定对称张量 $\boldsymbol{V}$ 作为 $\boldsymbol{B}$ 的平方根张量，即

$$\boldsymbol{V}^2 = \boldsymbol{B},\quad \boldsymbol{V} = \sqrt{\boldsymbol{B}} \quad (V_{ik}V_{kj} = B_{ij}) \tag{2.3.9}$$

以 $\boldsymbol{V}^{-1}$ 表示 $\boldsymbol{V}$ 的逆张量，并且定义张量 $\hat{\boldsymbol{R}}$ 为

$$\hat{\boldsymbol{R}} = \boldsymbol{V}^{-1}\cdot\boldsymbol{F} \tag{2.3.10}$$

类似于右极分解定理证明中的叙述，易证(2.3.10)式所定义的 $\hat{\boldsymbol{R}}$ 也是正交张量。以 $\boldsymbol{V}$ 左点乘式(2.3.10)，即可得到如下的左极分解形式：

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{V}\cdot\hat{\boldsymbol{R}} \tag{2.3.11}$$

其中的正定对称张量 $\boldsymbol{V}$ 和正交张量 $\hat{\boldsymbol{R}}$ 分别由式(2.3.8)、式(2.3.9)和式(2.3.10)给出。类似于右极分解唯一性的证明，可以证明该左极分解形式中的 $\boldsymbol{V}$ 和 $\hat{\boldsymbol{R}}$ 也都是唯一的。

(2.3.11)式和(2.3.1)式分别为张量 $\boldsymbol{F}$ 的左极分解形式和右极分解形式，所以下面我们只剩下一个任务，即证明左极分解式(2.3.11)式中的正交张量 $\hat{\boldsymbol{R}}$ 和右极分解式(2.3.1)式中的正交张量 $\boldsymbol{R}$ 必然是相等的。简证如下：

由于 $\hat{\boldsymbol{R}}$ 是正交张量，所以我们有

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{V} \cdot \hat{\boldsymbol{R}} = \hat{\boldsymbol{R}} \cdot (\hat{\boldsymbol{R}})^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{V} \cdot \hat{\boldsymbol{R}} = \hat{\boldsymbol{R}} \cdot [(\hat{\boldsymbol{R}})^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{V} \cdot \hat{\boldsymbol{R}}] = \hat{\boldsymbol{R}} \cdot \hat{\boldsymbol{U}} \tag{2.3.12a}$$

其中

$$\hat{\boldsymbol{U}} \equiv (\hat{\boldsymbol{R}})^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{V} \cdot \hat{\boldsymbol{R}} \tag{2.3.12b}$$

显然 $\hat{\boldsymbol{U}}$ 是对称的；此外对任意的非零矢量 $\boldsymbol{X} \neq \boldsymbol{0}$，$\hat{\boldsymbol{U}}$ 的二次型可以化为 $\boldsymbol{V}$ 的二次型，即

$$\begin{aligned}\boldsymbol{X} \cdot \hat{\boldsymbol{U}} \cdot \boldsymbol{X} &= \boldsymbol{X} \cdot (\hat{\boldsymbol{R}})^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{V} \cdot \hat{\boldsymbol{R}} \cdot \boldsymbol{X} \\ &= [\boldsymbol{X} \cdot (\hat{\boldsymbol{R}})^{\mathrm{T}}] \cdot \boldsymbol{V} \cdot (\hat{\boldsymbol{R}} \cdot \boldsymbol{X}) \\ &= (\hat{\boldsymbol{R}} \cdot \boldsymbol{X}) \cdot \boldsymbol{V} \cdot (\hat{\boldsymbol{R}} \cdot \boldsymbol{X})\end{aligned}$$

因为正交张量 $\hat{\boldsymbol{R}}$ 将任意的非零矢量 $\boldsymbol{X} \neq \boldsymbol{0}$ 都映射为非零矢量 $\hat{\boldsymbol{R}} \cdot \boldsymbol{X} \neq \boldsymbol{0}$，其长度恒正，而 $\boldsymbol{V}$ 正定，故此式右端作为 $\boldsymbol{V}$ 的二次型恒大于零，其左端作为 $\hat{\boldsymbol{U}}$ 的二次型也恒大于零，即 $\hat{\boldsymbol{U}}$ 正定。所以式(2.3.12a)的右端是张量 $\boldsymbol{F}$ 的右极分解形式。而由右极分解的唯一性，我们必有 $\hat{\boldsymbol{R}} = \boldsymbol{R}$，$\hat{\boldsymbol{U}} = \boldsymbol{U}$，于是式(2.3.12b)成为

$$\boldsymbol{U} = (\boldsymbol{R})^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{R} \quad (U_{IJ} = R_{kI} V_{kj} R_{jJ}) \tag{2.3.13a}$$

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} \quad (V_{ij} = R_{iK} U_{KJ} R_{jJ}) \tag{2.3.13b}$$

其中式(2.3.13b)可以由式(2.3.13a)左点乘以 $\boldsymbol{R}$、右点乘以 $\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}$ 而得到。这样我们不但证明了左、右极分解中的正交张量 $\boldsymbol{R}$ 是相同的，而且给出了正定对称张量 $\boldsymbol{U}$ 和 $\boldsymbol{V}$ 之间的关系(2.3.13)式。证毕。

当上述的可逆张量 $\boldsymbol{F}$ 为正则运动的变形梯度张量 $\boldsymbol{F}$ 时，我们有 $\|\boldsymbol{F}\| = \|\boldsymbol{R}\| \|\boldsymbol{U}\| > 0$，因为 $\boldsymbol{U}$ 正定，即 $\|\boldsymbol{U}\| > 0$，所以 $\boldsymbol{R}$ 必是正则的正交张量，即 $\|\boldsymbol{R}\| = 1$。

式(2.3.8)所定义的 $\boldsymbol{B}$ 和式(2.3.3)所定义的 $\boldsymbol{C}$ 分别称为左、右柯西-格林张量(Cauchy-Green tensor)或左、右变形张量(deformation tensor)，而式(2.3.9)所定义的 $\boldsymbol{V}$ 和式(2.3.4)所定义的 $\boldsymbol{U}$ 分别称为左、右伸缩张量(stretch tensor)，式(2.3.5)和式(2.3.10)所定义的正则正交张量 $\boldsymbol{R}$ 称为旋转张量(rotational tensor)。

需要指出的是：当我们对介质运动采取 L 氏和 E 氏两点坐标系进行描述时，因为 $\boldsymbol{F}$ 是两点张量，所以 $\boldsymbol{C}$ 和 $\boldsymbol{U}$ 最常用的形式是 L 氏坐标中的 2 阶张量分量 C_{IJ} 和 U_{IJ}，简言之，它们是“L 氏坐标中的 2 阶张量”；$\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{V}$ 最常用的形式则是 E 氏

坐标中的2阶张量分量 B_{ij} 和 V_{ij}，即它们是“E氏坐标中的2阶张量”；$\boldsymbol{R}(R_{iI})$ 则和 $\boldsymbol{F}(F_{iJ})$ 一样是两点张量。在式(2.3.1)、式(2.3.2)、式(2.3.3)、式(2.3.4)、式(2.3.5)、式(2.3.8)、式(2.3.9)、式(2.3.13)后面的括号中，我们写出了这些公式的笛卡尔分量形式。

2.3.2 $\boldsymbol{C}$、$\boldsymbol{U}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{V}$ 的特征值和特征矢量

尽管我们在前面建立了变形梯度张量的极分解定理，而且理论上给出了 $\boldsymbol{C}$、$\boldsymbol{U}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{V}$ 的求解方法，但一般情况下由正定对称张量 $\boldsymbol{C}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 直接求其平方根张量 $\boldsymbol{U}$ 和 $\boldsymbol{V}$ 实际上是很困难的，因为我们并没有这样的一般方法和公式。实际求解时我们必须通过特征值和特征矢量的方法来进行，为此我们首先来证明如下关于它们特征值和特征矢量的定理。

定理 $\boldsymbol{U}$、$\boldsymbol{C}$、$\boldsymbol{V}$、$\boldsymbol{B}$ 特征值和特征矢量的关系如表2.1所示。

表2.1

	$\boldsymbol{U}$	$\boldsymbol{C}$	$\boldsymbol{V}$	$\boldsymbol{B}$
特征值	λ	λ^2	λ	λ^2
特征矢量	$\boldsymbol{N}(N_I)$	$\boldsymbol{N}(N_I)$	$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{N}\ (n_i=R_{iI}N_I)$	$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{N}\ (n_i=R_{iI}N_I)$

证明 设 $\boldsymbol{N}$ 是 $\boldsymbol{U}$ 的与其特征值 λ 相对应的特征矢量，则有

$$\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{N}=\lambda\boldsymbol{N}=\lambda\boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{N},\quad(\boldsymbol{U}-\lambda\boldsymbol{I})\cdot\boldsymbol{N}=\boldsymbol{0}\tag{a}$$

因为 $\boldsymbol{N}$ 作为 $\boldsymbol{U}$ 的特征矢量为非零矢量，即线性齐次代数方程组(a)有非零解，故有

$$\|\boldsymbol{U}-\lambda\boldsymbol{I}\|=0\tag{b}$$

由式(b)即可求出 $\boldsymbol{U}$ 的全部特征值 λ，通常将(b)式称之为 $\boldsymbol{U}$ 的特征方程。由特征方程(b)式求出 $\boldsymbol{U}$ 的全部特征值 λ 之后，将各个特征值代入线性齐次代数方程组(a)式中并求解，即可求出与此特征值相对应的特征矢量 $\boldsymbol{N}$。

利用(2.3.13)式和(a)式，我们有

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{V}-\lambda\boldsymbol{I})\cdot(\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{N})&=(\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}-\lambda\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}})\cdot(\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{N})\\&=\boldsymbol{R}\cdot(\boldsymbol{U}-\lambda\boldsymbol{I})\cdot\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{N}\\&=\boldsymbol{R}\cdot(\boldsymbol{U}-\lambda\boldsymbol{I})\cdot\boldsymbol{N}=\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}\end{aligned}$$

即

$$\boldsymbol{V}\cdot(\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{N})=\lambda(\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{N})\tag{c}$$

式(c)即说明 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{N}$ 是 $\boldsymbol{V}$ 的特征矢量，而 λ 是其相应的特征值。同时我们又有

$$\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{N}=\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{N}=\boldsymbol{U}\cdot(\lambda\boldsymbol{N})=\lambda\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{N}=\lambda^2\boldsymbol{N} \tag{d}$$

$$\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{n}=\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n}=\boldsymbol{V}\cdot(\lambda\boldsymbol{n})=\lambda\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n}=\lambda^2\boldsymbol{n} \tag{e}$$

式(d)和式(e)分别说明 $\boldsymbol{N}$ 和 $\boldsymbol{n}$ 分别是 $\boldsymbol{C}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的特征矢量，相应的特征值都是 λ^2。证毕。

我们顺便指出：$\boldsymbol{U}^{-1}$ 和 $\boldsymbol{V}^{-1}$ 的特征值都是 $\dfrac{1}{\lambda}$，而其相应的特征矢量也分别是 $\boldsymbol{N}$ 和 $\boldsymbol{n}$，读者可作为练习证明之。

2.3.3 左右极分解的具体实施($\boldsymbol{U}$、$\boldsymbol{V}$、$\boldsymbol{R}$ 的具体求法)

现在我们可以实现张量 $\boldsymbol{F}$ 的极分解了。首先由本节公式(2.3.3)式求出正定对称张量 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{F}$，然后求出其特征值 λ_1^2、λ_2^2、λ_3^2 和相应的一组幺正特征矢量 $\boldsymbol{N}_1$、$\boldsymbol{N}_2$、$\boldsymbol{N}_3$。根据上面的定理可知，$\boldsymbol{U}$ 的特征值将是 $\lambda_1>0$、$\lambda_2>0$、$\lambda_3>0$，相应的幺正特征矢量组也是 $\boldsymbol{N}_1$、$\boldsymbol{N}_2$、$\boldsymbol{N}_3$，于是，如果以 $\boldsymbol{Q}$ 来表示以 $\boldsymbol{N}_1$、$\boldsymbol{N}_2$、$\boldsymbol{N}_3$ 为列矢量的正交矩阵，以 $\boldsymbol{\Lambda}$ 来表示以 λ_1、λ_2、λ_3 为对角元素的对角矩阵，则利用 1.16 节中的公式(1.16.13a)式我们即可得到

$$\boldsymbol{U}=\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{\Lambda}\cdot\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}} \tag{2.3.14a}$$

易证 $\boldsymbol{U}^{-1}$ 的特征值为 $1/\lambda_1$、$1/\lambda_2$、$1/\lambda_3$，相应的幺正特征矢量组仍为 $\boldsymbol{N}_1$、$\boldsymbol{N}_2$、$\boldsymbol{N}_3$，故如以 $\boldsymbol{\Lambda}^{-1}$ 来表示以 $1/\lambda_1$、$1/\lambda_2$、$1/\lambda_3$ 为对角元素的对角矩阵的话，则有

$$\boldsymbol{U}^{-1}=\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\cdot\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}} \tag{2.3.14b}$$

由式(2.3.5)，旋转张量 $\boldsymbol{R}$ 将为

$$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{U}^{-1} \tag{2.3.15}$$

从而左伸缩张量 $\boldsymbol{V}$ 可由如下二公式中的任一公式来计算：

$$\boldsymbol{V}=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{V}=\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} \tag{2.3.16}$$

以上即是我们求解 $\boldsymbol{U}$、$\boldsymbol{V}$、$\boldsymbol{R}$ 的第一种方法。当然，我们也可以以另外一种平行的方法来进行：首先由 $\boldsymbol{F}$ 求出 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}$，进而求出 $\boldsymbol{B}$ 的特征值 λ_1^2、λ_2^2、λ_3^2 和相应的幺正特征矢量组 $\boldsymbol{n}_1$、$\boldsymbol{n}_2$、$\boldsymbol{n}_3$，于是有 $\boldsymbol{V}=\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{\Lambda}\cdot\boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{V}^{-1}=\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\cdot\boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}$，其中 $\boldsymbol{q}$ 是以 $\boldsymbol{n}_1$、$\boldsymbol{n}_2$、$\boldsymbol{n}_3$ 为列矢的矩阵；而 $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{V}^{-1}\cdot\boldsymbol{F}$，$\boldsymbol{U}=\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{F}$，或 $\boldsymbol{U}=\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{R}$。当然我们也可以给出如下的第三种方法：首先由 $\boldsymbol{F}$ 分别求出 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{F}$ 和 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}$，进而分别求出它们的特征值 λ_1^2、λ_2^2、λ_3^2 和各自的幺正特征矢量组 $\boldsymbol{N}_1$、$\boldsymbol{N}_2$、$\boldsymbol{N}_3$ 和 $\boldsymbol{n}_1$、$\boldsymbol{n}_2$、$\boldsymbol{n}_3$，仍以 $\boldsymbol{Q}$ 和 $\boldsymbol{q}$ 表示以它们为列矢量的正交矩阵，则 $\boldsymbol{U}=\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{\Lambda}\cdot\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{V}=\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{\Lambda}\cdot\boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}$；检查 $\boldsymbol{Q}$ 和 $\boldsymbol{q}$ 的行列式，如同为 $+1$ 或 -1 则说明 $\boldsymbol{N}_1$、$\boldsymbol{N}_2$、$\boldsymbol{N}_3$ 和 $\boldsymbol{n}_1$、$\boldsymbol{n}_2$、$\boldsymbol{n}_3$ 同定向，否则可通过改变某一个 $\boldsymbol{n}$ 的符号而得出一组与 $\boldsymbol{N}_1$、$\boldsymbol{N}_2$、$\boldsymbol{N}_3$

同定向的$\boldsymbol{n}_1$、$\boldsymbol{n}_2$、$\boldsymbol{n}_3$，此时便有 $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}$，此式可由表 2.1 中$\boldsymbol{n}_1$、$\boldsymbol{n}_2$、$\boldsymbol{n}_3$ 与$\boldsymbol{N}_1$、$\boldsymbol{N}_2$、$\boldsymbol{N}_3$ 的三个关系合在一起写为矩阵形式而得出。

以上即是对变形梯度张量 $\boldsymbol{F}$(以及任何一个可逆 2 阶张量)进行左右极分解的一般方法。但是有一种特殊情况，我们可以更简洁地完成其极分解：这就是当我们由 $\boldsymbol{F}$ 求出的$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{F}$ 恰为正定的对角型矩阵时，此时显然其平方根张量 $\boldsymbol{U}$ 即是以$\boldsymbol{C}$ 的各对角元素之算术平方根为对角元素的对角型矩阵，而以后的其他求解运算自然也就很简单了。

2.3.4 变形梯度张量极分解的物理意义

1. U 和 V 的特征值和特征矢量的意义

因为 $\boldsymbol{U}$ 的特征值λ 和相应的特征矢量$\boldsymbol{N}$ 由下式定义：

$$\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{N}=\lambda\boldsymbol{N}\quad(U_{IJ}N_J=\lambda N_I)\tag{2.3.17}$$

所以特征矢量 $\boldsymbol{N}$ 的方向(主方向)与对它进行映射变换 $\boldsymbol{U}$ 之后所得的像矢量$\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{N}$ 共线，即特征矢量 $\boldsymbol{N}$ 是张量$\boldsymbol{U}$ 的不变子空间，而特征值 λ 即是主方向的像矢量对像原矢量的伸缩比。所以右伸缩张量 $\boldsymbol{U}$ 作为 L 氏坐标系中的一个映射，其作用是：它保持 L 氏构形中主方向线元的定向，而将其伸缩为原线元长度的 λ 倍。这一点也可直接由变形梯度表达的式子来说明：如以 $\boldsymbol{N}$、$\boldsymbol{n}$ 和 $\mathrm{d}S$、$\mathrm{d}s$ 分别表示变形以前的主方向线元 $\mathrm{d}\boldsymbol{X}$ 和变形后的线元 $\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ 方向的单位矢量及其长度，则(2.3.17)式说明它们的方向是相同的；同时

$$\begin{aligned}\lambda^2&=(\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{N})\cdot(\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{N})=(\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}})\cdot(\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{N})\\&=\boldsymbol{N}\cdot(\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{U})\cdot\boldsymbol{N}=\boldsymbol{N}\cdot(\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{F})\cdot\boldsymbol{N}\\&=(\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}})\cdot(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{N})=(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{N})\cdot(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{N})\\&=(\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{X})\cdot(\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{X})/\mathrm{d}S^2=\mathrm{d}s^2/\mathrm{d}S^2\end{aligned}$$

即特征值 λ 恰恰等于特征矢量$\boldsymbol{N}$ 方向的线元在$\boldsymbol{F}$ 作用之下的长度伸缩比。

类似地，由 $\boldsymbol{V}$ 的特征值λ 和相应的特征矢量$\boldsymbol{n}$ 的定义：

$$\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n}=\lambda\boldsymbol{n}\quad(V_{ij}n_j=\lambda n_i)\tag{2.3.18}$$

可知左伸缩张量 $\boldsymbol{V}$ 作为 E 氏坐标系中的一个映射，其作用是保持 E 氏构形中主方向线元的定向，而将其伸缩为原线元长度的 λ 倍。

2. 旋转张量 R 的意义

我们曾经讲过正则的正交张量作为一个映射其作用代表旋转，不改变空间任何矢量的长度和任二矢量之间的夹角与定向。由于对正则的运动 $\boldsymbol{R}$ 是正则的正交张量，所以如果 $\mathrm{d}\boldsymbol{X}$ 是 L 氏构形中的任意一个微线元矢量，则

$$\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{R} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{X} \quad (\mathrm{d}x_i = R_{iI}\mathrm{d}X_I) \tag{2.3.19}$$

将被旋转成为E氏构形中的一个同长度的微线元矢量 $\mathrm{d}\boldsymbol{x}$：

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 &= \mathrm{d}\boldsymbol{x} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{R} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{X}) \cdot (\boldsymbol{R} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{X}) = \mathrm{d}\boldsymbol{X} \cdot (\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{R}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{X} \\ &= \mathrm{d}\boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{I} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{X} = \mathrm{d}\boldsymbol{X} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{X} = \mathrm{d}S^2 \end{aligned}$$

这就是旋转张量的意义。

3. 极分解的意义

设 $\mathrm{d}\boldsymbol{X}$ 是L氏构形中的任意一个微线元矢量，运动和变形后成为E氏构形中的微线元矢量 $\mathrm{d}\boldsymbol{x}$，则利用变形梯度张量 $\boldsymbol{F}$ 的右极分解定理，我们有

$$\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{U} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{R} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{X}' \quad (\mathrm{d}x_i = R_{iI}\mathrm{d}X'_I) \tag{2.3.20a}$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{X}' \equiv \boldsymbol{U} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{X} \quad (\mathrm{d}X'_I = U_{IJ}\mathrm{d}X_J) \tag{2.3.20b}$$

式(2.3.20b)和(2.3.20a)说明：变形梯度张量的作用可以分两步走，第一步，先将L氏构形中的微线元 $\mathrm{d}\boldsymbol{X}$ 经右伸缩张量 $\boldsymbol{U}$ 的作用使之变为L氏坐标系中的微线元 $\mathrm{d}\boldsymbol{X}' = \boldsymbol{U} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{X}$，然后经旋转张量 $\boldsymbol{R}$ 的作用使之变为E氏坐标系中的微线元 $\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{R} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{X}' = \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{X}$。在 $\boldsymbol{U}$ 的作用中，主方向线元 $\boldsymbol{N}$ 不改变其方向只是伸缩为原长的 λ 倍，其他方向线元既有伸缩又有不等值的旋转；在 $\boldsymbol{R}$ 作用的过程中所有微线元不变长度地被等值旋转，而主方向微线元 $\boldsymbol{N}$ 被旋转为E氏构形中的微线元 $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{N}$。这即给出了右极分解的物理意义，可以由图2.3说明之。

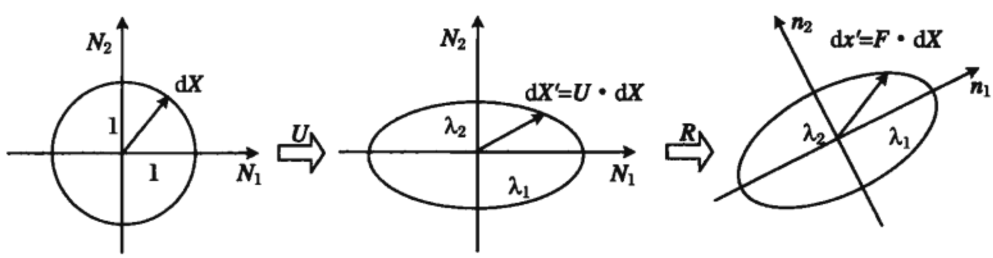


图2.3　右极分解的物理意义

类似地，由变形梯度张量的左极分解，我们有

$$\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{R} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{V} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x}' \quad (\mathrm{d}x_i = V_{ij}\mathrm{d}x'_j) \tag{2.3.21a}$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{R} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{X} \quad (\mathrm{d}x'_j = R_{jJ}\mathrm{d}X_J) \tag{2.3.21b}$$

式(2.3.21b)和式(2.3.21a)即给出了 $\boldsymbol{F}$ 的左极分解的物理解释：先将L氏构形中的微线元 $\mathrm{d}\boldsymbol{X}$ 经 $\boldsymbol{R}$ 作用变为E氏坐标中的微线元 $\mathrm{d}\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{R} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{X}$，在此过程中主方向 $\boldsymbol{N}$ 连同所有线元被等值旋转而不改变长度；再经 $\boldsymbol{V}$ 作用将线元 $\mathrm{d}\boldsymbol{x}'$ 变为E氏坐标系中的线元 $\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{V} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{X}$，此过程中主方向 $\boldsymbol{n}$ 保持方向而伸缩为

原长的 λ 倍，其他方向线元既有伸缩又有不同值的旋转。如图 2.4 所示。

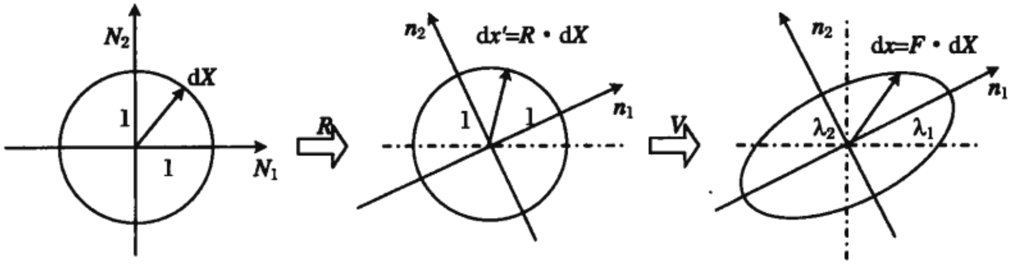


图 2.4　左极分解的物理意义

特别地，当介质在一点只有旋转而没有纯变形时，我们有

$$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{I}, \quad \boldsymbol{V} = \boldsymbol{I}, \quad \boldsymbol{F} = \boldsymbol{R}$$

而当介质在一点只有纯变形而没有旋转时，我们有

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{s} = \boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{F} = \boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{U} = \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{s}$$

而当 L 氏坐标系和 E 氏坐标系取同样的直角笛卡尔坐标系时，则有

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{I}, \quad \boldsymbol{F} = \boldsymbol{U} = \boldsymbol{V}$$

2.3.5　一般曲线坐标中 $\boldsymbol{F}$ 极分解的表述和实现

以上各小节的叙述都是在笛卡尔坐标系中进行的，故 2.3.3 节关于极分解定理的具体实施实际上是以矩阵的运算为基础的。当我们将之推广到一般的曲线坐标系中时，问题则要复杂一些，在此我们做一简要介绍，供读者参考。

以曲线坐标为基础时，最直接和最常用的量是 $F^{i}_{\cdot I} = \dfrac{\partial x^i}{\partial X^I}$ 和 $(F^{-1})^{I}_{\cdot i} = \dfrac{\partial X^I}{\partial x^i}$，它们各对应一个矩阵 $[F^{i}_{\cdot I}]$ 和 $[(F^{-1})^{I}_{\cdot i}]$，实践中我们常常是以这两个矩阵为基础而表达出所有各张量的某种分量所对应的矩阵。例如对 $\boldsymbol{C}$ 和 $\boldsymbol{B}$，我们有：

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{F} = F^{i}_{\cdot I}\boldsymbol{d}^{I}\boldsymbol{e}_{i} \cdot F^{j}_{\cdot J}\boldsymbol{e}_{j}\,\boldsymbol{d}^{J} = F^{i}_{\cdot I}F^{j}_{\cdot J}g_{ij}\,\boldsymbol{d}^{I}\,\boldsymbol{d}^{J} \tag{2.3.22a}$$

故

$$C_{IJ} = F^{i}_{\cdot I}F^{j}_{\cdot J}g_{ij}, \quad [C_{IJ}] = [F^{i}_{\cdot I}]^{\mathrm{T}}[g_{ij}][F^{j}_{\cdot J}] \tag{2.3.22b}$$

由式(2.3.22b)我们即可以通过矩阵的运算而得出 $\boldsymbol{C}$ 的分量 C_{IJ} 及其对应的矩阵。而 $C^{I}_{\cdot J}$、$C_{I}^{\cdot J}$、C^{IJ} 将分别为

$$C^{I}_{\cdot J} = G^{IK}C_{KJ}, \quad [C^{I}_{\cdot J}] = [G^{IK}][C_{KJ}], \quad C_{I}^{\cdot J} = C^{J}_{\cdot I}(\boldsymbol{C}\text{对称}), \quad [C_{I}^{\cdot J}] = [C^{I}_{\cdot J}]^{\mathrm{T}} \tag{2.3.22c}$$

$$C^{IJ} = C^{I}_{\cdot K}G^{KJ}, \quad [C^{IJ}] = [C^{I}_{\cdot K}][G^{KJ}] \tag{2.3.22d}$$

由式(2.3.22c)和式(2.3.22d)即可通过矩阵的运算而得出 $C^I_{\cdot J}$、$C_I^{\cdot J}$、C^{IJ} 及它们所对应的矩阵。

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{B}=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}=F^i_{\cdot I}\boldsymbol{e}_i\,\boldsymbol{d}^I\cdot F^j_{\cdot J}\,\boldsymbol{d}^J\boldsymbol{e}_j=F^i_{\cdot I}F^j_{\cdot J}G^{IJ}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j \tag{2.3.23a}$$

$$B^{ij}=F^i_{\cdot I}F^j_{\cdot J}G^{IJ},\quad [B^{ij}]=[F^i_{\cdot I}][G^{IJ}][F^j_{\cdot J}]^{\mathrm{T}} \tag{2.3.23b}$$

由式(2.3.23b)我们即可以通过矩阵的运算而得出 $\boldsymbol{B}$ 的分量 B^{ij} 及其对应的矩阵。而 $B_i^{\cdot j}$、$B^i_{\cdot j}$、B_{ij} 将分别为

$$B_i^{\cdot j}=g_{ik}B^{kj},\quad [B_i^{\cdot j}]=[g_{ik}][B^{kj}],\quad B^i_{\cdot j}=B_j^{\cdot i}(\boldsymbol{B}\text{ 对称}),\quad [B^i_{\cdot j}]=[B_i^{\cdot j}]^{\mathrm{T}} \tag{2.3.23c}$$

$$B_{ij}=B_i^{\cdot k}g_{kj},\quad [B_{ij}]=[B_i^{\cdot k}][g_{kj}] \tag{2.3.23d}$$

由式(2.3.23c)和式(2.3.23d)我们即可通过矩阵的运算而得出 $B_i^{\cdot j}$、$B^i_{\cdot j}$、B_{ij} 及它们所对应的矩阵。

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B}^{-1}&=(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}})^{-1}=(\boldsymbol{F}^{-1})^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{F}^{-1}\\&=(F^{-1})^I_{\cdot i}\boldsymbol{e}^i\,\boldsymbol{d}_I\cdot(F^{-1})^J_{\cdot j}\,\boldsymbol{d}_J\boldsymbol{e}^j=(F^{-1})^I_{\cdot i}(F^{-1})^J_{\cdot j}G_{IJ}\boldsymbol{e}^i\boldsymbol{e}^j\end{aligned} \tag{2.3.24a}$$

$$(B^{-1})_{ij}=(F^{-1})^I_{\cdot i}(F^{-1})^J_{\cdot j}G_{IJ},\quad [(B^{-1})_{ij}]=[(F^{-1})^I_{\cdot i}]^{\mathrm{T}}[G_{IJ}][(F^{-1})^J_{\cdot j}] \tag{2.3.24b}$$

$$(B^{-1})_i^{\cdot j}=(B^{-1})_{ik}g^{kj},\quad [(B^{-1})_i^{\cdot j}]=[(B^{-1})_{ik}][g^{kj}] \tag{2.3.24c}$$

$$(B^{-1})^i_{\cdot j}=(B^{-1})_j^{\cdot i},\quad [(B^{-1})^i_{\cdot j}]=[(B^{-1})_i^{\cdot j}]^{\mathrm{T}} \tag{2.3.24d}$$

$$(B^{-1})^{ij}=(B^{-1})^i_{\cdot k}g^{kj},\quad [(B^{-1})^{ij}]=[(B^{-1})^i_{\cdot k}][g^{kj}] \tag{2.3.24e}$$

由式(2.3.24b)～式(2.3.24e)，我们可以求出 $(B^{-1})_{ij}$、$(B^{-1})_i^{\cdot j}$、$(B^{-1})^i_{\cdot j}$、$(B^{-1})^{ij}$ 及它们相应的矩阵。

将

$$\boldsymbol{U}^2=\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{U}=\boldsymbol{C} \tag{2.3.25a}$$

写为指标记法，即

$$U^I_{\cdot K}U^K_{\cdot J}=C^I_{\cdot J},\quad [U^I_{\cdot K}][U^K_{\cdot J}]=[C^I_{\cdot J}] \tag{2.3.25b}$$

式(2.3.25b)说明：矩阵 $[U^I_{\cdot J}]$ 恰是矩阵 $[C^I_{\cdot J}]$ 的平方根矩阵，可以利用 2.3.3 节中的方法通过其特征值和特征矢量而求出之。至于 $\boldsymbol{U}$ 的其他分量，可通过度量张量 $\boldsymbol{G}$ 提升或下降指标而得到。

现在我们可以完成极分解了：

(1) 首先由式(2.3.22b)算出 $[C_{IJ}]$，再由式(2.3.22c)算出 $[C^I_{\cdot J}]$。

(2) 然后由 2.3.3 节的方法求出 $[C^I_{\cdot J}]$ 的平方根矩阵 $[U^I_{\cdot J}]$，即如果矩阵 $[C^I_{\cdot J}]$ 的特征值为 λ_1^2、λ_2^2、λ_3^2，幺正的特征矢量组为 $\boldsymbol{N}_1$、$\boldsymbol{N}_2$、$\boldsymbol{N}_3$ 的话，则 $[U^I_{\cdot J}]=\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{\Lambda}\cdot\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}$，其中的 $\boldsymbol{Q}$ 和 $\boldsymbol{\Lambda}$ 与 2.3.3 节记号的含义一样；因为 $U^I_{\cdot K}(U^{-1})^K_{\cdot J}=\delta^I_J$，所

以$[(U^{-1})^{K}_{\cdot J}]$是矩阵$[U^{I}_{\cdot K}]$的逆矩阵，故$[(U^{-1})^{K}_{\cdot J}]=\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\cdot\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}$。

(3) 将$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{U}^{-1}$写为指标记法和矩阵记法，即

$$R^{i}_{\cdot I}=F^{i}_{\cdot K}(U^{-1})^{K}_{\cdot I},\quad [R^{i}_{\cdot I}]=[F^{i}_{\cdot K}][(U^{-1})^{K}_{\cdot I}] \tag{2.3.26a}$$

由式(2.3.26a)即可求出$R^{i}_{\cdot I}$或$[R^{i}_{\cdot I}]$；同时我们有

$$(R^{\mathrm{T}})^{I}_{\cdot i}=(R^{\mathrm{T}})_{J}^{\cdot j}G^{JI}g_{ji}=R^{j}_{\cdot J}G^{JI}g_{ij},\quad [(R^{\mathrm{T}})^{I}_{\cdot i}]=[G^{II}][R^{j}_{\cdot J}]^{\mathrm{T}}[g_{ij}] \tag{2.3.26b}$$

由式(2.3.26b)可算出$(R^{\mathrm{T}})^{I}_{\cdot i}$和所组成的矩阵$[(R^{\mathrm{T}})^{I}_{\cdot i}]$。求$[(R^{\mathrm{T}})^{I}_{\cdot i}]$的另一个方法是：它是矩阵$[R^{i}_{\cdot I}]$的逆矩阵。

(4) 将公式$\boldsymbol{V}=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}$写为指标记法，即

$$V^{i}_{\cdot j}=F^{i}_{\cdot J}(R^{\mathrm{T}})^{J}_{\cdot j},\quad [V^{i}_{\cdot j}]=[F^{i}_{J}][(R^{\mathrm{T}})^{J}_{\cdot j}] \tag{2.3.27}$$

由此可算出$V^{i}_{\cdot j}$及其所组成的矩阵；由公式$V_{i}^{\cdot j}=V^{j}_{\cdot i}$、$V^{ij}=V^{i}_{\cdot k}g^{kj}$、$V_{ij}=V_{i}^{\cdot k}g_{kj}$可得出$V_{i}^{\cdot j}$、$V^{ij}$、$V_{ij}$及它们所组成的矩阵。

这样，我们就给出了在一般曲线坐标中实现极分解的第一种方法，即首先由$\boldsymbol{C}$求$\boldsymbol{U}$，再求$\boldsymbol{R}$和$\boldsymbol{V}$及其各种分量形式。当然我们也可以类似地按第二种方法进行，即首先由$\boldsymbol{B}$求$\boldsymbol{V}$，再求$\boldsymbol{R}$和$\boldsymbol{U}$及其各种分量形式。

2.4 应变张量

在1.8节中，作为张量的一个实例我们曾在一般的曲线坐标中讲过应变张量，但为了物理概念更加清晰起见，我们在此节将在笛卡尔坐标系中重新讲解并进一步深化应变张量的概念。

2.4.1 应变张量的定义

为全面描述一点附近的变形情况，只要知道此点附近任一方向上线元$\mathrm{d}\boldsymbol{X}$的伸缩情况，而这一点可以由该线元在变形前后长度的平方差所表征。如仍以$\mathrm{d}S$、$\mathrm{d}s$分别表示变形前的线元$\mathrm{d}\boldsymbol{X}$和变形后的线元$\mathrm{d}\boldsymbol{x}$的长度，则

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s^2-\mathrm{d}S^2&=\mathrm{d}\boldsymbol{x}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{x}-\mathrm{d}\boldsymbol{X}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{X}\\&=(\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{X})\cdot(\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{X})-\mathrm{d}\boldsymbol{X}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{X}\\&=(\mathrm{d}\boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}})\cdot(\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{X})-\mathrm{d}\boldsymbol{X}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{X}\end{aligned}$$

$$= \mathrm{d}\boldsymbol{X} \cdot (\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{F}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{X} - \mathrm{d}\boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{I} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{X}$$

即

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 - \mathrm{d}S^2 &= \mathrm{d}\boldsymbol{X} \cdot [(\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{F}) - \boldsymbol{I}] \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{X} \\ &= \mathrm{d}\boldsymbol{X} \cdot [\boldsymbol{C} - \boldsymbol{I}] \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{X} = \mathrm{d}\boldsymbol{X} \cdot [\boldsymbol{U}^2 - \boldsymbol{I}] \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{X} \end{aligned}$$

这说明，任意线元长度平方的改变都可以表达为其变形前线元 $\mathrm{d}\boldsymbol{X}$ 的二次型。

如我们定义一个量 $\boldsymbol{E}$ 为

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{F} - \boldsymbol{I}) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{C} - \boldsymbol{I}) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{U}^2 - \boldsymbol{I}) \tag{2.4.1a}$$

则有

$$\mathrm{d}s^2 - \mathrm{d}S^2 = 2\mathrm{d}\boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{X} \tag{2.4.2a}$$

将式(2.4.1a)和式(2.4.2a)写为指标形式，即有

$$E_{IJ} = \frac{1}{2}(F_{kI}F_{kJ} - \delta_{IJ}) = \frac{1}{2}(C_{IJ} - \delta_{IJ}) = \frac{1}{2}(U_{IK}U_{KJ} - \delta_{IJ}) \tag{2.4.1b}$$

$$\mathrm{d}s^2 - \mathrm{d}S^2 = 2\mathrm{d}X_I E_{IJ} \mathrm{d}X_J \tag{2.4.2b}$$

由于 $\boldsymbol{C}$ 是 2 阶对称张量，所以我们所定义的量 $\boldsymbol{E}$ 显然是对称的，即有

$$\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{E} \quad (E_{JI} = E_{IJ}) \tag{2.4.3}$$

又由于 $\mathrm{d}X_I$ 和 $\mathrm{d}X_J$ 是 L 氏坐标中的矢量，$\mathrm{d}s^2 - \mathrm{d}S^2$ 是标量，所以对式(2.4.2b)应用 1.5 节商法则的定理四，知 2 阶对称系统 E_{IJ} 必是 L 氏坐标系的 2 阶张量，称之为 Lagrange 或 Green 应变张量(strain tensor)。(2.4.2)式说明：一点处任意方向上的线元 $\mathrm{d}\boldsymbol{X}$ 长度平方的改变都可以由以 $\boldsymbol{E}$ 为系数矩阵的 $\mathrm{d}\boldsymbol{X}$ 的二次型所表达。而且由(2.4.2)式容易证明：一点处所有方向上的线元伸缩为 0 的充要条件是 $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{0}$。所以 $\boldsymbol{E}$ 不但完全刻画了一点附近的变形情况，而且 $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{0}$ 对应着一点处完全没有变形，所以我们将它称为应变张量是恰当的。$\boldsymbol{C}$ 和 $\boldsymbol{U}$ 也可以完全刻画一点附近的变形情况，但是介质完全没有变形的零应变情况则对应 $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{I}$ 和 $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{I}$，故人们不把 $\boldsymbol{C}$ 和 $\boldsymbol{U}$ 称为应变张量。

类似地，我们有

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 - \mathrm{d}S^2 &= \mathrm{d}\boldsymbol{x} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x} - \mathrm{d}\boldsymbol{X} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{X} \\ &= \mathrm{d}\boldsymbol{x} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x} - (\boldsymbol{F}^{-1} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x}) \cdot (\boldsymbol{F}^{-1} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x}) \\ &= \mathrm{d}\boldsymbol{x} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x} - [\mathrm{d}\boldsymbol{x} \cdot (\boldsymbol{F}^{-1})^{\mathrm{T}}] \cdot (\boldsymbol{F}^{-1} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x}) \\ &= \mathrm{d}\boldsymbol{x} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x} - \mathrm{d}\boldsymbol{x} \cdot [(\boldsymbol{F}^{-1})^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{F}^{-1}] \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x} \\ &= \mathrm{d}\boldsymbol{x} \cdot [\boldsymbol{I} - (\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}})^{-1}] \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x} \end{aligned}$$

这说明，任意线元长度平方的改变也都可以表达为其变形后线元 $\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ 的二次型。

定义量 $\boldsymbol{e}$ 如下：

$$e = \frac{1}{2}[I - (F \cdot F^{T})^{-1}] = \frac{1}{2}(I - B^{-1}) = \frac{1}{2}(I - V^{-2}) \quad (2.4.4a)$$

则有

$$ds^2 - dS^2 = 2dx \cdot e \cdot dx \quad (2.4.5a)$$

将式(2.4.4a)和式(2.4.5a)写为指标形式，即有

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(\delta_{ij} - F_{Ki}^{-1}F_{Kj}^{-1}) = \frac{1}{2}(\delta_{ij} - B_{ij}^{-1}) = \frac{1}{2}(\delta_{ij} - V_{ik}^{-1}V_{kj}^{-1}) \quad (2.4.4b)$$

$$ds^2 - dS^2 = 2dx_i e_{ij} dx_j \quad (2.4.5b)$$

(2.4.4)式所定义的量 e 也是对称的：

$$e^{T} = e \quad (e_{ji} = e_{ij}) \quad (2.4.6)$$

又由于 dx_i、dx_j 是 E 氏坐标中的矢量，$ds^2 - dS^2$ 是标量，故对(2.4.5b)应用 1.5 节商法则的定理四，知 2 阶对称系统 e_{ij} 必是 E 氏坐标系的 2 阶张量，称之为 Euler 或 Almansi 应变张量。(2.4.5)式说明：一点处任意方向上的线元长度平方的改变也可以由以 e 为系数矩阵的 dx 的二次型所表达。而且由(2.4.5)式容易证明：一点处所有方向上的线元伸缩为 0 的充要条件是 $e = 0$。所以 e 也可完全刻画一点附近的变形情况，而且 $e = 0$ 也对应着一点处完全没有变形，所以我们将之称为应变张量也是恰当的。同样，B 和 V 也可以完全刻画一点附近的变形情况，介质完全没有变形的零应变情况也对应着 $B = I$ 和 $V = I$。

在此我们强调指出：尽管我们所定义的介质中一点处的 L 氏应变张量 E 和 E 氏应变张量 e 分别是 L 氏坐标中的 2 阶张量和 E 氏坐标中的 2 阶张量，但它们都是反映介质现时构形相对于初始构形变形状态的张量，换言之，它们都是以介质的初始构形为参考构形而定义的应变张量。

2.4.2　用位移场表达的应变张量

有时介质的运动和变形不是通过 L 氏坐标和 E 氏坐标之间的映射关系给出的，而是通过以 L 氏坐标或 E 氏坐标所描述的位移场来给出的，故我们将推出由位移场所表达的应变张量的表达式。

现以 u 来表达粒子 P 在任意时刻的位移矢量，则我们可以给出其 L 氏描述 $u = u(X, t)$ 和 E 氏描述 $u = u(x, t)$。以 O、o、b 分别表示 L 氏坐标系的原点、E 氏坐标系的原点、o 相对 O 的固定矢量，如图 2.5 所示，则有矢量方程：

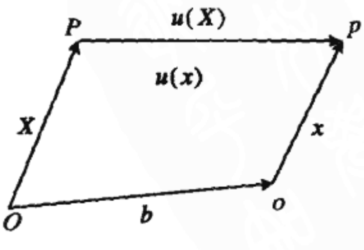


图 2.5　位移场

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{b} - \boldsymbol{X} \tag{2.4.7}$$

若将该矢量方程投影到L氏坐标系中,则有

$$u_I = S_{Ii}x_i + S_{Ii}b_i - X_I \tag{2.4.8a}$$

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{x} + \boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{b} - \boldsymbol{X} \tag{2.4.8b}$$

其中 $\boldsymbol{S}$ 为漂移张量,它是一个正交张量。以 $\boldsymbol{H}=\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{X}}$来表示介质位移在L氏构形中的位移梯度张量,则(2.4.8)式将给出

$$H_{IJ} = \frac{\partial u_I}{\partial X_J} = S_{Ii}F_{iJ} - \delta_{IJ}, \quad \boldsymbol{H} = \boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{F} - \boldsymbol{I} \tag{2.4.9}$$

故

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\cdot(\boldsymbol{H}+\boldsymbol{I}), \quad \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}} = (\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{I})\cdot\boldsymbol{S} \tag{2.4.10}$$

将(2.4.10)式代入(2.4.1a)式,可得

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{H}+\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}) + \frac{1}{2}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{H} \tag{2.4.11a}$$

写为指标记法,即为

$$E_{IJ} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_I}{\partial X_J} + \frac{\partial u_J}{\partial X_I}\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial u_K}{\partial X_I}\frac{\partial u_K}{\partial X_J} \tag{2.4.11b}$$

式(2.4.11)即是以L氏坐标中的位移梯度 $\boldsymbol{H}=\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{X}}$表达的拉格朗日应变张量。

类似地,若将矢量方程(2.4.7)式投影到E氏坐标系中,则有

$$u_i = x_i + b_i - S_{Ii}X_I \tag{2.4.12a}$$

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{b} - \boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{S} \tag{2.4.12b}$$

若以 $\boldsymbol{h}=\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{x}}$来表示介质位移在E氏构形中的位移梯度张量,则由(2.4.12)式可得

$$h_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \delta_{ij} - S_{Ii}F_{Ij}^{-1}, \quad \boldsymbol{h} = \boldsymbol{I} - \boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{F}^{-1} \tag{2.4.13}$$

所以有

$$\boldsymbol{F}^{-1} = \boldsymbol{S}\cdot(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{h}), \quad (\boldsymbol{F}^{-1})^{\mathrm{T}} = (\boldsymbol{I}-\boldsymbol{h}^{\mathrm{T}})\cdot\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}} \tag{2.4.14}$$

将(2.4.14)式代入(2.4.4)式,即有

$$\boldsymbol{e} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{h}+\boldsymbol{h}^{\mathrm{T}}) - \frac{1}{2}\boldsymbol{h}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{h} \tag{2.4.15a}$$

$$e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\frac{\partial u_k}{\partial x_j} \tag{2.4.15b}$$

式(2.4.15)即是以位移矢量的E氏梯度张量 $\boldsymbol{h}=\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{x}}$所表达的欧拉应变张量的表

达式。

在小位移梯度的情况下，即$|H_{IJ}|\ll 1$或$|h_{ij}|\ll 1$时，我们可以忽略位移梯度的二次项，(2.4.11)式和(2.4.15)式将简化而分别给出L氏线性应变和E氏线性应变的公式，其中前者就是弹性力学中人们所惯用的所谓工程应变的表达式。但需要指出：即使如此，在一般情况下L氏线性应变和E氏线性应变也并不是完全相同的，而只有在介质的位移很小因此我们可以忽略E氏坐标和L氏坐标的区别时，二者才成为近似相等的。

2.4.3 应变张量分量的意义

设L氏构形中的线元$\mathrm{d}\boldsymbol{X}$、$\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{X}}$变形后分别成为E氏构形中的线元$\mathrm{d}\boldsymbol{x}$、$\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{x}}$，初始长度和瞬时长度分别为$\mathrm{d}S$、$\mathrm{d}\hat{S}$和$\mathrm{d}s$、$\mathrm{d}\hat{s}$，在初始构形中这2线元方向的单位矢量和在瞬时构形中这2线元方向的单位矢量分别为$\boldsymbol{N}$、$\hat{\boldsymbol{N}}$和$\boldsymbol{n}$、$\hat{\boldsymbol{n}}$，则我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s^2 &= \mathrm{d}\boldsymbol{x}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{X})\cdot(\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{X})\\ &= (\mathrm{d}\boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}})\cdot(\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{X}) = \mathrm{d}\boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{C}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{X}\end{aligned}$$

即

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{C}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{X},\quad \mathrm{d}\hat{s}^2 = \mathrm{d}\hat{\boldsymbol{X}}\cdot\boldsymbol{C}\cdot\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{X}} \tag{2.4.16}$$

如以$\gamma(\boldsymbol{N})=\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}S}$和$\gamma(\hat{\boldsymbol{N}})=\dfrac{\mathrm{d}\hat{s}}{\mathrm{d}\hat{S}}$分别表示这两个线元的L氏伸缩比(现长/原长)，

而以$\varepsilon(\boldsymbol{N})=\dfrac{\mathrm{d}s-\mathrm{d}S}{\mathrm{d}S}$和$\varepsilon(\hat{\boldsymbol{N}})=\dfrac{\mathrm{d}\hat{s}-\mathrm{d}\hat{S}}{\mathrm{d}\hat{S}}$分别表示这两个线元相对于初始长度的所谓L氏伸缩度，则我们有

$$\gamma^2(\boldsymbol{N}) = \boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{N},\quad \gamma^2(\hat{\boldsymbol{N}}) = \hat{\boldsymbol{N}}\cdot\boldsymbol{C}\cdot\hat{\boldsymbol{N}} \tag{2.4.17}$$

$$\varepsilon(\boldsymbol{N}) = \sqrt{\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{N}}-1,\quad \varepsilon(\hat{\boldsymbol{N}}) = \sqrt{\hat{\boldsymbol{N}}\cdot\boldsymbol{C}\cdot\hat{\boldsymbol{N}}}-1 \tag{2.4.18}$$

特别说来，变形前位于X_1轴方向的线元的L氏伸缩比$\gamma(X_1)$和L氏伸缩度$\varepsilon(X_1)$将分别为

$$\gamma^2(X_1) = C_{11} = 1+2E_{11} \tag{2.4.19}$$

$$\varepsilon(X_1) = \gamma(X_1)-1 = \sqrt{1+2E_{11}}-1 \tag{2.4.20}$$

这说明，应变张量$\boldsymbol{E}$的对角元素E_{11}是和X_1轴上线元的L氏伸缩比$\gamma(X_1)$或L氏伸缩度$\varepsilon(X_1)$通过式(2.4.19)或式(2.4.20)相联系的，这就给出了E_{11}的物理解释，对E_{22}和E_{33}可类似说明。对小应变的情况即$|E_{IJ}|\ll 1$时，由于$|E_{IJ}|\ll 1$，

将式(2.4.20)展开为泰勒级数并忽略 E_{11} 的高阶项,则有 $\varepsilon(X_1)\approx E_{11}$;而此时,对 E_{11} 也可忽略位移梯度的二次项而采用其线性工程应变,故线性工程正应变 E_{11} 的意义即近似等于变形前位于 X_1 轴上线元的 L 氏伸缩度,这就是弹性力学中所讲的。

如果以$\angle(\boldsymbol{n},\hat{\boldsymbol{n}})$表示由线元 $\boldsymbol{n}$ 到 $\hat{\boldsymbol{n}}$ 的角度,则我们有

$$\cos\angle(\boldsymbol{n},\hat{\boldsymbol{n}}) = \boldsymbol{n}\cdot\hat{\boldsymbol{n}} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}\cdot\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{x}}}{\mathrm{d}s\mathrm{d}\hat{s}} = \frac{(\mathrm{d}\boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}})\cdot(\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{X}})}{\sqrt{\mathrm{d}\boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{C}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{X}}\sqrt{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{X}}\cdot\boldsymbol{C}\cdot\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{X}}}}$$

即

$$\cos\angle(\boldsymbol{n},\hat{\boldsymbol{n}}) = \frac{\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{C}\cdot\hat{\boldsymbol{N}}}{\sqrt{\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{N}}\sqrt{\hat{\boldsymbol{N}}\cdot\boldsymbol{C}\cdot\hat{\boldsymbol{N}}}} = \frac{2\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{E}\cdot\hat{\boldsymbol{N}}+\boldsymbol{N}\cdot\hat{\boldsymbol{N}}}{\gamma(\boldsymbol{N})\gamma(\hat{\boldsymbol{N}})} \tag{2.4.21}$$

这说明任二线元 $\mathrm{d}\boldsymbol{X}$ 和 $\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{X}}$ 在变形后之间夹角$\angle(\boldsymbol{n},\hat{\boldsymbol{n}})$的余弦可以由 L 氏应变 $\boldsymbol{E}$ 和线元在变形前的单位矢量 $\boldsymbol{N}$ 和 $\hat{\boldsymbol{N}}$ 而算出。特别说来,对变形前位于 X_1 轴和 X_2 轴上的两个正交的线元,如果以 θ_{12} 来表示它们在变形后之间的夹角的话,则式(2.4.21)将给出

$$\cos\theta_{12} = \frac{C_{12}}{\sqrt{C_{11}C_{22}}} = \frac{2E_{12}}{\sqrt{(1+2E_{11})(1+2E_{22})}} = \frac{2E_{12}}{\gamma_1\gamma_2} \tag{2.4.22}$$

这说明 E_{12} 是与 X_1 轴和 X_2 轴上的线元变形后夹角的余弦成比例的,对 E_{23} 和 E_{31} 可给出类似的公式。这就对 $\boldsymbol{E}$ 的非对角元素给出了物理解释。在 $|E_{IJ}|\ll 1$ 的所谓小应变的情况,且角度改变也很小时,此二线元夹角的减小 α_{12} 将为

$$\alpha_{12} = \frac{\pi}{2}-\theta_{12} \approx \sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta_{12}\right) = \cos\theta_{12} \approx 2E_{12} \tag{2.4.23}$$

式(2.4.23)即说明:在小应变及小角度改变的情况下,$2E_{12}$ 近似等于变形前位于 X_1 轴和 X_2 轴上的两个正交线元在变形后的夹角减小。而这也即是弹性力学中工程应变张量非对角分量的意义。

在前面导出式(2.4.16)~式(2.4.22)各式并说明其物理意义时,我们着眼的是介质在初始构形中的线元 $\boldsymbol{N}$ 并预测其由初始时刻至现时时刻期间的变形情况,所用的变形量也是以初始长度为基准而量度的所谓 L 氏伸缩比 $\gamma(\boldsymbol{N})=\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}S}$ 和 L 氏伸缩度 $\varepsilon(\boldsymbol{N})=\dfrac{\mathrm{d}s-\mathrm{d}S}{\mathrm{d}S}$。如果我们着眼于介质在现时构形中的线元 $\boldsymbol{n}$ 并回顾其由初始时刻至现时时刻期间的变形情况,即我们通过考虑介质的逆运动而研究

介质的变形,并对变形量采用以现时长度为基准而量度的所谓E氏伸缩比 $r(\boldsymbol{n})=\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}s}$ 和E氏伸缩度 $e(\boldsymbol{n})=\frac{\mathrm{d}s-\mathrm{d}S}{\mathrm{d}s}$ 时,则可类似地得到以下各式,读者可作为练习试证之:

$$\mathrm{d}S^2=\mathrm{d}\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{B}^{-1}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{x} \tag{2.4.24}$$

$$r^2(\boldsymbol{n})=\frac{1}{\gamma^2(\boldsymbol{n})}=\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{B}^{-1}\cdot\boldsymbol{n} \tag{2.4.25}$$

$$e(\boldsymbol{n})=1-\sqrt{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{B}^{-1}\cdot\boldsymbol{n}},\quad \varepsilon(\boldsymbol{n})=\frac{1}{\sqrt{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{B}^{-1}\cdot\boldsymbol{n}}}-1 \tag{2.4.26}$$

$$r^2(x_1)=\frac{1}{\gamma^2(x_1)}=B_{11}^{-1}=1-2e_{11} \tag{2.4.27}$$

$$e(x_1)=1-\sqrt{B_{11}^{-1}}=1-\sqrt{1-2e_{11}},\quad \varepsilon(x_1)=\frac{1}{\sqrt{B_{11}^{-1}}}-1=\frac{1}{\sqrt{1-2e_{11}}}-1 \tag{2.4.28}$$

$$\cos\angle(\boldsymbol{N},\hat{\boldsymbol{N}})=\gamma(\boldsymbol{n})\gamma(\hat{\boldsymbol{n}})\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{B}^{-1}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}=\frac{1}{r(\boldsymbol{n})}\frac{1}{r(\hat{\boldsymbol{n}})}\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{B}^{-1}\cdot\hat{\boldsymbol{n}} \tag{2.4.29}$$

$$\cos\varphi_{12}=\gamma(x_1)\gamma(x_2)B_{12}^{-1}=\frac{1}{r(x_1)}\frac{1}{r(x_2)}B_{12}^{-1}=\frac{-2e_{12}}{\sqrt{1-2e_{11}}\sqrt{1-2e_{22}}} \tag{2.4.30}$$

其中 $\gamma(\boldsymbol{n})$ 和 $\varepsilon(\boldsymbol{n})$ 分别表示瞬时构形中的线元 $\boldsymbol{n}$ 相对于变形前的L氏伸缩比和L氏伸缩度,$r(\boldsymbol{n})$ 和 $e(\boldsymbol{n})$ 分别是瞬时构形中的线元 $\boldsymbol{n}$ 的以现时长度为基准而量度的所谓E氏伸缩比和E氏伸缩度,即 $r(\boldsymbol{n})=\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}s}$,$e(\boldsymbol{n})=\frac{\mathrm{d}s-\mathrm{d}S}{\mathrm{d}s}$,$\gamma(x_1)$ 和 $\varepsilon(x_1)$ 分别表示变形后位于 x_1 方向线元的L氏伸缩比和L氏伸缩度,$r(x_1)$ 和 $e(x_1)$ 分别表示变形后位于 x_1 方向线元的E氏伸缩比和E氏伸缩度,$\angle(\boldsymbol{N},\hat{\boldsymbol{N}})$ 表示瞬时构形中的线元 $\boldsymbol{n}$ 和 $\hat{\boldsymbol{n}}$ 在变形前的夹角,φ_{12} 则是瞬时构形中位于 x_1 轴和 x_2 轴方向的线元在变形前的夹角。由于线元 $\boldsymbol{n}$ 是由线元 $\boldsymbol{N}$ 变形而来,故 $\gamma(\boldsymbol{n})=\gamma(\boldsymbol{N})$,$\varepsilon(\boldsymbol{n})=\varepsilon(\boldsymbol{N})$;但显然一般而言,$\gamma(x_1)\neq\gamma(X_1)$,$\varepsilon(x_1)\neq\varepsilon(X_1)$,因为位于 x_1 方向的线元在变形前未必位于 X_1 轴上。同时容易说明:在小应变情况下,由于 $|e_{11}|\ll 1$,故 $\varepsilon(x_1)\approx e_{11}$;在小应变和小角度改变的情况下,由于 $|e_{12}|\ll 1$,$|e_{11}|\ll 1$,$|e_{22}|\ll 1$,故现时刻处于 x_1 轴和 x_2 轴而垂直的两个线元比它们变形前之间夹角的减小值 β_{12} 为

$$\beta_{12}=\varphi_{12}-\frac{\pi}{2}\approx\sin\left(\varphi_{12}-\frac{\pi}{2}\right)=-\cos\varphi_{12}\approx 2e_{12} \tag{2.4.30$'$}$$

在此我们再次强调指出:式(2.4.16)~式(2.4.22)给出的都是L氏构形中的

线元的有关变形量，它们都是通过L氏坐标中的张量 $\boldsymbol{C}$ 或 $\boldsymbol{E}$ 以及L氏构形中的线元 $\mathrm{d}\boldsymbol{X}$ 或 $\boldsymbol{N}$ 而计算的；而式(2.4.24)～式(2.4.30)给出的则是E氏构形中的线元的有关变形量，它们都是通过E氏坐标中的张量 $\boldsymbol{B}^{-1}$ 或 $\boldsymbol{e}$ 以及E氏构形中的线元 $\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ 或 $\boldsymbol{n}$ 而计算的。

2.4.4 应变张量在曲线坐标中的表达式

除了按1.5节中的方法直接导出应变张量在曲线坐标中的表达式外，我们也可以将式(2.4.1a)、式(2.4.4a)中的单位张量 $\boldsymbol{I}$ 写为度量张量 $\boldsymbol{G}$ 或 $\boldsymbol{g}$，同时按2.3节中的方法写出 $\boldsymbol{C}$ 和 $\boldsymbol{B}^{-1}$ 的表达式来实现。于是，(2.4.1a)式和(2.4.4a)式的协变分量形式为

$$\boldsymbol{E}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{G}),\quad E_{IJ}=\frac{1}{2}(C_{IJ}-G_{IJ})=\frac{1}{2}(F^{i}_{\cdot I}F^{j}_{\cdot J}g_{ij}-G_{IJ})\tag{2.4.31}$$

$$\boldsymbol{e}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{g}-\boldsymbol{B}^{-1}),\quad e_{ij}=\frac{1}{2}\left[g_{ij}-(\boldsymbol{B}^{-1})_{ij}\right]=\frac{1}{2}\left[g_{ij}-(\boldsymbol{F}^{-1})^{I}_{\cdot i}\,(\boldsymbol{F}^{-1})^{J}_{\cdot j}G_{IJ}\right]\tag{2.4.32}$$

至于 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{e}$ 的其他形式的分量可以由它们这两种常用的分量分别通过度量张量 G^{IJ} 和 g^{ij} 提升指标而得到。

至于应变张量用位移梯度所表达的式(2.4.11)和式(2.4.15)，写为直接记法则是

$$\boldsymbol{E}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{u}\overleftarrow{\nabla}+\overrightarrow{\nabla}\boldsymbol{u})+\frac{1}{2}(\overrightarrow{\nabla}\boldsymbol{u})\cdot(\boldsymbol{u}\overleftarrow{\nabla})\tag{2.4.33a}$$

$$E_{IJ}=\frac{1}{2}(u_I\overleftarrow{\nabla}_J+\overrightarrow{\nabla}_I u_J)+\frac{1}{2}(\overrightarrow{\nabla}_I u_K)(u^K\overleftarrow{\nabla}_J)\tag{2.4.33b}$$

$$\boldsymbol{e}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{u}\overleftarrow{\nabla}+\overrightarrow{\nabla}\boldsymbol{u})-\frac{1}{2}(\overrightarrow{\nabla}\boldsymbol{u})\cdot(\boldsymbol{u}\overleftarrow{\nabla})\tag{2.4.34a}$$

$$e_{ij}=\frac{1}{2}(u_i\overleftarrow{\nabla}_j+\overrightarrow{\nabla}_i u_j)-\frac{1}{2}(\overrightarrow{\nabla}_i u_k)(u^k\overleftarrow{\nabla}_j)\tag{2.4.34b}$$

其中，∇ 和 ∇ 分别是L氏坐标和E氏坐标中的梯度算子，读者可尝试解出其分量的表达式。

2.5 伸缩率张量和旋转率张量

2.5.1 速度的物质梯度和空间梯度,伸缩率张量和旋转率张量

介质运动时,变形梯度张量 $\boldsymbol{F}$ 也将是L氏坐标 $\boldsymbol{X}$ 和时间 t 的函数,即我们可写出变形梯度张量的L氏描述 $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X},t)$。固定一粒子 $\boldsymbol{X}$ 求 $\boldsymbol{F}$ 对时间的随体导数,有

$$\dot{\boldsymbol{F}} = \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{X}}\right) = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{X}}\left(\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial t}\right) = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \boldsymbol{X}} \tag{2.5.1}$$

即变形梯度 $\boldsymbol{F}$ 的随体导数恰等于质点速度 $\boldsymbol{v}$ 在L氏坐标中的梯度,可称之为速度的物质梯度或L氏梯度。对(2.5.1)式利用求导的链式法则,有

$$\dot{\boldsymbol{F}} = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \boldsymbol{x}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{X}} = \boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{F} \tag{2.5.2a}$$

其中

$$\boldsymbol{L} \equiv \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \boldsymbol{x}} = \dot{\boldsymbol{F}} \cdot \boldsymbol{F}^{-1} \tag{2.5.2b}$$

是速度 $\boldsymbol{v}$ 在E氏坐标中的梯度,简称速度的空间梯度或E氏梯度。根据张量的和分解定理,任一2阶张量都可以唯一地分解为对称张量和反对称张量之和,对 $\boldsymbol{L}$ 进行此种和分解,有

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{D} + \boldsymbol{W} \tag{2.5.3}$$

$$\boldsymbol{D} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{L} + \boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{v}\overleftarrow{\nabla} + \overrightarrow{\nabla}\boldsymbol{v}),\quad D_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) = \frac{1}{2}(v_i\overleftarrow{\nabla}_j + \overrightarrow{\nabla}_i v_j) \tag{2.5.4}$$

$$\boldsymbol{W} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{L} - \boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{v}\overleftarrow{\nabla} - \overrightarrow{\nabla}\boldsymbol{v}),\quad W_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) = \frac{1}{2}(v_i\overleftarrow{\nabla}_j - \overrightarrow{\nabla}_i v_j) \tag{2.5.5}$$

对称张量 $\boldsymbol{D}$ 称为伸缩率张量(stretching rate tensor)或变形率张量(deformation rate tensor),反对称张量 $\boldsymbol{W}$ 称为旋转率张量(spinning rate tensor 或 rotational rate tensor)。如果以 $\mathrm{d}\boldsymbol{u}=\boldsymbol{v}\mathrm{d}t$ 表示 $\mathrm{d}t$ 时间内粒子的微小位移,则有

$$\boldsymbol{D}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}(\mathrm{d}\boldsymbol{u}\overleftarrow{\nabla} + \overrightarrow{\nabla}\mathrm{d}\boldsymbol{u}) = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial \mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{x}} + \left(\frac{\partial \mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{x}}\right)^{\mathrm{T}}\right] \tag{2.5.6}$$

可见，量 $\boldsymbol{D}\mathrm{d}t$ 代表无穷小时间过程 $\mathrm{d}t$ 所产生的相对于前一时刻 t 的构形而量度的线性无穷小增量应变，由于 $\mathrm{d}t$ 可以任意小，故由这一线性无穷小增量应变描述 $\mathrm{d}t$ 中物体的变形是足够精确的，我们称此无穷小增量应变 $\boldsymbol{D}\mathrm{d}t$ 为自然增量应变(natural incremental strain)，故 $\boldsymbol{D}$ 即表示极限意义下该时刻介质相对于紧前一时刻构形的变形速率，所以称它为变形率张量或伸缩率张量是恰当的。但需要说明：$\boldsymbol{D}$ 既不是 L 氏应变张量 $\boldsymbol{E}$ 的随体导数，也不是 E 氏应变 $\boldsymbol{e}$ 的随体导数，所以有的文献将 $\boldsymbol{D}$ 称为应变率张量是不妥当的，而关于应变率张量的概念我们在后面还将进行介绍。

根据第 1 章张量分析的理论，在三维空间中任一反对称张量 $\boldsymbol{W}$ 都与一唯一的矢量 $\boldsymbol{\omega}$ 相对偶，将之应用于旋转率张量 $\boldsymbol{W}$，我们可有

$$\boldsymbol{W} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad W_{ij} = -e_{ijk}\omega_k \tag{2.5.7a}$$

$$\omega_i = -\frac{1}{2}e_{ijk}W_{jk} = -\frac{1}{2}e_{jki}W_{jk} \tag{2.5.7b}$$

$$\boldsymbol{\omega} = -\frac{1}{2}e_{jki}W_{jk}\boldsymbol{e}_i = \frac{1}{2}\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v} \tag{2.5.7c}$$

即与旋转率张量 $\boldsymbol{W}$ 相对偶的矢量 $\boldsymbol{\omega}$ 恰恰等于质点速度的旋度 $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v}$ 的一半，所以称它为旋转率张量是恰当的。事实上，我们有

$$W_{ij}\mathrm{d}x_j = -e_{ijk}\omega_k\mathrm{d}x_j = e_{ikj}\omega_k\mathrm{d}x_j$$

即

$$\boldsymbol{W}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\omega}\times\mathrm{d}\boldsymbol{x} \tag{2.5.8}$$

所以 $\boldsymbol{W}$ 作用于粒子附近的任意线元 $\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ 其效果相当于此线元以角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 旋转的结果，故 $\boldsymbol{\omega}$ 代表了微体的瞬时转动角速度，这也说明把 $\boldsymbol{W}$ 称为旋转率张量是恰当的。通过更进一步的研究我们可以证明：与 $\boldsymbol{W}$ 对偶的矢量 $\boldsymbol{\omega}$ 代表了伸缩率张量 $\boldsymbol{D}$ 的主轴方向的旋转角速度，这可以表达为：如果 $\boldsymbol{m}$ 是 $\boldsymbol{D}$ 的单位主方向矢量，即如果

$$\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{m} = \lambda\boldsymbol{m} \quad 且 \quad \boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{m} = 1 \tag{2.5.9a}$$

则有

$$\dot{\boldsymbol{m}} = \boldsymbol{W}\cdot\boldsymbol{m} = \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{m} \tag{2.5.9b}$$

而这恰恰就是理论力学中单位矢量以角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 旋转时其端点速度的公式。现在我们来证明式(2.5.9)。

对瞬时构形中的任意线元 $\mathrm{d}\boldsymbol{x}$，其随体导数为

$$\overline{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}^{\cdot} = \overline{\boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{X}}^{\cdot} = \dot{\boldsymbol{F}} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{L} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x} \tag{2.5.10}$$

这里我们利用了式(2.5.2a)。如果以 $\mathrm{d}s = |\mathrm{d}\boldsymbol{x}|$，$\boldsymbol{n} = \mathrm{d}\boldsymbol{x}/\mathrm{d}s$ 分别表示线元 $\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ 的长度和其方向的单位矢量，则我们有

$$2\mathrm{d}s\,\overline{\mathrm{d}s}^{\cdot} = \overline{\mathrm{d}s^2}^{\cdot} = \overline{\mathrm{d}\boldsymbol{x} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x}}^{\cdot} = 2\mathrm{d}\boldsymbol{x} \cdot \overline{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}^{\cdot} = 2\mathrm{d}\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{L} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x} \tag{2.5.11a}$$

即

$$\frac{\overline{\mathrm{d}s}^{\cdot}}{\mathrm{d}s} = \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{n} = \boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{D} + \boldsymbol{W}) \cdot \boldsymbol{n} \tag{2.5.11b}$$

由于 $\boldsymbol{W}$ 是反对称张量，所以易证：

$$\mathrm{d}\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{W} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x} = 0, \quad \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{W} \cdot \boldsymbol{n} = 0 \tag{2.5.12}$$

于是式(2.5.11)成为

$$\overline{\mathrm{d}s^2}^{\cdot} = 2\mathrm{d}s\,\overline{\mathrm{d}s}^{\cdot} = 2\mathrm{d}\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x} \tag{2.5.13a}$$

$$\frac{\overline{\mathrm{d}s}^{\cdot}}{\mathrm{d}s} = \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{n} \tag{2.5.13b}$$

再利用式(2.5.10)、式(2.5.13a) 和式(2.5.13b)，我们有

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{n}} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}s}\right) = \frac{1}{\mathrm{d}s}\overline{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}^{\cdot} - \frac{1}{\mathrm{d}s^2}\overline{\mathrm{d}s}^{\cdot}\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \frac{1}{\mathrm{d}s}\boldsymbol{L} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x} - \frac{1}{\mathrm{d}s}(\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{n})\mathrm{d}\boldsymbol{x} \\ &= \frac{1}{\mathrm{d}s}(\boldsymbol{D} + \boldsymbol{W}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x} - \frac{1}{\mathrm{d}s}(\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{n})\mathrm{d}\boldsymbol{x}\end{aligned}$$

即

$$\dot{\boldsymbol{n}} = (\boldsymbol{D} + \boldsymbol{W}) \cdot \boldsymbol{n} - (\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{n})\boldsymbol{n} \tag{2.5.14}$$

式(2.5.14)对任何方向线元的单位矢量 $\boldsymbol{n}$ 都是成立的，可以看到，$\dot{\boldsymbol{n}}$ 除了与 $\boldsymbol{n}$ 以及 $\boldsymbol{W}$ 有关以外还与 $\boldsymbol{D}$ 有关。特别地，当我们取 $\boldsymbol{n}$ 为 $\boldsymbol{D}$ 的主方向的单位矢量 $\boldsymbol{m}$ 时，我们有

$$\boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{m} = \lambda\boldsymbol{m}, \quad \boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{m} = 1 \tag{2.5.9a}$$

于是式(2.5.14)成为

$$\dot{\boldsymbol{m}} = (\boldsymbol{D} + \boldsymbol{W}) \cdot \boldsymbol{m} - (\boldsymbol{m} \cdot \lambda\boldsymbol{m})\boldsymbol{m} = (\boldsymbol{D} + \boldsymbol{W}) \cdot \boldsymbol{m} - \lambda\boldsymbol{m} = \boldsymbol{W} \cdot \boldsymbol{m}$$

这样我们就证明了式(2.5.9b)。

设介质速度场的 E 氏表述为

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t)$$

将 t 时刻位于 $\boldsymbol{x}$ 处的粒子质点速度 $\boldsymbol{v}$ 在其临近位置 $\boldsymbol{x}_0$ 处进行 Taylor 展开，只取一

次项，有

$$v = v(x,t) = v(x_0,t) + L \cdot dx = v(x_0,t) + W \cdot dx + D \cdot dx \tag{2.5.15}$$

其中，D 和 W 都取参考位置 x_0 处在 t 时刻的值。(2.5.15)式即是著名的 Helmholz 流场速度分解定理：任何一个粒子的速度可以分解为随同临近参考点一起的平移速度 $v(x_0,t)$、绕参考点的纯刚体旋转引起的速度 $W \cdot dx$ 和由微体纯变形引起的速度 $D \cdot dx$ 之和。

2.5.2 相对变形梯度张量(relative deformation gradient tensor)

现在我们考虑介质的三个构形：一个是 $t=0$ 时的初始参考构形，一个是 t 时刻的构形，一个是 t 以后另一时刻 τ 时的构形，如图 2.6 所示。分别以 X、x 和 ξ 表示粒子在这三个构形中的位置矢量，则介质的运动规律可写为

$$x = x(X,t), \quad X = X(x,t), \quad \xi = \xi(X,\tau) \tag{2.5.16}$$

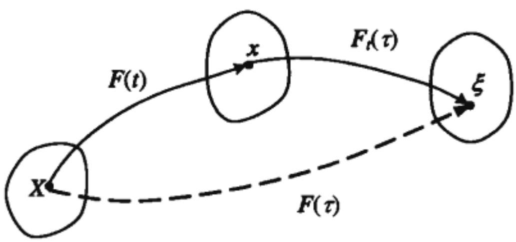


图 2.6 相对变形梯度

(2.5.16)式的第一式是以 $t=0$ 时的构形为参考构形来描述 t 时介质的运动，含义是 $t=0$ 时的粒子 X 在 t 时刻到达位置 x 处；作为第一式反函数的第二式是对 t 时刻介质逆运动的描述，含义是 t 时刻到达位置 x 的粒子在 $t=0$ 时位于位置 X 处；(2.5.16)式的第三式是以 $t=0$ 时的构形为参考构形来描述 τ 时介质的运动，含义是 $t=0$ 时的粒子 X 在 τ 时刻到达位置 ξ 处。将(2.5.16)式的第二式代入第三式，我们有

$$\xi = \xi(X(x,t),\tau) \equiv \xi_t(x,\tau) \tag{2.5.17}$$

(2.5.17)式所定义的以 t 为参数的复合函数 $\xi_t(x,\tau)$ 是以 t 时刻的构形为参考构形对介质在 τ 时刻运动的描述，其含义是：t 时刻位于 x 处的粒子在 τ 时刻到达位置 ξ 处。以 t 时刻构形为参考构形求复合函数(2.5.17)式对 x 的变形梯度，称之为介质在 τ 时刻相对于 t 时刻的相对变形梯度，记为 $F_t(\tau)$，我们有

$$\boldsymbol{F}_t(\tau)=\frac{\partial \xi}{\partial \boldsymbol{x}}=\frac{\partial \xi}{\partial \boldsymbol{X}}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial \boldsymbol{x}}=\boldsymbol{F}(\tau)\cdot\boldsymbol{F}^{-1}(t) \tag{2.5.18a}$$

$$\boldsymbol{F}(\tau)=\boldsymbol{F}_t(\tau)\cdot\boldsymbol{F}(t) \tag{2.5.18b}$$

其中 $\boldsymbol{F}(t)$、$\boldsymbol{F}(\tau)$分别表示以 $t=0$ 时的初始构形为参考构形量度的 t 时刻和 τ 时刻的变形梯度，而$\boldsymbol{F}^{-1}(t)$则是 $\boldsymbol{F}(t)$的逆张量。(2.5.18b)式的几何解释可由图2.6说明，它表明：实现介质由 0 时刻到 τ 时刻的变形梯度 $\boldsymbol{F}(\tau)$可分两步走，第一步先产生一个任意中间时刻 t 相对于初始构形的变形梯度$\boldsymbol{F}(t)$，第二步再产生一个 τ 时刻相对于t 时刻的相对变形梯度$\boldsymbol{F}_t(\tau)$。

固定时间 t，让 τ 变化，求(2.5.18a)式对 τ 的导数在t 时刻的值，记为$\dot{\boldsymbol{F}}_t(t)$，并利用公式(2.5.18a)和(2.5.2b)，则有

$$\dot{\boldsymbol{F}}_t(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\boldsymbol{F}_t(\tau)\big|_{\tau=t}=\dot{\boldsymbol{F}}(t)\cdot\boldsymbol{F}^{-1}(t)=\boldsymbol{L}(t) \tag{2.5.19}$$

(2.5.19)式说明：t 时刻介质质点速度的空间梯度$\boldsymbol{L}(t)$恰恰是以 t 时刻构形为参考构形所量度的相对变形梯度$\boldsymbol{F}_t(\tau)$的时变率在 t 时刻的值。将相对变形梯度张量$\boldsymbol{F}_t(\tau)$做极分解，我们有

$$\boldsymbol{F}_t(\tau)=\boldsymbol{R}_t(\tau)\cdot\boldsymbol{U}_t(\tau) \tag{2.5.20}$$

求(2.5.20)式对 τ 的导数并取其在$\tau=t$ 时的值，有

$$\dot{\boldsymbol{F}}_t(t)=\boldsymbol{R}_t(t)\cdot\dot{\boldsymbol{U}}_t(t)+\dot{\boldsymbol{R}}_t(t)\cdot\boldsymbol{U}_t(t) \tag{2.5.21}$$

根据其物理意义，$\boldsymbol{F}_t(t)$、$\boldsymbol{R}_t(t)$、$\boldsymbol{U}_t(t)$分别表示介质在 t 时刻的运动相对于该时刻构形的变形梯度张量、旋转张量、伸缩张量，显然它们都等于单位张量 $\boldsymbol{I}$，即

$$\boldsymbol{F}_t(t)=\boldsymbol{R}_t(t)=\boldsymbol{U}_t(t)=\boldsymbol{I} \tag{2.5.22}$$

于是，(2.5.21)式成为

$$\dot{\boldsymbol{F}}_t(t)=\dot{\boldsymbol{U}}_t(t)+\dot{\boldsymbol{R}}_t(t) \tag{2.5.23}$$

由于 $\boldsymbol{U}$ 是正定对称张量，$\boldsymbol{R}$ 是正交张量，故有

$$\boldsymbol{U}_t(\tau)=\boldsymbol{U}_t^{\mathrm{T}}(\tau),\quad \boldsymbol{R}_t(\tau)\cdot\boldsymbol{R}_t^{\mathrm{T}}(\tau)=\boldsymbol{I}$$

固定 t 对以上两式求对τ 的导数并取$\tau=t$ 时的值，再利用(2.5.22)式，易得

$$\dot{\boldsymbol{U}}_t(t)=\dot{\boldsymbol{U}}_t^{\mathrm{T}}(t),\quad \dot{\boldsymbol{R}}_t(t)=-\dot{\boldsymbol{R}}_t^{\mathrm{T}}(t) \tag{2.5.24}$$

(2.5.24)式说明：$\dot{\boldsymbol{U}}_t(t)$和$\dot{\boldsymbol{R}}_t(t)$分别是 2 阶对称张量和 2 阶反对称张量，因而(2.5.23)式是 $\boldsymbol{L}(t)=\dot{\boldsymbol{F}}_t(t)$的和分解形式。而(2.5.3)式也是 $\boldsymbol{L}(t)$的和分解形式，由 2 阶张量和分解的唯一性，我们必有

$$\boldsymbol{D}(t)=\dot{\boldsymbol{U}}_t(t) \tag{2.5.25}$$

$$\boldsymbol{W}(t)=\dot{\boldsymbol{R}}_t(t) \tag{2.5.26}$$

式(2.5.25)和式(2.5.26)说明:$\boldsymbol{D}(t)$和 $\boldsymbol{W}(t)$分别是相对伸缩张量 $\boldsymbol{U}_t(\tau)$的时变率和相对旋转率张量 $\boldsymbol{R}_t(\tau)$的时变率,故分别将之称为伸缩率张量和转动率张量是恰当的。

以上的推理可概括为:有限运动中相对变形梯度张量$\boldsymbol{F}_t(\tau)$的极分解公式(2.5.20)式,在无限小运动过程的极限情况下(即求导时),即化为速度空间梯度张量 $\boldsymbol{L}(t)=\dot{\boldsymbol{F}}_t(t)$的和分解公式(2.5.3)式或(2.5.23)式。其中有限运动中的旋转张量即正交张量$\boldsymbol{R}_t(\tau)$在无穷小运动的极限过程中成为旋转率张量即反对称张量 $\dot{\boldsymbol{R}}_t(t)=\boldsymbol{W}(t)$,与矢量 $\boldsymbol{\omega}(t)$对偶;有限运动中的伸缩张量即正定对称张量$\boldsymbol{U}_t(\tau)$在无穷小运动的极限过程中成为伸缩率张量即对称张量$\dot{\boldsymbol{U}}_t(t)=\boldsymbol{D}(t)$。

显然,如果我们从相对变形梯度张量的左极分解式$\boldsymbol{F}_t(\tau)=\boldsymbol{V}_t(\tau)\cdot\boldsymbol{R}_t(\tau)$出发,对 τ 求导并重复与上面类似的推导,则可得

$$\dot{\boldsymbol{V}}_t(t)=\boldsymbol{D}(t) \tag{2.5.25$'$}$$

2.6 应变率张量和 Rivlin-Ericksen 张量

2.6.1 应变率张量

介质在 t 时刻相对于初始构形的 L 氏应变张量或 Green 应变张量 $\boldsymbol{E}(t)$为

$$\boldsymbol{E}(t)=\frac{1}{2}[\boldsymbol{C}(t)-\boldsymbol{I}]=\frac{1}{2}[\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}(t)\cdot\boldsymbol{F}(t)-\boldsymbol{I}] \tag{2.6.1}$$

求其随体导数,并利用(2.5.2a)式,有(为了简单起见,我们省略了其中的记号 t)

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{E}}&=\frac{1}{2}(\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\cdot\dot{\boldsymbol{F}}+\dot{\boldsymbol{F}}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{F})=\frac{1}{2}(\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{F}+\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{F})\\&=\frac{1}{2}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\cdot(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}})\cdot\boldsymbol{F}\end{aligned}$$

即

$$\dot{\boldsymbol{E}}=\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{F} \tag{2.6.2}$$

我们称$\dot{E}$为 L 氏应变率张量，它是以 $t=0$ 时刻的构形为参考构形所量度的拉氏应变张量的随体导数。类似地，以初始构形为参考的 E 氏应变张量或 Almansi 应变张量 $e(t)$为

$$e(t) = \frac{1}{2}[I - B^{-1}(t)] = \frac{1}{2}[I - (F^{-1}(t))^{\mathrm{T}} \cdot F^{-1}(t)] \tag{2.6.3}$$

对其求随体导数，有

$$\dot{e} = -\frac{1}{2}\dot{\overline{B^{-1}}} = -\frac{1}{2}[\dot{\overline{(F^{-1})^{\mathrm{T}} \cdot F^{-1}}}] = -\frac{1}{2}[\dot{\overline{(F^{-1})^{\mathrm{T}}}} \cdot F^{-1} + (F^{-1})^{\mathrm{T}} \cdot \dot{\overline{F^{-1}}}] \tag{2.6.4}$$

对 $F \cdot F^{-1} = I$ 求导并利用式(2.5.2b)，易证：

$$\dot{\overline{F^{-1}}} = -F^{-1} \cdot L, \quad (\dot{\overline{F^{-1}}})^{\mathrm{T}} = -L^{\mathrm{T}} \cdot (F^{-1})^{\mathrm{T}} \tag{2.6.5}$$

将(2.6.5)式代入(2.6.4)式，经过适当的计算，即得

$$\dot{e} = D - L^{\mathrm{T}} \cdot e - e \cdot L \tag{2.6.6}$$

我们称 $\dot{e}$ 为 E 氏应变率张量，它是以初始构形为参考构形的 E 氏应变张量的随体导数。式(2.6.6)也可以由对式(2.4.5)即下式：

$$\mathrm{d}s^2 - \mathrm{d}S^2 = 2\mathrm{d}x \cdot e \cdot \mathrm{d}x \tag{2.6.7}$$

求导来证明。事实上，对式(2.6.7)求导，可得

$$\mathrm{d}s\,\dot{\overline{\mathrm{d}s}} = \dot{\overline{\mathrm{d}x}} \cdot e \cdot \mathrm{d}x + \mathrm{d}x \cdot \dot{e} \cdot \mathrm{d}x + \mathrm{d}x \cdot e \cdot \dot{\overline{\mathrm{d}x}}$$

将(2.5.13a)式和(2.5.10)式代入上式，有

$$\mathrm{d}x \cdot D \cdot \mathrm{d}x = L \cdot \mathrm{d}x \cdot e \cdot \mathrm{d}x + \mathrm{d}x \cdot \dot{e} \cdot \mathrm{d}x + \mathrm{d}x \cdot e \cdot L \cdot \mathrm{d}x$$

$$\begin{aligned}\mathrm{d}x \cdot D \cdot \mathrm{d}x &= \mathrm{d}x \cdot L^{\mathrm{T}} \cdot e \cdot \mathrm{d}x + \mathrm{d}x \cdot \dot{e} \cdot \mathrm{d}x + \mathrm{d}x \cdot e \cdot L \cdot \mathrm{d}x \\ &= \mathrm{d}x \cdot (L^{\mathrm{T}} \cdot e + \dot{e} + e \cdot L) \cdot \mathrm{d}x\end{aligned}$$

$$\mathrm{d}x \cdot (L^{\mathrm{T}} \cdot e + \dot{e} + e \cdot L - D) \cdot \mathrm{d}x = 0 \tag{2.6.8}$$

式(2.6.8)左端所给出的二次型对任意的矢量 dx 都为零，所以括号中的 2 阶对称张量必为零张量，即

$$\dot{e} = D - (L^{\mathrm{T}} \cdot e + e \cdot L) \tag{2.6.6}$$

这就是式(2.6.6)。同样，我们也可以通过对式

$$\mathrm{d}s^2 - \mathrm{d}S^2 = 2\mathrm{d}X \cdot E \cdot \mathrm{d}X$$

求随体导数而证明式(2.6.2)，读者可作为练习证明之。

由式(2.6.2)和式(2.6.6)可以看到：在 $F \neq I$ 或$e \neq 0$ 的一般情况下，

$$\dot{E} \neq D \neq \dot{e}$$

而只有当 $F = I$ 或$e = 0$ 时它们才彼此相等，但这对应的是介质根本没有变形的情

况。在一般情况下，$\dot{\boldsymbol{E}}$和 $\dot{\boldsymbol{e}}$ 之所以不等于 $\boldsymbol{D}$，是因为$\dot{\boldsymbol{E}}$和 $\dot{\boldsymbol{e}}$ 是相对于初始构形的 $\boldsymbol{E}$ 和$\boldsymbol{e}$ 的时间变化率，即介质在两个无限接近的时刻 $t+\Delta t$ 及 t 时的 $\boldsymbol{E}$ 的改变和 $\boldsymbol{e}$ 的改变与 Δt 之比当 Δt 趋于零时的极限，而在 $t+\Delta t$ 及 t 时 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{e}$ 之值都是以初始构形为参考构形而定义的；而伸缩率张量 $\boldsymbol{D}$ 反映的是介质在 t 时刻的变形速率，它只与从 t 时刻到 $t+\Delta t$ 时刻其间介质的变形情况有关，而与初始构形是完全没有关系的，甚至与介质在 t 时刻以前的运动和变形都是完全没有关系的。下面我们来说明 t 时刻的伸缩率张量 $\boldsymbol{D}$ 恰恰等于以 t 时刻的构形为参考构形所量度的 τ 时刻的相对 Green 应变张量 $\boldsymbol{E}_t(\tau)$ 的随体导数在 $\tau=t$ 时的值 $\dot{\boldsymbol{E}}_t(t)$。事实上，参照 Green 应变张量的定义，如果我们定义相对 Green 应变张量为

$$\boldsymbol{E}_t(\tau)=\frac{1}{2}[\boldsymbol{C}_t(\tau)-\boldsymbol{I}]=\frac{1}{2}[\boldsymbol{F}_t^{\mathrm{T}}(\tau)\cdot\boldsymbol{F}_t(\tau)-\boldsymbol{I}] \tag{2.6.9}$$

显然它的意义即表示以 t 时刻构形为参考构形所量度的 τ 时刻的相对 Green 应变。固定 t，求(2.6.9)式对 τ 的时间导数在 $\tau=t$ 时刻的值，并记之为 $\dot{\boldsymbol{E}}_t(t)$，则有

$$\dot{\boldsymbol{E}}_t(t)=\frac{1}{2}[\boldsymbol{F}_t^{\mathrm{T}}(t)\cdot\dot{\boldsymbol{F}}_t(t)+\dot{\boldsymbol{F}}_t^{\mathrm{T}}(t)\cdot\boldsymbol{F}_t(t)]=\frac{1}{2}[\dot{\boldsymbol{F}}_t(t)+\dot{\boldsymbol{F}}_t^{\mathrm{T}}(t)] \tag{2.6.10}$$

这里利用了式(2.5.22)，即 $\boldsymbol{F}_t(t)=\boldsymbol{I}$。再利用式(2.5.19)：$\dot{\boldsymbol{F}}_t(t)=\boldsymbol{L}(t)$，则(2.6.10)式成为

$$\dot{\boldsymbol{E}}_t(t)=\frac{1}{2}[\boldsymbol{L}(t)+\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}(t)]=\boldsymbol{D}(t) \tag{2.6.11}$$

式(2.6.11)即说明：伸缩率张量 $\boldsymbol{D}(t)$ 恰恰等于以瞬时 t 的构形为参考构形而量度的相对 Green 应变张量 $\boldsymbol{E}_t(\tau)$ 的随体导数在 t 时刻的值 $\dot{\boldsymbol{E}}_t(t)$。

作为练习，读者可尝试求一下相对 Euler 应变张量的随体导数 $\dot{\boldsymbol{e}}_t(t)$，并证明有

$$\dot{\boldsymbol{e}}_t(t)=\boldsymbol{D}(t) \tag{2.6.11$'$}$$

2.6.2 Rivlin-Ericksen 张量

我们曾导出了瞬时构形中的任意线元 $\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ 长度的平方 $\mathrm{d}s^2$ 的公式(2.4.16)式，即

$$\mathrm{d}s^2=\mathrm{d}\boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{C}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{X} \tag{2.6.12}$$

它是该线元在初始构形中的线元矢量 $\mathrm{d}\boldsymbol{X}$ 的二次型，其相对应的 2 阶对称张量为

右 Cauchy-Green 张量 $\boldsymbol{C}$。对(2.6.12)式求 1 阶及 n 阶随体导数,并注意 $\mathrm{d}\boldsymbol{X}$ 与时间无关,即得

$$\frac{\mathrm{d}(\mathrm{d}s^2)}{\mathrm{d}t} = \mathrm{d}\boldsymbol{X}\cdot\dot{\boldsymbol{C}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{X} = 2\mathrm{d}\boldsymbol{X}\cdot\dot{\boldsymbol{E}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{X} \tag{2.6.13a}$$

$$\frac{\mathrm{d}^n(\mathrm{d}s^2)}{\mathrm{d}t^n} = \mathrm{d}\boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{C}^{(n)}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{X} \tag{2.6.13b}$$

其中$\boldsymbol{C}^{(n)}$为右 Cauchy-Green 张量 $\boldsymbol{C}$ 的 n 阶随体导数。另外,我们还导出了任意线元 $\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ 长度的平方 $\mathrm{d}s^2$ 之随体导数的公式(2.5.13a)式,即

$$\frac{\mathrm{d}(\mathrm{d}s^2)}{\mathrm{d}t} = 2\mathrm{d}\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{D}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{x} \tag{2.6.14a}$$

由于 $\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{X}=\mathrm{d}\boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}$,所以(2.6.14a)式可以改写为

$$\frac{\mathrm{d}(\mathrm{d}s^2)}{\mathrm{d}t} = 2\mathrm{d}\boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{X} = 2\mathrm{d}\boldsymbol{X}\cdot(\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{F})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{X} \tag{2.6.15}$$

对比式(2.6.15)和式(2.6.13a),并利用线元 $\mathrm{d}\boldsymbol{X}$ 的任意性和 $\dot{\boldsymbol{E}}$ 及$\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{F}$ 的对称性,有

$$\dot{\boldsymbol{E}} = \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{F}$$

这正是前面介绍的式(2.6.2)。如果我们将 $\mathrm{d}s^2$ 的 n 阶随体导数写为瞬时构形中的线元矢量 $\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ 的二次型,并设其相对应的 2 阶对称张量为$\overset{(n)}{\boldsymbol{A}}$,即

$$\frac{\mathrm{d}^n(\mathrm{d}s^2)}{\mathrm{d}t^n} = \mathrm{d}\boldsymbol{x}\cdot\overset{(n)}{\boldsymbol{A}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{x} \tag{2.6.14b}$$

则由于 $\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{X}=\mathrm{d}\boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}$,式(2.6.14b)即可以改写为

$$\frac{\mathrm{d}^n(\mathrm{d}s^2)}{\mathrm{d}t^n} = \mathrm{d}\boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\cdot\overset{(n)}{\boldsymbol{A}}\cdot\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{X} = \mathrm{d}\boldsymbol{X}\cdot(\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\cdot\overset{(n)}{\boldsymbol{A}}\cdot\boldsymbol{F})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{X} \tag{2.6.14b$'$}$$

对比式(2.6.14b)′和式(2.6.13b),并利用线元 $\mathrm{d}\boldsymbol{X}$ 的任意性和$\boldsymbol{C}^{(n)}$及$\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\cdot\overset{(n)}{\boldsymbol{A}}\cdot\boldsymbol{F}$ 的对称性,我们可得下式:

$$\boldsymbol{C}^{(n)} = \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\cdot\overset{(n)}{\boldsymbol{A}}\cdot\boldsymbol{F},\quad \overset{(n)}{\boldsymbol{A}} = (\boldsymbol{F}^{-1})^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{C}^{(n)}\cdot\boldsymbol{F}^{-1} \tag{2.6.16}$$

我们将 2 阶对称张量$\overset{(n)}{\boldsymbol{A}}$称为 n 阶 Rivlin-Ericksen 张量,式(2.6.16)将它和右 Cauchy-Green 张量 $\boldsymbol{C}$ 的 n 阶随体导数$\boldsymbol{C}^{(n)}$联系了起来。特别地,在 $n=1$ 时,我们可有

$$\overset{(1)}{\boldsymbol{A}} = (\boldsymbol{F}^{-1})^{\mathrm{T}}\cdot\dot{\boldsymbol{C}}\cdot\boldsymbol{F}^{-1} = 2(\boldsymbol{F}^{-1})^{\mathrm{T}}\cdot\dot{\boldsymbol{E}}\cdot\boldsymbol{F}^{-1} = 2\boldsymbol{D} \tag{2.6.17}$$

这也可以由 (2.6.14a) 式直接得到。在此我们特别强调：与$\boldsymbol{C}^{(n)}$是 $\boldsymbol{C}$ 的 n 阶随体导数不同，张量$\overset{(n)}{\boldsymbol{A}}$是由式(2.6.14b)或式(2.6.16)而直接定义的，它并不表示"某一个张量 $\boldsymbol{A}$"的 n 阶随体导数。这就是我们用$\overset{(n)}{\boldsymbol{A}}$而不用$\boldsymbol{A}^{(n)}$的理由。

对式(2.6.14b)求随体导数，并利用式(2.5.10)，即

$$\frac{\mathrm{d}(\mathrm{d}\boldsymbol{x})}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{L} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

其中 $\boldsymbol{L}$ 为质点速度 $\boldsymbol{v}$ 的空间梯度，容易证明关于$\overset{(n)}{\boldsymbol{A}}$的如下递推公式：

$$\overset{(n+1)}{\boldsymbol{A}} = \frac{\mathrm{d}\overset{(n)}{\boldsymbol{A}}}{\mathrm{d}t} + \overset{(n)}{\boldsymbol{A}} \cdot \boldsymbol{L} + \boldsymbol{L}^{\mathrm{T}} \cdot \overset{(n)}{\boldsymbol{A}} \tag{2.6.18}$$

读者可作为练习证明之。

我们可以证明：Rivlin-Ericksen 张量在物理上等于相对右 Cauchy-Green 张量$\boldsymbol{C}_t(\tau)$对 τ 的 n 阶随体导数在 $\tau = t$ 时的值$\boldsymbol{C}_t^{(n)}(t)$，即

$$\overset{(n)}{\boldsymbol{A}} = \left.\frac{\mathrm{d}^n \boldsymbol{C}_t(\tau)}{\mathrm{d}\tau^n}\right|_{\tau=t} \equiv \boldsymbol{C}_t^{(n)}(t) \tag{2.6.19}$$

事实上，如果在式(2.6.12)中将 t 时刻的构形代替 0 时刻的构形、将 τ 时刻的构形代替 t 时刻的构形，则该式将成为

$$\mathrm{d}s(\tau)^2 = \mathrm{d}\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{C}_t(\tau) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x} \tag{2.6.12$'$}$$

其中$\boldsymbol{C}_t(\tau)$为 τ 时刻相对 t 时刻的相对右 Cauchy-Green 张量，$\mathrm{d}s(\tau)$为 t 时刻的线元 $\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ 在 τ 时刻的长度。固定时刻 t，将 τ 作为变量，对(2.6.12)$'$式求对 τ 的 n 阶随体导数(注意 t 时刻线元 $\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ 不随 τ 而变化)，可得

$$\frac{\mathrm{d}^n[\mathrm{d}s(\tau)^2]}{\mathrm{d}\tau^n} = \mathrm{d}\boldsymbol{x} \cdot \frac{\mathrm{d}^n \boldsymbol{C}_t(\tau)}{\mathrm{d}\tau^n} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x} \tag{2.6.20}$$

令 τ 趋近于 t，由于 $\mathrm{d}s(\tau)$趋近于 $\mathrm{d}s(t) = \mathrm{d}s$，我们即得

$$\frac{\mathrm{d}^n[\mathrm{d}s^2]}{\mathrm{d}t^n} = \mathrm{d}\boldsymbol{x} \cdot \left.\frac{\mathrm{d}^n \boldsymbol{C}_t(\tau)}{\mathrm{d}\tau^n}\right|_{\tau=t} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x} \equiv \mathrm{d}\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{C}_t^{(n)}(t) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x} \tag{2.6.21a}$$

其中

$$\left.\frac{\mathrm{d}^n \boldsymbol{C}_t(\tau)}{\mathrm{d}\tau^n}\right|_{\tau=t} \equiv \boldsymbol{C}_t^{(n)}(t) \tag{2.6.21b}$$

是相对右 Cauchy-Green 张量$\boldsymbol{C}_t(\tau)$对 τ 的 n 阶随体导数在 $\tau = t$ 时的值。将式(2.6.21a)和式(2.6.14b)相对比，并利用线元 $\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ 的任意性和张量$\left.\frac{\mathrm{d}^n \boldsymbol{C}_t(\tau)}{\mathrm{d}\tau^n}\right|_{\tau=t} \equiv$ $\boldsymbol{C}_t^{(n)}(t)$及$\overset{(n)}{\boldsymbol{A}}$的对称性，可知必有

$$\overset{(n)}{\boldsymbol{A}} = \left.\frac{\mathrm{d}^n \boldsymbol{C}_t(\tau)}{\mathrm{d}\tau^n}\right|_{\tau=t} \equiv \boldsymbol{C}_t^{(n)}(t) \tag{2.6.19}$$

这就证明了我们的论断。

将相对右 Cauchy-Green 张量$\boldsymbol{C}_t(\tau)$在 t 时刻展开为 Taylor 级数，并利用(2.6.19)式，有

$$\boldsymbol{C}_t(\tau) = \boldsymbol{C}_t(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\tau - t)^n}{n!} \boldsymbol{C}_t^{(n)}(t) = \boldsymbol{I} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\tau - t)^n}{n!} \overset{(n)}{\boldsymbol{A}}(t) \tag{2.6.22}$$

该式对导出率型材料的本构方程是有用的。

此外，有的书上通过介质的所谓“n 阶速度”（即位置矢量 $\boldsymbol{x}$ 的 n 阶随体导数）的梯度张量$\overset{(n)}{\boldsymbol{L}} \equiv \left(\frac{\mathrm{d}^n \boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t^n}\right) \cdot \overleftarrow{\nabla}$来定义 Rivlin-Ericksen 张量。如果我们分别以 $\boldsymbol{x}$ 和$\boldsymbol{\xi}$表示粒子在t 时刻和τ 时刻的位置矢量，则对相对变形梯度$\boldsymbol{F}_t(\tau) = \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial \boldsymbol{x}}$求对$\tau$ 的各阶随体导数，我们有

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{F}_t(\tau)}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial \boldsymbol{x}}\right) = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}}{\mathrm{d}\tau}\right) = \dot{\boldsymbol{\xi}}(\tau) \cdot \overleftarrow{\nabla}$$

$$\cdots\cdots$$

$$\frac{\mathrm{d}^n \boldsymbol{F}_t(\tau)}{\mathrm{d}\tau^n} = \boldsymbol{\xi}^{(n)}(\tau) \cdot \overleftarrow{\nabla} \equiv \overset{(n)}{\boldsymbol{L}}_t(\tau) \tag{2.6.23}$$

其中$\boldsymbol{\xi}^{(n)}(\tau) \equiv \frac{\mathrm{d}^n \boldsymbol{\xi}}{\mathrm{d}\tau^n}$是$\boldsymbol{\xi}$ 的 n 阶随体导数，即粒子在 τ 时刻的“n 阶速度”；$\overleftarrow{\nabla}$是在 t 时刻构形中的梯度算子；$\boldsymbol{\xi}^{(n)}(\tau) \cdot \overleftarrow{\nabla} = \frac{\mathrm{d}^n \boldsymbol{\xi}}{\mathrm{d}\tau^n} \cdot \overleftarrow{\nabla} \equiv \overset{(n)}{\boldsymbol{L}}_t(\tau)$是粒子在 τ 时刻的“n 阶速度”$\boldsymbol{\xi}^{(n)}(\tau) \equiv \frac{\mathrm{d}^n \boldsymbol{\xi}}{\mathrm{d}\tau^n}$在$t$ 时刻构形中的梯度张量，在 $n=1$ 时，$\overset{(1)}{\boldsymbol{L}}_t(\tau) = \dot{\boldsymbol{\xi}}(\tau) \cdot \overleftarrow{\nabla} \equiv \boldsymbol{L}_t(\tau)$即是粒子 τ 时刻速度场在t 时刻构形中的速度梯度。在式(2.6.23)中令 τ 趋近于t，即得

$$\left.\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{F}_t(\tau)}{\mathrm{d}\tau}\right|_{\tau=t} = \left.\overset{(1)}{\boldsymbol{L}}_t(\tau)\right|_{\tau=t}, \quad \cdots, \quad \left.\frac{\mathrm{d}^n \boldsymbol{F}_t(\tau)}{\mathrm{d}\tau^n}\right|_{\tau=t} = \left.\overset{(n)}{\boldsymbol{L}}_t(\tau)\right|_{\tau=t} \equiv \overset{(n)}{\boldsymbol{L}} \tag{2.6.24}$$

其中$\overset{(n)}{\boldsymbol{L}} \equiv \left.\overset{(n)}{\boldsymbol{L}}_t(\tau)\right|_{\tau=t} = \left.\frac{\mathrm{d}^n \boldsymbol{\xi}}{\mathrm{d}\tau^n}\right|_{\tau=t} \cdot \overleftarrow{\nabla} = \left(\frac{\mathrm{d}^n \boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t^n}\right) \cdot \overleftarrow{\nabla}$，是位置矢量 $\boldsymbol{x}$ 的 n 阶随体导数的梯度张量。求$\boldsymbol{C}_t(\tau) = \boldsymbol{F}_t^{\mathrm{T}}(\tau) \cdot \boldsymbol{F}_t(\tau)$对 τ 的n 阶随体导数，可得

$$\frac{\mathrm{d}^n \boldsymbol{C}_t(\tau)}{\mathrm{d}\tau^n} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{\mathrm{d}^k \boldsymbol{F}_t^{\mathrm{T}}(\tau)}{\mathrm{d}\tau^k}\cdot\frac{\mathrm{d}^{n-k}\boldsymbol{F}_t(\tau)}{\mathrm{d}\tau^{n-k}},\quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \tag{2.6.25}$$

令 τ 趋近于 t，并对式(2.6.25)的左端和右端分别利用式(2.6.19)和式(2.6.24)，即可得

$$\overset{(n)}{\boldsymbol{A}} = \overset{(n)}{\boldsymbol{L}} + \overset{(n)}{\boldsymbol{L}}{}^{\mathrm{T}} + \sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}\overset{(k)}{\boldsymbol{L}}{}^{\mathrm{T}}\cdot\overset{(n-k)}{\boldsymbol{L}} \tag{2.6.26}$$

式(2.6.26)就是由粒子“n 阶速度”的梯度张量所表达的 Rivlin-Ericksen 张量。注意，在 $n=1$ 时，我们有$\overset{(1)}{\boldsymbol{L}}\equiv\boldsymbol{L}$(即速度的空间梯度)，$\overset{(1)}{\boldsymbol{A}}=2\boldsymbol{D}$；对 $n>1$，$\overset{(n)}{\boldsymbol{L}}$是粒子“$n$ 阶速度”的空间梯度而非速度空间梯度 $\boldsymbol{L}$ 的 n 阶随体导数。这也是我们用$\overset{(n)}{\boldsymbol{L}}$而不用$\boldsymbol{L}^{(n)}$的道理，与前面对$\overset{(n)}{\boldsymbol{A}}$的说明是类似的。

2.7 体积相对变化率

2.7.1 体应变

定义体应变可以有几种方法，一是工程体应变或 Lagrange 体应变 Δ，由

$$\Delta = \frac{\delta v - \delta V}{\delta V} = \frac{\delta v}{\delta V} - 1 \tag{2.7.1}$$

给出，其中 δV 和 δv 分别是微体在初始构形中的体积和 t 时的体积，Lagrange 体应变 Δ 所反映的是以参考构形中的体积 δV 为对比基准所量度的体积相对增加。二是 Euler 体应变 Δ_ε：

$$\Delta_\varepsilon = \frac{\delta v - \delta V}{\delta v} = 1 - \frac{\delta V}{\delta v} \tag{2.7.2}$$

它所反映的是以 t 时刻的体积 δv 为对比基准所量度的体积相对增加。三是有限相对体应变或有限增量体应变 $\Delta_t(\tau)$，由

$$\Delta_t(\tau) = \frac{\delta v(\tau) - \delta v(t)}{\delta v(t)} \tag{2.7.3}$$

给出，其中 $\delta v(t)$和 $\delta v(\tau)$分别是微体在 t 和 τ 时刻的体积，$\Delta_t(\tau)$反映的是微体在任意时间间隔$[t,\tau]$中所产生的相对体积变化，对比基准是微元在 t 时刻的体

积 $\delta v(t)$。当 $t=0$ 时，式(2.7.3)给出的就是微体在 τ 时刻的 L 氏体应变；而当 $\tau - t$ 等于 $\mathrm{d}t$ 为无限小时，式(2.7.3)则成为

$$\Delta_t(t+\mathrm{d}t) = \frac{\mathrm{d}\delta v}{\delta v} \tag{2.7.4}$$

称为无限小增量体应变或自然增量体应变，它反映的是介质在微时间间隔 $[t, t+\mathrm{d}t]$ 之内所产生的相对体积膨胀，其对比基准是微体在前一时刻 t 时的体积 δv。将微体从 $t=0$ 时的体积 δV 膨胀到现时刻 t 时的体积 δv 的整个期间分为无穷多的无穷小间隔，并将各间隔的自然增量体应变累积起来，即得所谓的对数体应变 Δ_l：

$$\Delta_l = \int_{\delta V}^{\delta v} \frac{\mathrm{d}\delta v}{\delta v} = \ln\frac{\delta v}{\delta V} = \ln(1+\Delta), \quad \mathrm{d}\Delta_l = \frac{\mathrm{d}\delta v}{\delta v} \tag{2.7.5}$$

即自然增量体应变的积分等于对数体应变，反过来对数体应变的微分即是自然增量体应变。之所以将此体应变称为对数体应变是因为它恰恰与 L 氏体应变以对数关系由式(2.7.5)相联系。

2.7.2　相对体积变化率

在物理上，我们可以定义介质在一点的相对体积变化率为该点处微体在无限小时间 $\mathrm{d}t$ 内的相对体积膨胀 $\frac{\mathrm{d}\delta v}{\delta v}$ 与 $\mathrm{d}t$ 之比在 $\mathrm{d}t$ 趋于零时的极限 $\frac{\mathrm{d}\delta v}{\delta v \mathrm{d}t}$；在数学上也可以将之定义为有限相对体应变 $\Delta_t(\tau)$ 对 τ 的导数在 $\tau=t$ 时的值，即以 t 时构形为基准量度的有限相对体应变的随体导数 $\dot{\Delta}_t(t)$：

$$\dot{\Delta}_t(t) \equiv \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\Delta_t(\tau)\bigg|_{\tau=t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{\delta v(\tau) - \delta v(t)}{\delta v(t)}\right)\bigg|_{\tau=t} = \frac{1}{\delta v}\frac{\mathrm{d}\delta v}{\mathrm{d}t} \tag{2.7.6}$$

可见二者是相同的。微体 δv 在 $\mathrm{d}t$ 内的膨胀 $\mathrm{d}\delta v$ 是由介质通过其表面 a 外流而造成的，即

$$\mathrm{d}\delta v = \oint_a \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}t\mathrm{d}a = \mathrm{d}t\int_{\delta v}\mathrm{div}\boldsymbol{v}\mathrm{d}v = \mathrm{d}t\,\mathrm{div}\boldsymbol{v}\delta v$$

此处我们利用了 Gauss 定理以及体积分的中值定理，其中 $\mathrm{div}\boldsymbol{v}$ 为在 δv 中的某一点取值。将上式两端同除以 $\mathrm{d}t\delta v$，并令 $\mathrm{d}t$ 和 δv 都趋于 0，即可得

$$\frac{1}{\delta v}\frac{\mathrm{d}\delta v}{\mathrm{d}t} = \mathrm{div}\boldsymbol{v} \tag{2.7.7}$$

式(2.7.7)说明：介质在一点的相对体积变化率恰恰等于介质速度场在该点的散度 $\mathrm{div}\boldsymbol{v}$。而事实上，在 1.12 节中我们正是以此种方式给出散度 $\mathrm{div}\boldsymbol{v}$ 的物理定

义的，可参见第1章中的式(1.12.15)。

另外，由式(2.7.5)和式(2.7.1)不难看出，对数体应变的随体导数恰为速度散度 $\mathrm{div}\boldsymbol{v}$：

$$\dot{\Delta}_1 = \frac{\dot{\Delta}}{1+\Delta} = \frac{1}{\dfrac{\delta v}{\delta V}}\left(\frac{1}{\delta V}\frac{\mathrm{d}\delta v}{\mathrm{d}t}\right) = \frac{1}{\delta v}\frac{\mathrm{d}\delta v}{\mathrm{d}t} = \mathrm{div}\boldsymbol{v} = D_{ii} \tag{2.7.8}$$

因此，对介质在一点的相对体积膨胀率，我们可以写出如下几个等价的表达形式：

$$\dot{\Delta}_t(t) = \frac{1}{\delta v}\frac{\mathrm{d}\delta v}{\mathrm{d}t} = \frac{\dot{J}}{J} = \mathrm{div}\boldsymbol{v} = D_{ii} = \dot{\Delta}_l \tag{2.7.9}$$

其中 $J=\dfrac{\delta v}{\delta V}$ 表示微体的膨胀比，D_{ii} 为伸缩率张量 $\boldsymbol{D}$ 的第一不变量。

2.8 体积分的时间导数

2.8.1 闭口体系和开口体系

在连续介质力学中分清我们所研究的体系是闭口体系还是开口体系具有十分重要的意义。所谓闭口体系，是指由一群固定粒子组成因而与外界没有质量交换的体系，即通过闭口体系表面外界流入体系的质量流为零，故闭口体系的质量随时间的变化率即其质量的随体导数为0；所谓开口体系，是指我们所观察的体系并不是由固定粒子组成因而与外界存在质量交换的体系，即通过开口体系的表面外界向体系有质量流入或流出，所以开口体系中介质质量随时间的变化率等于外界向介质的质量纯流入率(即流入率减去流出率)。开口体系和闭口体系的区分并不是以体系在空间是静止或运动为标志的，它们在空间所占有的区域 v 及其区域的表面 a 都可以是运动的因而都可以是时间 t 的函数。当开口体系取为在空间中静止不动的某一固定空间时，这种特殊的开口体系我们将之称为静止控制体，这就是在一般流体力学书中最常用的开口体系。显然，当体系表面各处的运动速度都等于经过该点的介质质点速度时，体系也就成为了闭口体系，而当体系表面各处的运动速度都等于0时，体系就成为了静止控制体，因之闭口体系和静止控制体都可以视为开口体系的特例。为了清楚起见，我们将把闭口体系上任意量体积分随时间的

变化率即体积分的随体导数用$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$或上加“·”来表示；同时把一般开口体系上任意量体积分随时间的变化率即体积分的时间导数用$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}$来表示；而静止控制体上任意量体积分随时间的变化率将用$\frac{\partial}{\partial t}$来表示，这是因为静止控制体的体积 v 和其表面 a 都是与时间无关的，所以可以视为是在固定区域上的局部导数。

为了叙述简洁起见，我们将单位空间体积中的某种物理量称为其密度量(density quantities)，而把单位介质质量的某种物理量称为其比量(specific quantities)。

2.8.2　开口体系体积分的时间导数和闭口体系体积分的随体导数——表面移动法

我们考虑任意一个在空间运动的开口体系 $v(t)$，其表面为 $a(t)$，如图 2.7 所示。为了强调体系 v 和表面 a 都是与时间有关的，我们特意加上了记号 t。设 t 时刻体系各表面点相应的表面运动速度为 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x},t)$，应注意，对于开口体系而言它与该时刻经过此表面点的介质粒子速度一般是不同的。以 $F(t)$表示某种密度量 $f(\boldsymbol{x},t)$在开口体系 $v(t)$上的总体量，它可以由如下的体积分来表达：

$$\boldsymbol{F}(t) \equiv \int_{v(t)} f(\boldsymbol{x},t)\mathrm{d}v \tag{2.8.1}$$

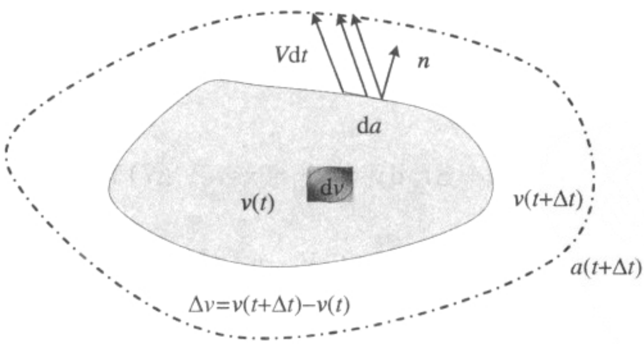


图 2.7　开口体系的变化

现在我们来求开口体系上的体积分(2.8.1)式的时间导数$\frac{\mathrm{D}F}{\mathrm{D}t}$。按照定义，我们有

$$\frac{\mathrm{D}F}{\mathrm{D}t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta F}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{F(t+\Delta t)-F(t)}{\Delta t} \tag{2.8.2}$$

其中 $F(t+\Delta t)$表示在 $t+\Delta t$ 时刻开口体系所占据的空间区域 $v(t+\Delta t)$上的体积分。在图 2.7 中我们标出了 t 和 $t+\Delta t$ 两个时刻的 $v(t)$、$a(t)$、$v(t+\Delta t)$、$a(t+\Delta t)$以及 Δt 期间开口体系所扩充的微区域 $\Delta v=v(t+\Delta t)-v(t)$。我们有

$$\begin{aligned}\Delta F&=F(t+\Delta t)-F(t)=\int_{v(t+\Delta t)}f(\boldsymbol{x},t+\Delta t)\mathrm{d}v-\int_{v(t)}f(\boldsymbol{x},t)\mathrm{d}v\\&=\left[\int_{v(t)}f(\boldsymbol{x},t+\Delta t)\mathrm{d}v-\int_{v(t)}f(\boldsymbol{x},t)\mathrm{d}v\right]\\&\quad+\left[\int_{v(t+\Delta t)}f(\boldsymbol{x},t+\Delta t)\mathrm{d}v-\int_{v(t)}f(\boldsymbol{x},t+\Delta t)\mathrm{d}v\right]\\&=\Delta F_1+\Delta F_2\end{aligned} \tag{2.8.3}$$

其中

$$\Delta F_1=\int_{v(t)}f(\boldsymbol{x},t+\Delta t)\mathrm{d}V-\int_{v(t)}f(\boldsymbol{x},t)\mathrm{d}V=\int_{v(t)}\frac{\partial f}{\partial t}\Delta t\mathrm{d}v \tag{2.8.4}$$

$$\Delta F_2=\int_{v(t+\Delta t)}f(\boldsymbol{x},t+\Delta t)\mathrm{d}v-\int_{v(t)}f(\boldsymbol{x},t+\Delta t)\mathrm{d}v=\int_{\Delta v}f(\boldsymbol{x},t+\Delta t)\mathrm{d}v \tag{2.8.5}$$

而 $\Delta v=v(t+\Delta t)-v(t)$表示 Δt 期间开口体系表面移动而膨胀的区域，它是由 t 时刻的表面 $a(t)$的每一部分 $\mathrm{d}a$ 以速度 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x},t)$移动而形成的。参照图 2.7，易见 $\mathrm{d}a$ 在 $\mathrm{d}t$ 时间内移动所形成的膨胀区域的微体积为

$$\mathrm{d}v=\boldsymbol{V}\Delta t\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}a \tag{2.8.6}$$

将之代入(2.8.5)式中，即有

$$\begin{aligned}\Delta F_2&=\int_{\Delta v}f(\boldsymbol{x},t+\Delta t)\mathrm{d}v=\oint_{a(t)}f(\boldsymbol{x},t+\Delta t)\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n}\Delta t\mathrm{d}a\\&=\oint_{a(t)}\left[f(\boldsymbol{x},t)+\frac{\partial f}{\partial t}\Delta t\right]\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n}\Delta t\mathrm{d}a\\&=\oint_{a(t)}f(\boldsymbol{x},t)\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n}\Delta t\mathrm{d}a\end{aligned} \tag{2.8.7}$$

在(2.8.4)式和(2.8.7)式的右端我们省去了 Δt 的二次项，因为它们除以 Δt 并在 Δt 趋于 0 时的极限为 0。将(2.8.4)式和(2.8.7)式代入(2.8.3)式，即可得

$$\frac{\mathrm{D}F}{\mathrm{D}t}=\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\int_{v(t)}f(\boldsymbol{x},t)\mathrm{d}v=\int_{v(t)}\frac{\partial f}{\partial t}\mathrm{d}v+\oint_{a(t)}f\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}a \tag{2.8.8}$$

式(2.8.8)即给出了任意开口体系 $v(t)$上量 f 体积分的时间导数。

由以上的推导过程可见:(2.8.8)式中的第一项由增量 ΔF_1 得来,它是由在开口体系 t 时刻所占据的原体积 $v(t)$上量 f 随时间的变化即场的不定常性所引起,故称之为体积分 $\boldsymbol{F}$ 的局部导数;(2.8.8)式中的第二项由增量 ΔF_2 得来,它是由开口体系的表面 $a(t)$上的各点以相应表面点的移动速度 $\boldsymbol{V}$ 移动所引起的,故可以称之为体积分 $\boldsymbol{F}$ 的表面移动导数。特别说来,当开口体系分别成为闭口体系或静止控制体时,我们分别有 $\boldsymbol{V}=\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{V}=\boldsymbol{0}$,于是我们即分别得到闭口体系体积分的随体导数和静止控制体体积分时间导数的公式如下:

$$\dot{\boldsymbol{F}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{v(t)} f\mathrm{d}v = \int_{v(t)}\frac{\partial f}{\partial t}\mathrm{d}v + \oint_{a(t)} f\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}a \tag{2.8.9a}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{v} f\mathrm{d}v = \int_{v}\frac{\partial f}{\partial t}\mathrm{d}v \tag{2.8.10}$$

闭口体系体积分随体导数的公式(2.8.9a)式即是在流体力学教科书中常见的公式,其中的第一项与式(2.8.8)的第一项一样也是由场的不定常性所引起的,称之为闭口体系体积分的局部导数;(2.8.9a)式中的第二项是由体系表面上的各点以粒子本身速度 $\boldsymbol{v}$ 迁移造成体积胀缩而引起的,故可称之为闭口体系体积分的迁移导数。至于式(2.8.10),我们不需要从(2.8.8)式出发即可一眼看出,因为静止控制体 v 和 $\mathrm{d}v$ 都是与时间无关的。

对式(2.8.9a)的第二项应用高斯定理,可以得到闭口体系体积分随体导数公式的第二种形式,即

$$\dot{\boldsymbol{F}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{v(t)} f\mathrm{d}v = \int_{v(t)}\frac{\partial f}{\partial t}\mathrm{d}v + \int_{v(t)}\mathrm{div}(f\boldsymbol{v})\mathrm{d}v \tag{2.8.9b}$$

由于其重要性,我们在下面再给出闭口体系体积分随体导数公式的另一种导出方法和第三种形式。

2.8.3 闭口体系体积分的随体导数——介质胀缩法

设想我们对整个闭口体系也按微闭口体系的观点进行分割,即将整个闭口体系 $v(t)$看做是无穷多个微闭口体系 $\mathrm{d}v$ 的总和。由于体积分是无穷多个微分的总和,而和的导数等于导数的和,所以对闭口体系的体积分求随体导数,并注意密度量 f 本身和每一个微闭口体系 $\mathrm{d}v$ 都是随时间变化的,则有

$$\dot{\boldsymbol{F}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{v(t)} f\mathrm{d}v = \int_{v(t)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f\mathrm{d}v) = \int_{v(t)}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}v + \int_{v(t)} f\frac{\mathrm{d}(\mathrm{d}v)}{\mathrm{d}t} \tag{2.8.11}$$

利用 $\mathrm{div}\boldsymbol{v}$ 即体积相对变化率的物理定义:

$$\mathrm{div}\boldsymbol{v} = \lim_{\mathrm{d}v\to 0}\frac{1}{\mathrm{d}v}\frac{\mathrm{d}(\mathrm{d}v)}{\mathrm{d}t} \tag{2.8.12}$$

或

$$\frac{\mathrm{d}(\mathrm{d}v)}{\mathrm{d}t} = (\mathrm{div}\boldsymbol{v})\mathrm{d}v \tag{2.8.13}$$

将(2.8.13)式代入(2.8.11)式即可得

$$\dot{F} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{v(t)} f(\boldsymbol{x},t)\mathrm{d}v = \int_{v(t)}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}v + \int_{v(t)} f\mathrm{div}\boldsymbol{v}\mathrm{d}v \tag{2.8.14}$$

式(2.8.14)即是体积分随体导数公式的第三种形式。由推导过程可以看到,(2.8.14)式中的第一项是在不考虑所有微物质体 $\mathrm{d}v$ 的胀缩而只考虑各微体的量 f 的随体变化而得出的,故可以将之称为闭口体系体积分的等容导数;(2.8.14)式中的第二项是由所有微体变形导致体系的胀缩而引起的,故可以将之称为闭口体系体积分的胀缩导数。如果注意到

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial t} + f\overleftarrow{\nabla}\cdot\boldsymbol{v} \tag{2.8.15}$$

$$(f\boldsymbol{v})\cdot\overleftarrow{\nabla} = \boldsymbol{v}\cdot\overleftarrow{\nabla}f + f\overleftarrow{\nabla}\cdot\boldsymbol{v} \tag{2.8.16}$$

则容易看到式(2.8.14)和式(2.8.9b)是等价的。

我们将任意闭口体系体积分的随体导数分解为等容导数和胀缩导数之和的思想,物理概念清晰且数学推导简洁,是一般的书上不曾采用的。

需要指出的是:我们在前面所得到的开口体系体积分时间导数的公式(2.8.8)式以及闭口体系体积分随体导数的公式(2.8.9a)式、(2.8.9b)式、(2.8.14)式并不要求密度量 f 一定是标量,当它是矢量以及任意阶的张量时这些公式也都是成立的,此时 $f\boldsymbol{v}$ 表示张量 f 和矢量 $\boldsymbol{v}$ 的外积。

2.8.4 体积分随体导数的一个特例

当量 $f=\rho\varphi$ 时,其中 ρ 为介质的质量密度,则有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{v(t)}\rho\varphi\mathrm{d}v = \int_{v(t)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\rho\varphi\mathrm{d}v) = \int_{v(t)}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\rho\mathrm{d}v + \int_{v(t)}\varphi\frac{\mathrm{d}(\rho\mathrm{d}v)}{\mathrm{d}t} \tag{2.8.17}$$

利用微闭口体系质量不变的条件:

$$\frac{\mathrm{d}(\rho\mathrm{d}v)}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{2.8.18}$$

(2.8.17)式成为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{v(t)}\rho\varphi\mathrm{d}v = \int_{v(t)}\rho\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}v \tag{2.8.19}$$

式(2.8.19)说明:当被积函数有一个因子是质量密度 ρ 时,我们可以将求导运算移入积分号内且只需对被积函数的另一因子 φ 求导即可。在此我们强调指出:式(2.8.19)成立所依据的物理基础是闭口体系的质量守恒定律,即式(2.8.18)。

2.8.5 跨过运动表面的物理量流

显然,有没有介质跨过空间中运动的微曲面 $\mathrm{d}\boldsymbol{a}$ 取决于微曲面的运动速度 $\boldsymbol{V}$ 是否等于它所经过的介质粒子的运动速度 $\boldsymbol{v}$,所以容易看出:单位时间内跨过 $\mathrm{d}\boldsymbol{a}$ 而流向$(-\boldsymbol{n})$一侧的介质体积将为$(\boldsymbol{V}-\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}a$(我们将之简称为跨过曲面 $\mathrm{d}\boldsymbol{a}$ 的体积流),其中 $\boldsymbol{n}$ 表示曲面 $\mathrm{d}\boldsymbol{a}=\boldsymbol{n}\mathrm{d}a$ 的单位法矢量。于是跨过 $\mathrm{d}\boldsymbol{a}$ 的质量流 $\mathrm{d}M$、动量流 $\mathrm{d}\boldsymbol{m}$ 和能量流 $\mathrm{d}E$ 将分别为

$$\mathrm{d}M=\rho(\boldsymbol{V}-\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}a \tag{2.8.20a}$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{m}=\rho\boldsymbol{v}(\boldsymbol{V}-\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}a \tag{2.8.20b}$$

$$\mathrm{d}E=\rho(k+u)(\boldsymbol{V}-\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}a \tag{2.8.20c}$$

其中 k 和 u 分别是介质的比动能和比内能。

式(2.8.20)的3式给出了跨过运动速度为 $\boldsymbol{V}$ 的任意微表面 $\mathrm{d}\boldsymbol{a}=\boldsymbol{n}\mathrm{d}a$ 的质量流 $\mathrm{d}M$、动量流 $\mathrm{d}\boldsymbol{m}$、能量流 $\mathrm{d}E$ 的表达式,如下的3种特殊情况是特别需要注意的:(1) 当微表面的运动速度 $\boldsymbol{V}$ 恰恰等于其上介质粒子的运动速度,即 $\boldsymbol{V}=\boldsymbol{v}$ 时,微曲面 $\mathrm{d}\boldsymbol{a}$ 即是一个物质微面或随体微面,式(2.8.20)的3式都为0;(2) 当 $\boldsymbol{V}=\boldsymbol{0}$ 时,微曲面 $\mathrm{d}\boldsymbol{a}$ 即是一个静止微面,而式(2.8.20)即给出跨过静止微面的质量流、动量流和能量流;(3) 当微曲面 $\mathrm{d}\boldsymbol{a}$ 是波阵面的一部分时,$\boldsymbol{V}$ 和 $\boldsymbol{V}-\boldsymbol{v}$ 即分别是波阵面的E氏绝对波速和波对介质的相对波速,此时,以式(2.8.20)的3式为基础,我们将可以导出在E氏坐标中跨过三维冲击波的突跃条件(可参见4.4节)。

2.8.6 以上公式在L氏描述中的相应表达形式

需要指出的是:无论是对开口体系还是对闭口体系,我们都可以采用L氏描述和E氏描述两种表达形式。本节前面的叙述和推导尽管涉及了开口体系和闭口体系两种体系,但我们采用的都是E氏描述方法,即我们都是以瞬时构形为基础来描述的。事实上,我们也可以用L氏描述方法来进行表述,此时我们可以将开口体系 $v(t)$映射为在初始构形中变化的体积 $V(t)$,它的表面映射为初始构形中的封闭曲面 $A(t)$,单位外法矢量为 $\boldsymbol{N}$,表面点在初始构形中变化的L氏移动速度为 $\boldsymbol{U}$。如果以 $f_0(\boldsymbol{X},t)$表示某种量的L氏密度即单位初始体积的某种物理量,则开口体系体积分时间导数的公式(2.8.8)式将成为

$$\frac{\mathrm{D}F}{\mathrm{D}t}=\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\int_{V(t)}f_0(\boldsymbol{X},t)\mathrm{d}V=\int_{V(t)}\frac{\partial f_0}{\partial t}\mathrm{d}v+\oint_{A(t)}f_0\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{N}\mathrm{d}A \tag{2.8.21}$$

而对闭口体系，$V(t)$、$A(t)$分别成为初始构形中不变的体积 V 和面积A，而表面点的 L 氏移动速度 $\boldsymbol{U}$ 为零。于是闭口体系体积分随体导数的公式将成为

$$\dot{F}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\oint_V f_0\mathrm{d}V=\int_V\frac{\mathrm{d}f_0}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}V=\int_V\frac{\partial f_0}{\partial t}\mathrm{d}V \tag{2.8.22}$$

最后一式是因为在 L 氏描述下任意量的随体导数也即等于其对时间的偏导数。事实上，(2.8.22)式的成立是显然的，因为任意闭口体系在初始构形中的体积 V 和微元体积 $\mathrm{d}V$ 都是与时间无关的，所以我们可以把求导运算移入积分号中且只需对被积函数求导即可。

根据表面的 L 氏移动速度 $\boldsymbol{U}$ 的定义，显然，当采用 L 氏描述时，跨过微曲面 $\mathrm{d}A$ 的 L 氏体积流(即体积流的初始体积)为 $\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{N}\mathrm{d}A$，故跨过微曲面 $\mathrm{d}A$ 的质量流 $\mathrm{d}M$、动量流 $\mathrm{d}\boldsymbol{m}$ 和能量流 $\mathrm{d}E$ 将分别为

$$\mathrm{d}M=\rho_0\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{N}\mathrm{d}A \tag{2.8.23a}$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{m}=\rho_0\boldsymbol{v}\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{N}\mathrm{d}A \tag{2.8.23b}$$

$$\mathrm{d}E=\rho_0(k+u)\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{N}\mathrm{d}A \tag{2.8.23c}$$

由于当微曲面 $\mathrm{d}A$ 是波阵面的一部分时，$\boldsymbol{U}$ 即是波阵面的 L 氏波速，此时，以式(2.8.23)的 3 式为基础，我们将可以导出在 L 氏坐标中跨过三维冲击波的突跃条件(可参见 4.4 节)。

2.9 连 续 方 程

连续方程(equation of continuity)是质量守恒定律的数学表达形式，它是连续介质场力学守恒定律的重要组成部分。由于场守恒定律的观念本身及其推导方法的重要性，在本节我们将以表达质量守恒定律的连续方程为例，分别给出从微闭口体系、微开口体系、有限闭口体系和有限开口体系出发的连续方程的导出方法。

由闭口体系和开口体系所表达的质量守恒定律可分别表述为：任意闭口体系的质量不随时间变化，即闭口体系质量的随体导数等于零；任意开口体系的质量随时间的增加率即质量的时间导数等于外界对开口体系的质量纯流入率。

2.9.1 微闭口体系

如果以 ρ_0 和 ρ 分别表示介质的初始密度和瞬时密度，以 δV 和 δv 分别表示某个微闭口体系的初始体积和瞬时体积，则微闭口体系的质量守恒定律可写为

$$\rho\delta v = \rho_0 \delta V \tag{2.9.1}$$

(2.9.1)式的含义是：微闭口体系在任何时刻的质量 $\delta M = \rho\delta v$ 都等于其初始质量 $\rho_0\delta V$。引入介质的膨胀比 $\frac{\delta v}{\delta V} = \| \boldsymbol{F} \| = \boldsymbol{J}$，则(2.9.1)式也可以写为如下形式：

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \| \boldsymbol{F} \| \tag{2.9.2}$$

如果把变形梯度张量 $\boldsymbol{F}$ 也作为未知量的话，则(2.9.2)式即可以看做是连续方程的一种形式，它把介质的瞬时密度 ρ 和瞬时膨胀比 $\| \boldsymbol{F} \|$ 联系起来，其优点是：它是一个代数方程而不是微分方程。对(2.9.1)式两边求随体导数，并注意微闭口体系的质量 $\delta M = \rho\delta v$ 不随时间变化即闭口体系质量的随体导数为零，则有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\rho\delta v) = \dot{\rho}\delta v + \rho\frac{\mathrm{d}\delta v}{\mathrm{d}t} = 0, \quad \dot{\rho} + \rho\frac{1}{\delta v}\frac{\mathrm{d}\delta v}{\mathrm{d}t} = 0$$

即

$$\dot{\rho} + \rho \mathrm{div}\boldsymbol{v} = 0 \tag{2.9.3}$$

(2.9.3)式即是流体力学中常见的连续方程的一种形式，称之为连续方程的局部形式或微分形式，它把介质的瞬时密度 ρ 和质点速度 $\boldsymbol{v}$ 这一运动学量联系起来。(2.9.2)式和(2.9.3)式即是由微闭口体系质量守恒所导出的连续方程。

2.9.2 微开口体系

如果我们以 δv 来表示某个微静止控制体这一特殊的微开口体系，则其中的质量增加率$\frac{\partial \delta M}{\partial t}$将为

$$\frac{\partial \delta M}{\partial t} = \frac{\partial(\rho\delta v)}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial t}\delta v \tag{2.9.4}$$

之所以有此式，是因为 δv 是与 t 无关的静止控制体，同时增加率也应理解为对时间的偏导数而非随体导数。而单位时间内通过 δv 的边界的质量纯流入率 $\frac{\partial \delta M'}{\partial t}$为

$$\frac{\partial \delta M'}{\partial t} = -\oint_s \rho \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}s = -\int_{\delta v} \operatorname{div}(\rho \boldsymbol{v}) \mathrm{d}v = -\operatorname{div}(\rho \boldsymbol{v}) \delta v \tag{2.9.5}$$

由于微开口体系的质量增加率$\frac{\partial \delta M}{\partial t}$应等于其质量的纯流入率$\frac{\partial \delta M'}{\partial t}$，故由(2.9.4)式和(2.9.5)式即可得

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \boldsymbol{v}) = 0 \tag{2.9.6}$$

式(2.9.6)是连续方程的另外一种形式，它是开口体系的观点所体现的质量守恒定律的表现形式。

我们很容易由坐标面所围成的静止微控制体 δv 这种特殊开口体系的质量守恒定律而推出式(2.9.6)在相应坐标系(笛卡尔坐标系或正交曲线坐标系)中的具体表达式，读者可作为练习尝试之。

(2.9.3)式和(2.9.6)式分别是从闭口观点和开口观点所导出的质量守恒定律的数学形式即连续方程，而质量守恒定律是一个客观规律，故(2.9.3)式和(2.9.6)式必然是等价的。事实上，如果将(2.9.3)式中密度的随体导数 $\dot{\rho}$ 化为其局部导数和迁移导数之和：

$$\dot{\rho} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \overleftarrow{\nabla} \cdot \boldsymbol{v} \tag{2.9.7}$$

再注意到其迁移导数与(2.9.3)式中的第二项之和恰等于矢量 $\rho \boldsymbol{v}$ 的散度，即

$$\operatorname{div}(\rho \boldsymbol{v}) = \rho \overleftarrow{\nabla} \cdot \boldsymbol{v} + \boldsymbol{v} \cdot \overleftarrow{\nabla} \rho \tag{2.9.8}$$

则(2.9.3)式便化为(2.9.6)式了。

2.9.3 有限闭口体系

如果以 v 表示一个有限的闭口体系，其质量为 M，由于介质是运动的，故体积 v 是时间 t 的函数。闭口体系质量守恒定律$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}=0$可写为体积分的随体导数为零的形式，即

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_v \rho \mathrm{d}v = \int_v \frac{\mathrm{d}(\rho \mathrm{d}v)}{\mathrm{d}t} = \int_v \left[\dot{\rho} \mathrm{d}v + \rho \frac{\mathrm{d}(\mathrm{d}v)}{\mathrm{d}t}\right] = \int_v [\dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \boldsymbol{v}] \mathrm{d}v = 0 \tag{2.9.9}$$

推导过程中我们考虑到了各个微闭口体系 $\mathrm{d}v$ 都是随时间变化的，同时利用了体积相对膨胀率的公式(2.7.7)式。式(2.9.9)是 2.8 节中介质胀缩法的公式(2.8.14)式当量 f 取为 ρ 时的一个特例，其中右端的两项分别表示闭口体系质量

的等容导数和胀缩导数。式(2.9.9)即是闭口体系总体形式或积分形式的连续方程，它对任意的闭口体系 v 都是成立的，由闭口体系 v 的任意性和(2.9.9)式中被积函数的处处连续性，我们即得出被积函数应该处处为零，这就是下面的连续方程：

$$\dot{\rho} + \rho \mathrm{div} \boldsymbol{v} = 0 \tag{2.9.3}$$

另外，利用 2.8 节中体积分随体导数的公式(2.8.9b)式并取其中的量 f 为 ρ，再利用 v 的任意性和被积函数的连续性，我们即可得到如下公式：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho \boldsymbol{v}) = 0 \tag{2.9.6}$$

2.9.4 有限开口体系

如果取 v 为某个在空间静止的控制体这一特殊开口体系，其中介质质量为 M，则开口体系 v 中质量的增加率 $\frac{\partial M}{\partial t}$ 将为

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\int_v \rho \mathrm{d}v = \int_v \frac{\partial(\rho \mathrm{d}v)}{\partial t} = \int_v \frac{\partial \rho}{\partial t}\mathrm{d}v \tag{2.9.10}$$

由于开口体系 v 和微开口体系 $\mathrm{d}v$ 都是与时间无关的，所以(2.9.10)式中对时间的导数写为偏导数，且 $\frac{\partial \mathrm{d}v}{\partial t}$ 为零。通过 v 的表面介质质量的纯流入率 $\frac{\partial M'}{\partial t}$ 为

$$\frac{\partial M'}{\partial t} = -\oint_s \rho \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}s = -\int_v \mathrm{div}(\rho \boldsymbol{v})\mathrm{d}v \tag{2.9.11}$$

开口体系的质量守恒定律给出 $\frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial M'}{\partial t}$，即

$$\int_v \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho \boldsymbol{v})\right]\mathrm{d}v = 0 \tag{2.9.12}$$

式(2.9.12)即是开口体系总体形式或积分形式的连续方程。由开口体系 v 的任意性和(2.9.12)式中被积函数的连续性，即可得到式(2.9.6)。

当然，我们也可以由表面 $a(t)$ 以速度 $\boldsymbol{V}(t)$ 运动的一般开口体系 $v(t)$ 的质量守恒来导出式(2.9.6)。事实上，在 2.8 节的式(2.8.8)中令 $f = \rho$，可得开口体系的质量增加率为

$$\frac{\mathrm{D}M}{\mathrm{D}t} = \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\int_{v(t)} \rho(\boldsymbol{x}, t)\mathrm{d}v = \int_{v(t)} \frac{\partial \rho}{\partial t}\mathrm{d}v + \oint_{a(t)} \rho \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}a \tag{2.9.13}$$

而通过 $a(t)$ 的质量纯流入率为

$$\frac{\mathrm{D}M'}{\mathrm{D}t} = \oint_{a(t)} \rho(\boldsymbol{V} - \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}a = \oint_{a(t)} \rho \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}a - \int_{v(t)} \mathrm{div}(\rho \boldsymbol{v})\mathrm{d}v \tag{2.9.14}$$

开口体系质量守恒$\frac{\mathrm{D}M}{\mathrm{D}t}=\frac{\mathrm{D}M'}{\mathrm{D}t}$同样给出(2.9.12)式，再由开口体系的任意性和被积函数的连续性，同样可得式 (2.9.6)。

2.10 观测标架(时空系)的变换

2.10.1 时空系和时空系的变换

观察介质的运动必须立足并借助于一定的观测标架(observation frame)，即使对介质的同一个运动，当观察者站在不同的观测标架上时，人们所感受到的运动图像也是不同的，在不同的观测标架中人们所测得的有关物理量也将是不同的。例如，在有相对运动的两个观测标架中所测得的同一个介质粒子的速度和加速度等运动学量将是不同的；此外有一些动力学量本身的定义方法也是与观测标架紧密相连的，因此它们也是与观测标架紧密相连的。本节将研究：对于介质的同一个运动，当人们所立足的瞬时观测标架不同时，所得各种物理量是如何变换的。时间可以差一个平移，空间标架可以差一个平移和旋转(或反射)，时间和空间的乘积组成一个四维空间 $\varphi(\boldsymbol{x},t)$，称为时空系，其中 t 表示在我们的时空系中所量度的时间，$\boldsymbol{x}$ 表示粒子在我们的时空系中对该观测标架原点的位置矢量。时空系的变换也称为标架变换，我们将在经典力学而不是在相对论力学的范畴内来讨论时空变换，即只讨论 Galileo 变换而不是讨论 Lawrence 变换。

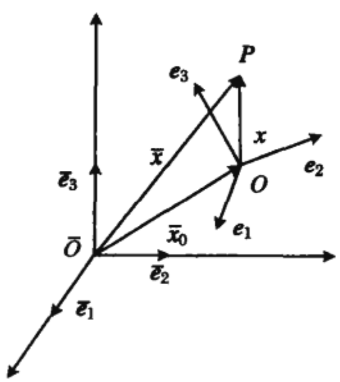


图 2.8 空间标架变换

设有两个时空系 $\varphi(\boldsymbol{x},t)$和$\bar{\varphi}(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{t})$。设时间 $\bar{t}$ 和 t 由如下平移关系相联系：

$$\bar{t}=t+\bar{t}_0 \qquad (2.10.1)$$

其中 $\bar{t}_0$ 表示时空系 φ 中时间起点 $t=0$ 时所对应的时空系 $\bar{\varphi}$ 中的时间。再设 $\bar{\varphi}$ 和 φ 中的观测标架如图 2.8 所示，其各自的单位正交基矢量$\bar{\boldsymbol{e}}_i$ 和 $\boldsymbol{e}_j$ 由如下关系相联系：

$$\bar{\boldsymbol{e}}_i=Q_{ij}\boldsymbol{e}_j,\quad \boldsymbol{e}_i=Q_{ji}\bar{\boldsymbol{e}}_j \qquad (2.10.2)$$

其中 Q_{ij}是由 $\boldsymbol{e}_j$ 到$\bar{\boldsymbol{e}}_i$ 的过渡矩阵，为正交矩阵：

$$Q_{ij}=\bar{\boldsymbol{e}}_i\cdot\boldsymbol{e}_j=\boldsymbol{e}_j\cdot\bar{\boldsymbol{e}}_i,\quad Q_{ik}Q_{jk}=\delta_{ij}=Q_{ki}Q_{kj}\tag{2.10.3}$$

参照图2.8,粒子 P 在两个标架中的位置矢量 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 和 $\boldsymbol{x}$ 可由如下矢量方程给出:

$$\bar{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{x}+\bar{\boldsymbol{x}}_0\tag{2.10.4}$$

其中 $\bar{\boldsymbol{x}}_0$ 为 φ 系原点 O 相对于 $\bar{\varphi}$ 系原点 $\bar{O}$ 的位置矢量。如将矢量方程(2.10.4)式两端同时点乘以基矢 $\bar{\boldsymbol{e}}_i$ 并利用式(2.10.2),则易证有

$$\bar{x}_i=Q_{ij}x_j+\bar{x}_{i0}\tag{2.10.5}$$

其中 $\bar{x}_i$、x_j 分别是矢量 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 和 $\boldsymbol{x}$ 在各自标架 $\bar{\varphi}$ 和 φ 中的坐标,$\bar{x}_{i0}$ 是矢量 $\bar{\boldsymbol{x}}_0$ 在标架 $\bar{\varphi}$ 中的坐标:

$$\bar{x}_i=\bar{\boldsymbol{x}}\cdot\bar{\boldsymbol{e}}_i,\quad x_j=\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{e}_j,\quad \bar{x}_{i0}=\bar{\boldsymbol{x}}_0\cdot\bar{\boldsymbol{e}}_i\tag{2.10.6}$$

如将正交矩阵 Q_{ij} 与表示旋转(或反射)的某一正交张量 $\boldsymbol{Q}$ 相对应,则可将坐标变换的公式(2.10.5)式写为如下的矢量间的平移加正交映射形式:

$$\bar{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{x}+\bar{\boldsymbol{x}}_0\tag{2.10.7}$$

在一般情况下,$\boldsymbol{Q}$ 和 $\bar{\boldsymbol{x}}_0$ 可以是时间的函数,因此,由 $\varphi(\boldsymbol{x},t)$ 到 $\bar{\varphi}(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{t})$ 的时空变换可写为

$$\begin{cases}\bar{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{Q}(t)\cdot\boldsymbol{x}+\bar{\boldsymbol{x}}_0(t)\\ \bar{t}=t+\bar{t}_0\\ \boldsymbol{Q}(t)\cdot\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}(t)=\boldsymbol{I}=\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}(t)\cdot\boldsymbol{Q}(t)\end{cases}\tag{2.10.8}$$

式(2.10.8)就是时空变换的数学表达形式,它建立了任一粒子在时空系 φ 中的位置矢量 $\boldsymbol{x}$ 到其在时空系 $\bar{\varphi}$ 中的位置矢量 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 的映射关系。如 $\|\boldsymbol{Q}\|=1$,则称(2.10.8)式为正则的时空变换。

由(2.10.8)式的第二式,显然我们有

$$\bar{t}_2-\bar{t}_1=t_2-t_1\tag{2.10.9}$$

所以,时空变换(2.10.8)式具有两个事件在不同时空系中的时间间隔和时序不变的性质。另外,设同一时刻两个事件在 $\bar{\varphi}$ 和 φ 中的位置各为 $\bar{\boldsymbol{x}}_2$、$\bar{\boldsymbol{x}}_1$ 和 $\boldsymbol{x}_2$、$\boldsymbol{x}_1$,则有

$$\bar{\boldsymbol{x}}_2-\bar{\boldsymbol{x}}_1=\boldsymbol{Q}(t)\cdot(\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_1),\quad \mathrm{d}\bar{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{Q}(t)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{x}\tag{2.10.10}$$

其中 $\mathrm{d}\bar{\boldsymbol{x}}$ 和 $\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ 分别表示两个事件地点无限接近时在 $\bar{\varphi}$ 和 φ 中连接此两事件地点的微线元。

由(2.10.10)式,我们有

$$\begin{aligned}(\bar{\boldsymbol{x}}_2-\bar{\boldsymbol{x}}_1)\cdot(\bar{\boldsymbol{x}}_2-\bar{\boldsymbol{x}}_1)&=[\boldsymbol{Q}(t)\cdot(\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_1)]\cdot[\boldsymbol{Q}(t)\cdot(\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_1)]\\&=(\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_1)\cdot\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}(t)\cdot\boldsymbol{Q}(t)\cdot(\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_1)\end{aligned}$$

由于 $\boldsymbol{Q}(t)$ 是正交张量,所以我们有

$$(\bar{\boldsymbol{x}}_2-\bar{\boldsymbol{x}}_1)\cdot(\bar{\boldsymbol{x}}_2-\bar{\boldsymbol{x}}_1)=(\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_1)\cdot(\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_1),\quad \mathrm{d}\bar{\boldsymbol{x}}\cdot\mathrm{d}\bar{\boldsymbol{x}}=\mathrm{d}\boldsymbol{x}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{x}\tag{2.10.11}$$

式(2.10.11)说明时空变换(2.10.8)式还具有同一时刻两个事件在 $\bar{\varphi}$ 和 φ 中保持距离不变的性质。

根据张量分析的知识,我们可以看到,式(2.10.10)事实上是同一个客观存在的线元矢量在相差任意一个正交变换 $\boldsymbol{Q}(t)$(和平移 $\bar{\boldsymbol{x}}_0(t)$)的两个标架中的表象间的关系,我们将之称为线元的时空变换关系,或者简言之,线元是标架无关的矢量或客观性矢量。

2.10.2 标架无关性张量或客观性张量

标架无关性张量(frame indifferent quantities)或客观性张量(objective quantities)是指在时空变换(2.10.8)式之下,其在两个时空系中的表象以联系两个时空系的正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 为过渡矩阵的相应张量变换法则而变换的物理量。于是,我们可给出标架无关的标量、矢量、2 阶张量等定义如下。

标架无关的标量是指在时空变换(2.10.8)式之下保持数值不变的量:

$$\bar{f} = f \tag{2.10.12}$$

在连续介质力学中有一基本假定,即质量是标架无关的标量。(2.10.11)式说明:线元长度是标架无关的标量。由(2.10.10)式出发,容易证明面元面积、体元体积也都是标架无关的标量(请读者思考),因此质量密度也是标架无关的标量。但是以后将说明速度的大小不是标架无关的标量,因此动能也不是标架无关的标量。

标架无关的矢量是指在时空变换(2.10.8)式之下按线元 $\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ 的变换规律(2.10.10)式而变换的 1 阶量:

$$\bar{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{b} \tag{2.10.13}$$

连续介质力学中的另一个基本假定是力是标架无关的矢量。

标架无关的 2 阶张量是指在时空变换(2.10.8)式之下按如下规律而变换的 2 阶量:

$$\bar{\boldsymbol{T}} = \boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}} \tag{2.10.14}$$

在张量分析中,我们曾指出把矢量映射为矢量的 2 阶量必是 2 阶张量,所以容易说明:把标架无关矢量映射为标架无关矢量的 2 阶量也必是标架无关的 2 阶张量。事实上,设 2 阶量 $\boldsymbol{T}$ 把标架无关的矢量 $\boldsymbol{v}$ 映射为标架无关的矢量 $\boldsymbol{v}^*$,则有

$$\boldsymbol{v}^* = \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{v}, \quad \bar{\boldsymbol{v}}^* = \bar{\boldsymbol{T}} \cdot \bar{\boldsymbol{v}} \quad (\text{映射关系在 } \varphi \text{ 和 } \bar{\varphi} \text{ 中都成立}) \tag{2.10.15}$$

$$\bar{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{v}, \quad \bar{\boldsymbol{v}}^* = \boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{v}^* \quad (\boldsymbol{v} \text{ 和 } \boldsymbol{v}^* \text{ 为标架无关矢量}) \tag{2.10.16}$$

于是有

$$\bar{\boldsymbol{v}}^* = \boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{v}^* = \boldsymbol{Q}\cdot(\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{T}\cdot(\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\cdot\bar{\boldsymbol{v}}) = (\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}})\cdot\bar{\boldsymbol{v}} \tag{2.10.17}$$

将(2.10.15)式中的第二式代入(2.10.17)式左端，即可得

$$\bar{\boldsymbol{T}}\cdot\bar{\boldsymbol{v}} = (\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}})\cdot\bar{\boldsymbol{v}}$$

此式对任意的 $\bar{\boldsymbol{v}}$ 都应成立，故我们即可得出 $\bar{\boldsymbol{T}}=\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}$，这说明 $\boldsymbol{T}$ 确是标架无关的 2 阶张量。

下面我们来导出一些重要物理量的时空变换式并分析其标架无关特性。

将介质运动规律在 φ 和 $\bar{\varphi}$ 中的表达式代入时空变换(2.10.8)式的第一式，即得

$$\bar{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{X},t) = \boldsymbol{Q}(t)\cdot\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X},t) + \bar{\boldsymbol{x}}_0(t) \tag{2.10.18}$$

其中 $\boldsymbol{X}$ 为粒子的 L 氏坐标。将(2.10、18)式对 $\boldsymbol{X}$ 求导，即在不同时空系中求同一运动对同一参考构形的变形梯度，得

$$\bar{\boldsymbol{F}} = \boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{F} \tag{2.10.19}$$

其中 $\boldsymbol{F}=\dfrac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial\boldsymbol{X}}$和$\bar{\boldsymbol{F}}=\dfrac{\partial\bar{\boldsymbol{x}}}{\partial\boldsymbol{X}}$分别是介质运动在时空系 φ 和 $\bar{\varphi}$ 中的变形梯度。

式(2.10.19)给出了变形梯度张量 $\boldsymbol{F}$ 的时空变换式，它说明尽管 $\boldsymbol{F}$ 是一个 2 阶两点张量，但它却并不是一个标架无关的 2 阶张量，在时空变换(2.10.8)式之下它按照类似于标架无关矢量的变换规律变换。这是因为时空变换只涉及了观察者所处的 E 氏标架的变换，而并未涉及参考构形中 L 氏标架的变换。另外，由式(2.10.19)易见，对正则的时空变换，$\|\bar{\boldsymbol{F}}\| = \|\boldsymbol{Q}\|\|\boldsymbol{F}\| = \|\boldsymbol{F}\|$，故 $J=\|\boldsymbol{F}\|=\dfrac{\delta v}{\delta V}$是一标架无关的标量。

对 $\bar{\boldsymbol{F}}$ 和 $\boldsymbol{F}$ 各做右极分解，则(2.10.19)式成为

$$\bar{\boldsymbol{R}}\cdot\bar{\boldsymbol{U}} = \boldsymbol{Q}\cdot(\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{U}) = (\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{R})\cdot\boldsymbol{U} \tag{2.10.20}$$

由 $\boldsymbol{Q}$、$\boldsymbol{R}$ 都为正交张量，容易说明 $\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{R}$ 也是正交张量，这是因为

$$(\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{R})\cdot(\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{R})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{I}$$

于是，式(2.10.20)的右端与左端一样也是同一张量的一种右极分解表示。由右极分解的唯一性，得

$$\bar{\boldsymbol{R}} = \boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{R},\quad \bar{\boldsymbol{U}} = \boldsymbol{U} \tag{2.10.21}$$

式(2.10.21)的两式即分别给出了旋转张量 $\boldsymbol{R}$ 和右伸缩张量 $\boldsymbol{U}$ 的时空变换规则。由此显然易得右 Green 张量 $\boldsymbol{C}$ 和 L 氏应变张量 $\boldsymbol{E}$ 的时空变换式：

$$\bar{\boldsymbol{C}} = \boldsymbol{C}, \quad \bar{\boldsymbol{E}} = \boldsymbol{E} \tag{2.10.22}$$

事实上,如注意到 $\boldsymbol{U}$、$\boldsymbol{C}$、$\boldsymbol{E}$ 是 L 氏坐标中的 2 阶张量,这些结果就不难理解。这是因为时空变换只是观察运动的 E 氏坐标系的变换,而与 L 氏坐标是没有关系的。

以上的论证说明:两点张量 $\boldsymbol{F}$ 和 $\boldsymbol{R}$ 的时空变换式在形式上类似于时空无关矢量的变换式,而 L 氏坐标中的 2 阶张量 $\boldsymbol{U}$、$\boldsymbol{C}$、$\boldsymbol{E}$ 的时空变换式在形式上则类似于时空无关标量的变换式。

对左伸缩张量 $\boldsymbol{V}$ 及有关的量,有

$$\bar{\boldsymbol{V}} = \bar{\boldsymbol{F}} \cdot \bar{\boldsymbol{R}}^{\mathrm{T}} = (\boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{F}) \cdot (\boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{R})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}} \tag{2.10.23}$$

$$\left\{\begin{aligned} \bar{\boldsymbol{B}} &= \bar{\boldsymbol{V}} \cdot \bar{\boldsymbol{V}} = (\boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}) \cdot (\boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}) = \boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{V}^2 \cdot \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}} \\ \bar{\boldsymbol{B}}^{-1} &= (\boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}})^{-1} = \boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{B}^{-1} \cdot \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}} \\ \bar{\boldsymbol{e}} &= \frac{1}{2}(\boldsymbol{I} - \bar{\boldsymbol{B}}^{-1}) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{I} \cdot \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{B}^{-1} \cdot \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}) \\ &= \frac{1}{2}\boldsymbol{Q} \cdot (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{B}^{-1}) \cdot \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}} \end{aligned}\right. \tag{2.10.24}$$

(2.10.23)式和(2.10.24)式说明:$\boldsymbol{V}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{B}^{-1}$、$\boldsymbol{e}$ 这些 E 氏坐标中的 2 阶张量都是标架无关的 2 阶张量。

连续介质热力学中的另一基本假定是,温度 T 是时空无关的标量,即

$$\bar{T} = T \tag{2.10.25a}$$

而温度 T 的 E 氏梯度 $\boldsymbol{g}$(空间梯度)和 L 氏梯度 $\boldsymbol{G}$(物质梯度)分别为

$$\boldsymbol{g} = \frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{x}}, \quad \boldsymbol{G} = \frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{X}} = \frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{x}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{X}} = \boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{F}, \quad \boldsymbol{g} = \boldsymbol{G} \cdot \boldsymbol{F}^{-1} \tag{2.10.25b}$$

于是有

$$\bar{\boldsymbol{g}} = \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{\boldsymbol{x}}} = \frac{\partial T}{\partial \bar{\boldsymbol{x}}} = \frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{x}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \bar{\boldsymbol{x}}} = \boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{g} \tag{2.10.26}$$

$$\bar{\boldsymbol{G}} = \frac{\partial \bar{T}}{\partial \boldsymbol{X}} = \frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{X}} = \frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{x}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{X}} = \boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{F} = \boldsymbol{G} \tag{2.10.27}$$

即 $\boldsymbol{g}$ 是标架无关的矢量,而 $\boldsymbol{G}$ 的时空变换式类似于标架无关标量的变换式。

2.10.3 速度、加速度、伸缩率、转动率的时空变换关系

对时空变换式(2.10.7)式求随体导数,可得

$$\dot{\bar{x}} = Q \cdot \dot{x} + \dot{\bar{x}}_0 + \dot{Q} \cdot x = Q \cdot \dot{x} + \dot{\bar{x}}_0 + \dot{Q} \cdot Q^{\mathrm{T}} \cdot (\bar{x} - \bar{x}_0)$$

即

$$\dot{\bar{x}} = Q \cdot \dot{x} + \dot{\bar{x}}_0 + A \cdot (\bar{x} - \bar{x}_0) \tag{2.10.28a}$$

其中

$$A = \dot{Q} \cdot Q^{\mathrm{T}} \tag{2.10.29}$$

由于 Q 是正交张量,$Q \cdot Q^{\mathrm{T}} = I$,对之求导,即可得

$$\dot{Q} \cdot Q^{\mathrm{T}} + Q \cdot \dot{Q}^{\mathrm{T}} = \dot{Q} \cdot Q^{\mathrm{T}} + (\dot{Q} \cdot Q^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = 0$$

这说明 $A = \dot{Q} \cdot Q^{\mathrm{T}}$ 是一反对称张量,它与一矢量 ω 相对偶,即

$$A^{\mathrm{T}} = -A, \quad \omega_i = -\frac{1}{2} e_{ijk} A_{jk} \tag{2.10.30}$$

故(2.10.28a)式也可写为

$$\dot{\bar{x}} = Q \cdot \dot{x} + \dot{\bar{x}}_0 + A \cdot (\bar{x} - \bar{x}_0) = Q \cdot \dot{x} + \dot{\bar{x}}_0 + \omega \times (\bar{x} - \bar{x}_0) \tag{2.10.28b}$$

(2.10.28)式即给出了质点速度的时空变换公式,显然它并不是时空无关的矢量。

对(2.10.28)式再求导,并利用 A 的定义(2.10.29)式所给出的 $\dot{Q}$ 和(2.10.28)式所解出的 $Q \cdot \dot{x}$,可得

$$\ddot{\bar{x}} = Q \cdot \ddot{x} + \ddot{\bar{x}}_0 + (\dot{A} - A^2) \cdot (\bar{x} - \bar{x}_0) + 2A \cdot (\dot{\bar{x}} - \dot{\bar{x}}_0) \tag{2.10.31a}$$

将(2.10.28)式所给出的 $\dot{\bar{x}} - \dot{\bar{x}}_0$ 代入,(2.10.31a)式也可写为

$$\ddot{\bar{x}} = Q \cdot \ddot{x} + \ddot{\bar{x}}_0 + \dot{A} \cdot (\bar{x} - \bar{x}_0) + A^2 \cdot (\bar{x} - \bar{x}_0) + 2A \cdot Q \cdot \dot{x} \tag{2.10.31b}$$

(2.10.31a)式或(2.10.31b)式即给出了质点加速度的时空变换式,显然它也不是时空无关的矢量。

如(2.10.28)式和(2.10.31)式所表明的那样,质点速度和加速度在一般的时空变换下都不是时空无关的矢量。而只有当

$$\dot{\bar{x}}_0 \equiv 0 \quad (\bar{x}_0 \text{ 为常矢量}), \quad A = \dot{Q} \cdot Q^{\mathrm{T}} \equiv 0 \quad (\dot{Q} = 0, Q \text{ 为常正交张量}) \tag{2.10.32}$$

时，速度才是标架无关的矢量，这相当于两标架刚性固着在一起的情形。另外，只有当

$$\ddot{\boldsymbol{x}}_0 \equiv \boldsymbol{0} \quad (\dot{\boldsymbol{x}}_0 \text{ 为常矢量}), \quad \boldsymbol{A} = \dot{\boldsymbol{Q}} \cdot \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}} \equiv \boldsymbol{0} \quad (\dot{\boldsymbol{Q}} = \boldsymbol{0}, \boldsymbol{Q} \text{ 为常正交张量}) \tag{2.10.33}$$

时，加速度才是标架无关的矢量，这相当于两标架相互作匀速直线运动，即 Galileo 变换的情形。

最后，因速度的空间梯度为 $\boldsymbol{L} = \dot{\boldsymbol{F}} \cdot \boldsymbol{F}^{-1}$，所以

$$\begin{aligned}\bar{\boldsymbol{L}} &= \dot{\bar{\boldsymbol{F}}} \cdot \bar{\boldsymbol{F}}^{-1} = (\overline{\boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{F}})^{\boldsymbol{\cdot}} \cdot (\boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{F})^{-1} = (\boldsymbol{Q} \cdot \dot{\boldsymbol{F}} + \dot{\boldsymbol{Q}} \cdot \boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}} \\ &= \boldsymbol{Q} \cdot \dot{\boldsymbol{F}} \cdot \boldsymbol{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}} + \dot{\boldsymbol{Q}} \cdot \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\end{aligned}$$

即

$$\bar{\boldsymbol{L}} = \boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{A} \tag{2.10.34}$$

对 $\bar{\boldsymbol{L}}$ 和 $\boldsymbol{L}$ 各做和分解，(2.10.34)式可写为

$$\bar{\boldsymbol{D}} + \overline{\boldsymbol{W}} = \boldsymbol{Q} \cdot (\boldsymbol{D} + \boldsymbol{W}) \cdot \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{A} = \boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{W} \cdot \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{A} \tag{2.10.35}$$

显然 $\boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}$ 和 $\boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{W} \cdot \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{A}$ 分别是对称张量和反对称张量，因此(2.10.35)式两端都是同一个 2 阶张量的和分解式。由和分解的唯一性，有

$$\bar{\boldsymbol{D}} = \boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}} \tag{2.10.36}$$

$$\overline{\boldsymbol{W}} = \boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{W} \cdot \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{A} \tag{2.10.37}$$

式(2.10.34)、式(2.10.36)、式(2.10.37)分别给出了 $\boldsymbol{L}$、$\boldsymbol{D}$、$\boldsymbol{W}$ 的时空变换式，它们说明：伸缩率张量 $\boldsymbol{D}$ 是标架无关的 2 阶张量，而速度梯度张量 $\boldsymbol{L}$ 和转动率张量 $\boldsymbol{W}$ 都不是标架无关的 2 阶张量。只在 $\boldsymbol{A} = \dot{\boldsymbol{Q}} \cdot \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}} \equiv \boldsymbol{0}$（$\dot{\boldsymbol{Q}} = \boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{Q}$ 为常正交张量）时，$\boldsymbol{L}$ 和 $\boldsymbol{W}$ 才具有时空无关的性质。

2.10.4 速度和加速度时空变换式的物理解释

在基变换的公式(2.10.2)式中，Q_{ij} 只代表一个正交矩阵而并不具有张量的意义；而在将(2.10.5)式写为映射形式(2.10.7)式或(2.10.8)式时，我们曾提及“将正交矩阵 Q_{ij} 与表示旋转(或反射)的某一正交张量 $\boldsymbol{Q}$ 相对应”，那么这个正交张量 $\boldsymbol{Q}$ 的物理意义究竟是什么？Q_{ij} 又是对应这个张量在哪个坐标系中的分量呢？为了回答这两个问题，我们首先来证明：不论把 Q_{ij} 视为张量 $\boldsymbol{Q}$ 在标架 φ 中还是 $\bar{\varphi}$ 中的分量，基矢间的线性表达关系(2.10.2)式都等价于基矢间的映射关系：

$$\boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{Q}\cdot\bar{\boldsymbol{e}}_i,\quad \bar{\boldsymbol{e}}_i = \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{e}_i \tag{2.10.38}$$

事实上,把 Q_{ij} 视为张量 $\boldsymbol{Q}$ 在标架 φ 或 $\bar{\varphi}$ 中的分量时,将分别有

$$\boldsymbol{Q} = Q_{jl}\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_l,\quad \boldsymbol{Q} = Q_{jl}\bar{\boldsymbol{e}}_j\bar{\boldsymbol{e}}_l \tag{2.10.39}$$

如取前者,则将之代入(2.10.38)式的第二式,将有

$$\bar{\boldsymbol{e}}_i = Q_{lj}\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_l\cdot\boldsymbol{e}_i = Q_{lj}\boldsymbol{e}_j\delta_{li} = Q_{ij}\boldsymbol{e}_j \tag{2.10.40}$$

此式即(2.10.2)式。类似地如取(2.10.39)式的第二式,则将之代入(2.10.38)式的第一式也可得(2.10.2)式。这就说明:我们把 Q_{ij} 与正交张量 $\boldsymbol{Q}$ 对应并将(2.10.5)式改写为张量间的映射关系(2.10.7)式或(2.10.8)式是合理的。

当正交张量 $\boldsymbol{Q}$ 为正则正交张量时,(2.10.38)式的几何意义是:如将 $\bar{\varphi}$ 中的基矢量 $\bar{\boldsymbol{e}}_i$ 做一由正交张量 $\boldsymbol{Q}$ 所表达的旋转,则将得到 φ 中的基矢量 $\boldsymbol{e}_i$,所以正则正交张量 $\boldsymbol{Q}$ 代表了 φ 相对于 $\bar{\varphi}$ 的旋转,这就是 $\boldsymbol{Q}$ 的几何意义(如 $\boldsymbol{Q}$ 是非正则的,则在旋转基础上再加一反射)。(2.10.7)式或(2.10.8)式中的 $\boldsymbol{x}$ 是我们在 φ 中所看到的粒子的位置矢量,而 $\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{x}$ 则是由于 φ 系存在着相对于 $\bar{\varphi}$ 系的旋转 $\boldsymbol{Q}$ 而在 $\bar{\varphi}$ 中所得到的相应矢量。

下面给出速度和加速度时空变换式的物理解释:

如果我们把 $\bar{\varphi}$ 视为绝对坐标系而把 φ 视为相对坐标系的话,则

$$\dot{\bar{\boldsymbol{x}}} = \boldsymbol{Q}\cdot\dot{\boldsymbol{x}} + \dot{\bar{\boldsymbol{x}}}_0 + \boldsymbol{A}\cdot(\bar{\boldsymbol{x}} - \bar{\boldsymbol{x}}_0) = \boldsymbol{Q}\cdot\dot{\boldsymbol{x}} + \dot{\bar{\boldsymbol{x}}}_0 + \boldsymbol{\omega}\times(\bar{\boldsymbol{x}} - \bar{\boldsymbol{x}}_0)$$

(即(2.10.28b)式)中的 $\dot{\bar{\boldsymbol{x}}}$ 表示绝对速度;$\dot{\boldsymbol{x}}$ 表示相对速度在相对系中的表象,而 $\boldsymbol{Q}\cdot\dot{\boldsymbol{x}}$ 是其在 $\bar{\varphi}$ 中的表象,简言之 $\boldsymbol{Q}\cdot\dot{\boldsymbol{x}}$ 即是相对速度;$\dot{\bar{\boldsymbol{x}}}_0$ 表示 φ 系原点 O 的平移速度,$\boldsymbol{A}\cdot(\bar{\boldsymbol{x}} - \bar{\boldsymbol{x}}_0) = \boldsymbol{\omega}\times(\bar{\boldsymbol{x}} - \bar{\boldsymbol{x}}_0)$ 则表示牵连点绕其原点的旋转速度(与反对称张量 $\boldsymbol{A}$ 对偶的矢量 $\boldsymbol{\omega}$ 代表 φ 系相对于 $\bar{\varphi}$ 系的角速度矢量),两项之和代表牵连速度。

回到(2.10.31b)式:

$$\ddot{\bar{\boldsymbol{x}}} = \boldsymbol{Q}\cdot\ddot{\boldsymbol{x}} + \ddot{\bar{\boldsymbol{x}}}_0 + \dot{\boldsymbol{A}}\cdot(\bar{\boldsymbol{x}} - \bar{\boldsymbol{x}}_0) + \boldsymbol{A}^2\cdot(\bar{\boldsymbol{x}} - \bar{\boldsymbol{x}}_0) + 2\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{Q}\cdot\dot{\boldsymbol{x}}$$

$\ddot{\bar{\boldsymbol{x}}}$ 代表绝对加速度;$\boldsymbol{Q}\cdot\ddot{\boldsymbol{x}}$ 代表相对加速度(在 $\bar{\varphi}$ 系中的表象);右端第二、三、四项之和代表牵连加速度,其中 $\ddot{\bar{\boldsymbol{x}}}_0$ 代表 φ 系原点 O 的加速度,$\dot{\boldsymbol{A}}\cdot(\bar{\boldsymbol{x}} - \bar{\boldsymbol{x}}_0) = \dot{\boldsymbol{\omega}}\times(\bar{\boldsymbol{x}} - \bar{\boldsymbol{x}}_0)$ 代表牵连点绕 O 的旋转切向加速度,$\boldsymbol{A}^2\cdot(\bar{\boldsymbol{x}} - \bar{\boldsymbol{x}}_0) = \boldsymbol{\omega}\times[\boldsymbol{\omega}\times(\bar{\boldsymbol{x}} - \bar{\boldsymbol{x}}_0)]$ 代表牵连点绕 O 的旋转向心加速度;右端第五项 $2\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{Q}\cdot\dot{\boldsymbol{x}} = 2\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{Q}\cdot\dot{\boldsymbol{x}})$ 代表哥里奥利斯加速度。

习　题

2.1　设 L 氏坐标系和 E 氏坐标系分别取为初始构形中的柱坐标和瞬时构形中的柱坐标，即$(X^1, X^2, X^3)=(R,\Theta,Z)$，$(x^1, x^2, x^3)=(r,\theta,z)$，试证明漂移张量为

$$[s_{iJ}]=\begin{bmatrix}\cos(\theta-\Theta) & R\sin(\theta-\Theta) & 0\\ -r\sin(\theta-\Theta) & rR\cos(\theta-\Theta) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$[s_i{}^J]=\begin{bmatrix}\cos(\theta-\Theta) & \dfrac{1}{R}\sin(\theta-\Theta) & 0\\ -r\sin(\theta-\Theta) & \dfrac{r}{R}\cos(\theta-\Theta) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

2.2　试借助 L 氏坐标中的度量张量 $\boldsymbol{G}$、E 氏坐标中的度量张量 $\boldsymbol{g}$、漂移张量 $\boldsymbol{s}=\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}$，由变形梯度张量的分量 $F^i{}_J$ 求出其他分量 F_{IJ}、F_{ij}、$F^I{}_{\cdot j}$；求出其 C_{ij}、B_{IJ}。

2.3　设介质运动的 L 氏描述为：$x_1=\alpha(t)X_1$，$x_2=\beta(t)X_2$，$x_3=\gamma(t)X_3$，试求：

(1) 介质运动的 E 氏描述 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x},t)$；

(2) 介质质点速度的 L 氏描述 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}(\boldsymbol{X},t)$和其 E 氏描述 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)$；

(3) 介质质点加速度的 L 氏描述 $\dot{\boldsymbol{v}}=\dot{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{X},t)$和其 E 氏描述 $\dot{\boldsymbol{v}}=\dot{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{x},t)$。

2.4　设介质运动的 L 氏描述为

$$x_1=X_1,\quad x_2=\mathrm{e}^{t/\tau}(X_2+X_3)/2+\mathrm{e}^{-t/\tau}(X_2-X_3)/2,$$
$$x_3=\mathrm{e}^{t/\tau}(X_2+X_3)/2-\mathrm{e}^{-t/\tau}(X_2-X_3)/2$$

试求：

(1) 介质运动的 E 氏描述 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x},t)$；

(2) 介质质点速度的 L 氏描述 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}(\boldsymbol{X},t)$和其 E 氏描述 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)$；

(3) 介质质点加速度的 L 氏描述 $\dot{\boldsymbol{v}}=\dot{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{X},t)$和其 E 氏描述 $\dot{\boldsymbol{v}}=\dot{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{x},t)$。

2.5　设介质速度场的 L 氏描述为：$v_1=-X_2\mathrm{e}^{-t/\tau}/\tau$，$v_2=-X_3/\tau$，$v_3=2ta$，其中 τ、a 分别为具有时间和加速度量纲的常数。试求：

(1) 介质运动规律的L氏描述 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X},t)$ 和其E氏描述 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x},t)$；

(2) 介质质点加速度的L氏描述 $\dot{\boldsymbol{v}}=\dot{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{X},t)$ 和其E氏描述 $\dot{\boldsymbol{v}}=\dot{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{x},t)$。

2.6 在直角笛卡尔坐标系中，证明 $\boldsymbol{F}^{-1}=J^{-1}\left(\frac{\partial J}{\partial \boldsymbol{F}}\right)^{\mathrm{T}}$，即 $F_{Li}^{-1}=J^{-1}\frac{\partial J}{\partial F_{iL}}$。要求采用以下两种证法：

(1) 直接通过代数中逆矩阵的求法和行列式按某行展开的公式证之；

(2) 直接由公式 $J=e_{IJK}F_{1I}F_{2J}F_{3K}$ 求导证之。

2.7 在直角笛卡尔坐标系中，证明 $\mathrm{d}\boldsymbol{A}=J^{-1}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{a}$，即 $\mathrm{d}A_L=J^{-1}F_{iL}\mathrm{d}a_i$。

2.8 设L氏坐标系和E氏坐标系取为同一直角笛卡尔坐标系，对运动：

$$(1)\begin{cases}x_1=(1+\alpha t)X_1\cos\omega t-X_2\sin\omega t\\x_2=(1+\alpha t)X_1\sin\omega t+X_2\cos\omega t\\x_3=X_3\end{cases}$$

$$(2)\begin{cases}x_1=X_1\\x_2=(1+\beta t)X_2\cos\omega t-X_3\sin\omega t\\x_3=(1+\beta t)X_2\sin\omega t+X_3\cos\omega t\end{cases}$$

$$(3)\begin{cases}x_1=X_1(1+\alpha t)\\x_2=X_2(1+\beta t)\cos\omega t-(1+\gamma)X_3\sin\omega t\\x_3=X_2(1+\beta t)\sin\omega t+(1+\gamma)X_3\cos\omega t\end{cases}$$

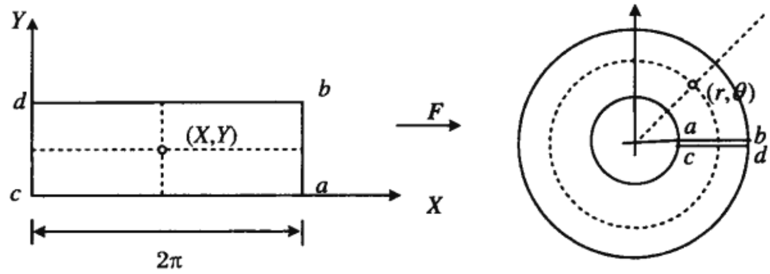
试求 $\boldsymbol{F}(t)$、$\boldsymbol{U}(t)$、$\boldsymbol{R}(t)$、$\boldsymbol{V}(t)$，并说明运动的物理意义；试求 $\boldsymbol{F}_t(\tau)$、$\boldsymbol{L}(t)$、$\boldsymbol{W}(t)$、$\boldsymbol{D}(t)$。

2.9 设在直角笛卡尔坐标系中分别有 $\boldsymbol{F}=\begin{bmatrix}-2&-10&0\\10&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{F}=\begin{bmatrix}2&10&0\\-10&-2&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{F}=\begin{bmatrix}2&10&0\\10&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{F}=\begin{bmatrix}2&10&0\\-10&-2&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{F}=\begin{bmatrix}5&1&0\\0&5&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，…，求 $\boldsymbol{C}$、$\boldsymbol{U}$、$\boldsymbol{R}$、$\boldsymbol{V}$。

2.10 取L氏坐标为 $(X^1,X^2,X^3)=(X,Y,Z)$，E氏坐标为 $(x^1,x^2,x^3)=(r,\theta,z)$，介质运动为

$$r=\sqrt{1+2Y},\quad \theta=2\pi-X,\quad z=Z$$

试求 $[F^k_{\cdot\alpha}]$、$[C_{\alpha\beta}]$，$[C^{\alpha}_{\cdot\beta}]$、$[U^{\alpha}_{\cdot\beta}]$、$[R^k_{\cdot\beta}]$、$[B^{km}]$、$[V^k_{\cdot m}]$。



题 2.10 图

2.11　设 L 氏坐标和 E 氏坐标分别取为$(X^1,X^2,X^3)=(R,\Theta,Z)$和$(x^1,x^2,x^3)=(r,\theta,z)$，介质运动为

$$r=\sqrt{AR^2+B},\quad \theta=C\Theta,\quad z=FZ\quad (A、B、C、F\text{ 为常数})$$

试求$[F^k_{\cdot\alpha}]$、$[C_{\alpha\beta}]$、$[C^{\alpha}_{\cdot\beta}]$、$[U^{\alpha}_{\cdot\beta}]$、$[R^k_{\cdot\beta}]$、$[B^{km}]$、$[V^k_{\cdot m}]$。

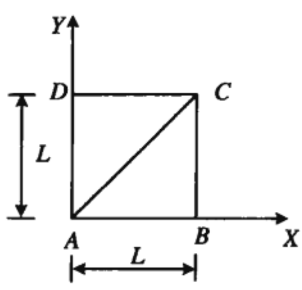
2.12　给出介质位移矢量 $\boldsymbol{u}$ 的 L 氏描述 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}(X^I)$，试由商法则导出 L 氏应变张量协变分量的表达式：

$$E_{IJ}=\frac{1}{2}\left[u_I\big|_J+u_J\big|_I+u^K\big|_I u_K\big|_J\right]$$

2.13　(1) 试由柱坐标中小应变协变分量的表达式 $E_{IJ}=\frac{1}{2}\left[u_I\big|_J+u_J\big|_I\right]$导出其物理分量$E_{\langle IJ\rangle}$和位移物理分量 $u_{\langle I\rangle}$之间的关系式；

(2) 导出柱坐标中有限 L 氏应变张量 $E_{IJ}=\frac{1}{2}\left[u_I\big|_J+u_J\big|_I+u^K\big|_I u_K\big|_J\right]$的物理分量$E_{\langle IJ\rangle}$和位移物理分量 $u_{\langle I\rangle}$之间的关系式。

2.14　给出介质质点速度的 E 氏描述 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}(x^i,t)$，试求出介质加速度 $\dot{\boldsymbol{v}}$ 的逆变分量表达式和协变分量表达式。



题 2.15 图

2.15　试对介质的简单剪切运动：

$$x=X+kY,\quad y=Y,\quad z=Z$$

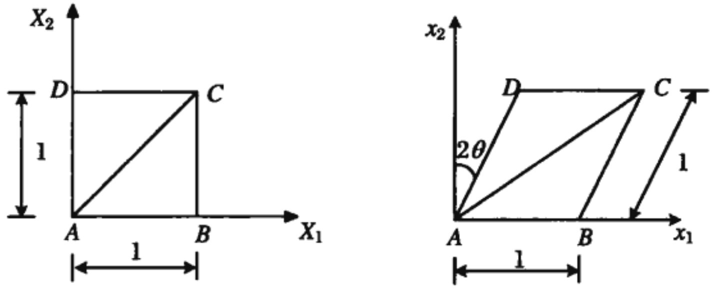
(1) 求出 $\boldsymbol{F}$、$\boldsymbol{C}$、$\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{B}^{-1}$、$\boldsymbol{e}$；

(2) 求出线元 AC 的 L 式伸长比 Υ；

(3) 求出 $\boldsymbol{C}$ 的特征值和一组幺正的主方向，求出$\boldsymbol{B}^{-1}$、$\boldsymbol{B}$ 的特征值和一组幺正的主方向；

(4) 求出 $\boldsymbol{U}$、$\boldsymbol{R}$、$\boldsymbol{V}$。

2.16 试对如图(题2.16图)运动,即$\begin{cases} x_1 = X_1 + X_2\sin 2\theta \\ x_2 = X_2\cos 2\theta \\ x_3 = X_3 \end{cases}$,求 $\boldsymbol{F}$、$\boldsymbol{C}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{U}$、$\boldsymbol{V}$、$\boldsymbol{R}$。

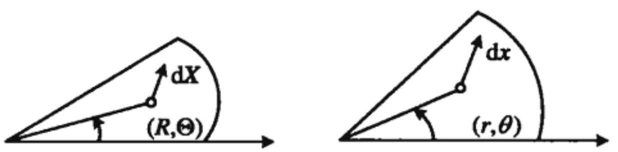


题 2.16 图

2.17 设L氏坐标和E氏坐标分别取为$(X^1, X^2, X^3) = (R, \Theta, Z)$和$(x^1, x^2, x^3) = (r, \theta, z)$,介质运动为

$$r = R, \quad \theta = k\Theta \quad (k\ 为常数), \quad z = Z$$

求$[F^i_{\cdot K}]$、$[F^{-1K}_{\cdot i}]$、$[E_{IJ}]$、$[e_{ij}]$、$[C_{IJ}]$、$[B^{-1}_{ij}]$。



题 2.17 图

2.18 设L氏坐标和E氏坐标分别取为$(X^1, X^2, X^3) = (R, \Theta, Z)$和$(x^1, x^2, x^3) = (r, \theta, z)$,试对介质的柱体扭转运动:

$$r = R, \quad \theta = \Theta + kZ \quad (k\ 为常数), \quad z = Z$$

求$[F^i_{\cdot K}]$、$[F^{-1K}_{\cdot i}]$、$[E_{IJ}]$、$[e_{ij}]$、$[C_{IJ}]$、$[B^{-1}_{ij}]$。

2.19 设L氏坐标和E氏坐标分别取为$(X^1, X^2, X^3) = (R, \Theta, Z)$和$(x^1, x^2, x^3) = (r, \theta, z)$,介质运动为

$$r = (1 + \alpha t)R, \quad \theta = \Theta + \omega t, \quad z = Z \quad (其中\ \alpha、\omega\ 为常数, t\ 为时间)$$

试求:

(1) $\boldsymbol{F}(t)$、$\boldsymbol{U}(t)$、$\boldsymbol{R}(t)$、$\boldsymbol{V}(t)$;

(2) $\boldsymbol{F}_t(\tau)$、$\boldsymbol{L}(t)$、$\boldsymbol{W}(t)$、$\boldsymbol{D}(t)$。

2.20　试证明书中的公式(2.4.24)式～(2.4.30)式。

2.21　试证明：一点处任意方向的线元 $\mathrm{d}\boldsymbol{X}$ 都不伸长的充要条件是其 L 氏应变张量 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{0}$(或 E 氏应变张量 $\boldsymbol{e}=\boldsymbol{0}$)。

2.22　试证明：

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{F}$$

2.23　试证明：

$$\boldsymbol{C}(\tau) = \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}(t) \cdot \boldsymbol{C}_t(\tau) \cdot \boldsymbol{F}(t), \quad \boldsymbol{B}(\tau) = \boldsymbol{F}_t(\tau) \cdot \boldsymbol{B}(t) \cdot \boldsymbol{F}_t^{\mathrm{T}}(\tau)$$

2.24　试导出相对变形梯度的时空变换式：$\bar{\boldsymbol{F}}_{\bar{t}}(\bar{\tau}) = \boldsymbol{Q}(\tau) \cdot \boldsymbol{F}_t(\tau) \cdot \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}(t)$。

2.25　试求出相对 Euler 应变张量的随体导数 $\dot{\boldsymbol{e}}_t(t) \equiv \left[\dfrac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{e}_t(\tau)}{\mathrm{d}\tau}\right]_{\tau=t}$。

2.26　试通过对公式 $\mathrm{d}s^2 - \mathrm{d}S^2 = 2\mathrm{d}\boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{X}$ 求随体导数，证明 $\dot{\boldsymbol{E}} = \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{F}$。

2.27　试证明 Rivlin-Ericksen 张量的递推公式(2.6.18)式。

2.28　试证明：

$$\boldsymbol{W} = \dot{\boldsymbol{R}} \cdot \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} + \frac{1}{2}\boldsymbol{R} \cdot (\dot{\boldsymbol{U}} \cdot \boldsymbol{U}^{-1} - \boldsymbol{U}^{-1} \cdot \dot{\boldsymbol{U}}) \cdot \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{D} = \frac{1}{2}\boldsymbol{R} \cdot (\dot{\boldsymbol{U}} \cdot \boldsymbol{U}^{-1} + \boldsymbol{U}^{-1} \cdot \dot{\boldsymbol{U}}) \cdot \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}$$

2.29　试由坐标面所围成的静止控制体这种特殊开口体系的质量守恒定律导出连续方程在相应坐标系中的具体数学形式(包括直角笛卡尔坐标系以及正交曲线坐标系)。

2.30　试证明：瞬时构形中的面积元素矢量 $\mathrm{d}\boldsymbol{a} = \mathrm{d}\underset{1}{\boldsymbol{x}} \times \mathrm{d}\underset{2}{\boldsymbol{x}}$ 是构架无关矢量，即 $\mathrm{d}\bar{a}_i = Q_{ij}\mathrm{d}a_j$，其中 Q_{ij} 为联系新、旧时空系的正交张量。

2.31　试证明瞬时构形中的体积元素 $\mathrm{d}v = \mathrm{d}\underset{1}{\boldsymbol{x}} \cdot (\mathrm{d}\underset{2}{\boldsymbol{x}} \times \mathrm{d}\underset{3}{\boldsymbol{x}})$ 是时空无关的标量，即 $\mathrm{d}\bar{v} = \mathrm{d}v$。

2.32　设微热量 $\mathrm{d}q$ 是构架无关的标量，瞬时构形中的面积元素 $\mathrm{d}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{n}\mathrm{d}a$ 是构架无关的矢量，瞬时构形中的热流矢量即 E 氏热流矢量 $\boldsymbol{h}$ 由 $\mathrm{d}q = \boldsymbol{h} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{h} \cdot \boldsymbol{n}\mathrm{d}a$ 所定义，试证明 $\boldsymbol{h}$ 是构架无关的矢量，即 $\bar{h}_i = Q_{ij}h_j$。

2.33　设 2 阶张量 $\boldsymbol{e}$ 是构架无关的 2 阶张量，试证明 $\boldsymbol{e}^2$、$\boldsymbol{e}^{-1}$ 也是构架无关的 2 阶张量。

第3章　应力原理

3.1　Cauchy 应力张量

3.1.1　Cauchy 应力张量的定义

关于应力张量的概念，我们已经在第 1 章张量分析中作为 2 阶张量的实例做过了介绍，而且是在任意曲线坐标中进行叙述的。但是为了进一步突出物理概念而避免过多的数学推演和数学符号掩饰其物理实质，我们特在本节中再在直角笛卡尔坐标中专门做一个简要叙述，读者可与曲线坐标中的讲解进行对照从而加深理解。

连续介质所受的力包括在体内按体积分布的体积力和分布在面上的接触面力。为描写体内一点所有取向的面元上的接触面力，在瞬时构形中某点 p 处将物体沿通过此点单位法矢量为 $\boldsymbol{n}$ 的平面 a 切开，以 $\Delta \boldsymbol{f}(\boldsymbol{n})$ 表示法向 $\boldsymbol{n}$ 所指向的介质通过微面积 Δa 而对另一部分介质所作用的瞬时接触面力，如图 3.1 所示，则

$$\boldsymbol{t}(\boldsymbol{n}) = \lim_{\Delta a \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{f}(\boldsymbol{n})}{\Delta a} \tag{3.1.1}$$

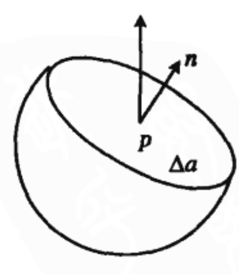


图 3.1　分割体面上的面力

称为该点的真应力矢量(true stress vector)或 Cauchy 应力矢量，它表示极限意义下通过该点处微面 $\Delta \boldsymbol{a} = \boldsymbol{n}\Delta a$ 上单位面积上的接触面力。之所以称为真应力矢量，是因为我们所取的微面 Δa

和其上的接触面力 $\Delta f(\boldsymbol{n})$ 都是在瞬时构形中进行测量的。显然，如果以应力矢量 $\boldsymbol{t}(\boldsymbol{n})$ 来描写一点处介质内部相互作用的接触面力情况即所谓应力状态的话，则我们需要无穷多个不同取向平面上的应力矢量，$\boldsymbol{t}(\boldsymbol{n})$ 中的 $\boldsymbol{n}$ 即着重说明了这一点。为了说明一点处不同取向平面上应力矢量之间的关系，从而给出一点处应力状态的更科学清晰的表达方法，我们将引入应力张量的概念。为此在瞬时构形中的某点 p 处取一个以 p 为顶点、以坐标轴为棱、底面单位外法矢为 $\boldsymbol{n}$ 的微四面体 $pp_1p_2p_3$，如图 3.2 所示。由于其 3 个侧面为坐标面，故其 3 个侧面的单位外法矢量各为 $\boldsymbol{n}_i = -\boldsymbol{e}_i$。设 3 个侧面和底面的面积各为 $\mathrm{d}a_i$ 和 $\mathrm{d}a$，则 3 个侧面和底面的面积矢量 $\mathrm{d}\boldsymbol{a}_i$ 和 $\mathrm{d}\boldsymbol{a}$ 将分别为

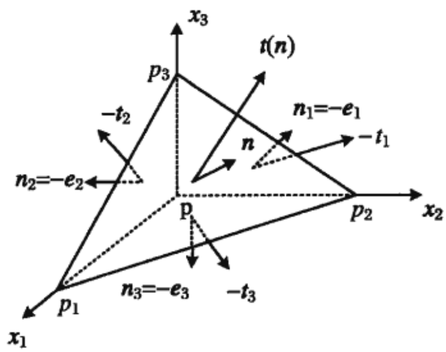


图 3.2　微体各面上的面力

$$\mathrm{d}\boldsymbol{a}_i = \mathrm{d}a_i\boldsymbol{n}_i = -\mathrm{d}a_i\boldsymbol{e}_i \quad (i = 1,2,3;\text{不求和}) \tag{3.1.2a}$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{n}\mathrm{d}a \tag{3.1.2b}$$

Gauss 定理可给出任一封闭曲面面积矢量为 0 的条件：

$$\oint_a \boldsymbol{n}\mathrm{d}a = \int_v 1\overleftarrow{\nabla}\mathrm{d}v = \boldsymbol{0} \tag{3.1.3}$$

将(3.1.3)式应用于我们的微四面体的外表面，有

$$\boldsymbol{n}\mathrm{d}a = \boldsymbol{e}_i\mathrm{d}a_i \quad (\text{求和}) \tag{3.1.4a}$$

或

$$\boldsymbol{n} = \frac{\mathrm{d}a_i}{\mathrm{d}a}\boldsymbol{e}_i \quad (\text{求和}), \quad n_i = \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{e}_i = \frac{\mathrm{d}a_i}{\mathrm{d}a} \quad (i = 1,2,3;\text{不求和}) \tag{3.1.4b}$$

式(3.1.3)对任何封闭曲面都是成立的，式(3.1.4)对任何坐标面所围成的微四面体表面都是成立的，它们是一个纯几何的结果，其几何意义是：任意封闭曲面的面积矢量和都为 **0** 矢量。

现在我们考虑介质的动量守恒条件。闭口体系的动量守恒可表达为：闭口体系 v 在任意时刻的动量变化率等于该时刻体系所受外力的矢量和。这可以表达为

$$\int_v \rho\dot{\boldsymbol{v}}\mathrm{d}v = \int_v \rho\boldsymbol{b}\mathrm{d}v + \oint_a \boldsymbol{t}(\boldsymbol{n})\mathrm{d}a \tag{3.1.5}$$

其中 ρ 为介质的瞬时质量密度，$\boldsymbol{b}$ 为比体积力，$\boldsymbol{t}(\boldsymbol{n})$为面元 $\boldsymbol{n}\mathrm{d}a$ 上的应力矢量。将(3.1.5)式应用于我们的微四面体，注意体积力和惯性力是 3 阶小量，面力是 2 阶小量，则有

$$\boldsymbol{t}(\boldsymbol{n})\mathrm{d}a + \boldsymbol{t}(-\boldsymbol{e}_i)\mathrm{d}a_i = \boldsymbol{0} \tag{3.1.6a}$$

根据牛顿第三定律和应力矢量的定义，我们有

$$\boldsymbol{t}_i \equiv \boldsymbol{t}(\boldsymbol{e}_i) = -\boldsymbol{t}(-\boldsymbol{e}_i) \tag{3.1.7}$$

其中 $\boldsymbol{t}_i \equiv \boldsymbol{t}(\boldsymbol{e}_i)$表示外法矢为 $\boldsymbol{e}_i$ 的正坐标面上的应力矢量。于是(3.1.6a)式可写为

$$\boldsymbol{t}(\boldsymbol{n})\mathrm{d}a = \mathrm{d}a_i\boldsymbol{t}_i \tag{3.1.6b}$$

或

$$\boldsymbol{t}(\boldsymbol{n}) = \boldsymbol{t}_i\frac{\mathrm{d}a_i}{\mathrm{d}a} = n_i\boldsymbol{t}_i$$

$$\boldsymbol{t}(\boldsymbol{n}) = n_i\boldsymbol{t}_i \tag{3.1.6c}$$

这里利用了几何关系(3.1.4b)式。需要指出的是：虽然推导时我们在(3.1.6a)式和(3.1.6b)式中略去了 3 阶小量而只保留了 2 阶小量，但式(3.1.6c)并不是近似结果，而是它们在极限条件下的精确结果。(3.1.6c)式表明：任意取向为 $\boldsymbol{n}$ 的面上的应力矢量 $\boldsymbol{t}(\boldsymbol{n})$都等于 3 个正坐标面上应力矢量 $\boldsymbol{t}_i$ 的线性组合，其组合系数恰为矢量 $\boldsymbol{n}$ 的分量 n_i，它成立所依据的力学定律就是动量定律。(3.1.6c)式说明：为了描述一点的应力状态，我们只需要知道该点处 3 个坐标面上的应力矢量 $\boldsymbol{t}_i$ 即可。

将第 i 个坐标面上的应力矢量 $\boldsymbol{t}_i$ 沿坐标 $\boldsymbol{e}_j$ 进行如下形式的分解：

$$\boldsymbol{t}_i = \boldsymbol{e}_j\sigma_{ji} = \boldsymbol{e}_jT_{ij} \tag{3.1.8}$$

显然我们所定义的 $\sigma_{ji} = T_{ij}$ 表示第 i 个坐标面上的应力矢量 $\boldsymbol{t}_i$ 在 $\boldsymbol{e}_j$ 方向的分量，即

$$\sigma_{ji} = T_{ij} = \boldsymbol{e}_j \cdot \boldsymbol{t}_i \tag{3.1.9}$$

则(3.1.6c)式成为

$$\boldsymbol{t}(\boldsymbol{n}) = \boldsymbol{e}_j\sigma_{ji}n_i$$

或

$$t_j(\boldsymbol{n}) = \sigma_{ji}n_i \tag{3.1.10a}$$

对任意给定的 $\boldsymbol{n}$，(3.1.10a)式是由矢量 n_i 到矢量 $t_j(\boldsymbol{n})$的一个线性映射，根据张量分析的商法则，即 2 阶张量的第二定义，(3.1.10a)式中由(3.1.9)式所定义的 2 阶系统 σ_{ji} 必组成一个 2 阶张量，称为 Cauchy 应力张量或真应力张量。于是(3.1.10a)式可按张量的直接记法写为映射关系：

$$t(n) = \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n} \tag{3.1.10b}$$

我们将(3.1.10)式称为 Cauchy 公式或 Cauchy 定理,它表明:只要知道一点的 Cauchy 应力张量 $\boldsymbol{\sigma}$,则单位法矢为 $\boldsymbol{n}$ 的任意微面上的应力矢量 $\boldsymbol{t}(\boldsymbol{n})$便可由 $\boldsymbol{n}$ 对$\boldsymbol{\sigma}$ 的右点积而得到。因此我们可以说:Cauchy 应力张量 $\boldsymbol{\sigma}$ 是一点应力状态最清晰、最科学的表达。由于 Cauchy 公式(3.1.10)式是将矢量方程(3.1.6c)式写为张量映射方式的表现形式,故(3.1.6c)式可以称之为 Cauchy 公式的初始形式。显然如果我们利用前面所定义的 T_{ij} 的话,则它也是一个 2 阶张量 $\boldsymbol{T}$,而且恰恰为 $\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}$,而(3.1.10b)式则应写为 $\boldsymbol{n}$ 对 $\boldsymbol{T}$ 的左点积:

$$\boldsymbol{t}(\boldsymbol{n}) = \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n} = \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{T} \tag{3.1.10c}$$

我们强调指出:Cauchy 公式(3.1.10)式成立的物理基础是动量守恒定律。尽管在第 4 章我们还会专门介绍动量矩守恒定律及其所给出的数学结果,但在本节我们也仍然做一简要介绍。

3.1.2 动量矩守恒定律及其结果

为了简洁和易于理解,也为了与第 1 章作为张量的实例在一般曲线坐标中介绍应力张量的叙述相对应,我们先考虑非极性介质的情况,即介质中不存在分布体力偶和分布接触面力偶的情况。

闭口体系的动量矩定理可表达为:闭口体系的动量对某点的动量矩在任意时刻的变化率等于该时刻闭口体系所受外力对同一点之矩,或者说在任意时刻其惯性力之矩和外力之矩相平衡。在非极性物质的情况下,将动量矩定理应用于图 3.3 所示的小长方物质体上并将其中心取为取矩的参考点。考虑到体积力和惯性力可认为近似作用于微体中心上,故其矩为 $\mathbf{0}$(或差一 4 阶小量);相对的两个面上应力之差引起的矩也是 4 阶小量,故相对的两个坐标面上的面力近似成为一个力偶,见图 3.3。于是,对非极性物质,动量矩定律表现为小微体 3 对坐标面上的面力之偶的和为 $\mathbf{0}$:

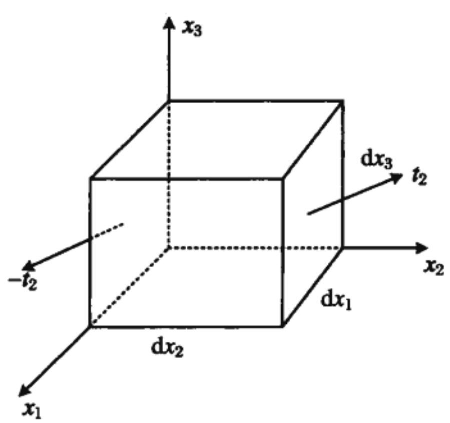


图 3.3 小微体的动量矩守恒

$$\mathrm{d}x_2 \boldsymbol{e}_2 \times \mathrm{d}x_3 \mathrm{d}x_1 \boldsymbol{t}_2 + \mathrm{d}x_3 \boldsymbol{e}_3 \times \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \boldsymbol{t}_3 + \mathrm{d}x_1 \boldsymbol{e}_1 \times \mathrm{d}x_2 \mathrm{d}x_3 \boldsymbol{t}_1 = \mathbf{0}$$

即

$$\boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{t}_i = \mathbf{0} \tag{3.1.11}$$

利用(3.1.8)式,(3.1.11)式成为

$$\sigma_{ji}\boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_j = \sigma_{ji}e_{ijk}\boldsymbol{e}_k = \mathbf{0} \tag{3.1.12a}$$

因为 $\boldsymbol{e}_k(k=1,2,3)$是线性无关的,故

$$\sigma_{ji}e_{ijk} = 0, \quad \boldsymbol{\sigma}\cdot\cdot\boldsymbol{e} = \mathbf{0} \tag{3.1.12b}$$

其中 $\boldsymbol{\sigma}\cdot\cdot\boldsymbol{e}$ 表示 Cauchy 应力张量 $\boldsymbol{\sigma}$ 和置换张量 $\boldsymbol{e}$ 的第二种二次点积。由此可得

$$\sigma_{ji} = \sigma_{ij}, \quad \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{\sigma} \tag{3.1.13}$$

即在非极性物质中,Cauchy 应力张量必是 2 阶对称张量。请记住:Cauchy 应力张量为对称张量这一数学结果所依据的物理定理是动量矩守恒定律。

下面我们对极性物质中的动量矩定律作一简要说明。如果以$\boldsymbol{c}$表示比体力偶矢量即单位质量介质所受的体力偶矢量,以 $\boldsymbol{l}(\boldsymbol{n})$表示单位法矢量为 $\boldsymbol{n}$ 的面上的接触面力偶密度矢量即单位面积上所受的接触面力偶矢量。参照将任意矢量 $\boldsymbol{n}$ 映射为应力矢量$\boldsymbol{t}(\boldsymbol{n})$的 Cauchy 公式 (3.1.10)式,我们可以定义一个将任意矢量 $\boldsymbol{n}$ 映射为接触面力偶密度矢量$\boldsymbol{l}(\boldsymbol{n})$的 2 阶张量 $\boldsymbol{\chi}$:

$$\boldsymbol{l}(\boldsymbol{n}) = \boldsymbol{\chi}\cdot\boldsymbol{n} \tag{3.1.14a}$$

2 阶张量 $\boldsymbol{\chi}$ 称为接触面力偶张量或简称偶应力张量。有的书上将(3.1.14)式称为第二 Cauchy 定理,但我们把它也一样地称为 Cauchy 公式。这里我们是由 2 阶张量的第二定义即商法则直接由(3.1.14)式从数学上定义了偶应力张量 $\boldsymbol{\chi}$。当然,我们也可以由一点处微四面体的动量矩守恒导出并定义偶应力张量 $\boldsymbol{\chi}$:事实上,类似于前面推导(3.1.6c)式和(3.1.10)式一样,通过微四面体对其中心的动量矩守恒,我们易得

$$\boldsymbol{l}(\boldsymbol{n}) = n_i\boldsymbol{l}_i \tag{3.1.14b}$$

其中 $\boldsymbol{l}_i = \boldsymbol{l}(\boldsymbol{e}_i)$表示第 i 个坐标面上的接触面力偶密度矢量(注意 $\boldsymbol{t}$ 和 $\boldsymbol{t}_i$ 对中心之矩比 $\boldsymbol{l}$ 和 $\boldsymbol{l}_i$ 之矩为高一阶的小量)。如将 $\boldsymbol{l}_i$ 沿坐标轴单位基矢量$\boldsymbol{e}_j$ 的分量定义为χ_{ji},即

$$\chi_{ji} = \boldsymbol{e}_j\cdot\boldsymbol{l}_i, \quad \boldsymbol{l}_i = \boldsymbol{e}_j\chi_{ji} \tag{3.1.15}$$

将之代入(3.1.14b)式即可得

$$\boldsymbol{l}(\boldsymbol{n}) = \boldsymbol{e}_j\chi_{ji}n_i, \quad l_j(\boldsymbol{n}) = \chi_{ji}n_i \tag{3.1.16}$$

对(3.1.16)式应用商法则,即可得出 χ_{ji}为 2 阶张量的结论。将之写为张量点积的形式,即是映射关系 Cauchy 第二定理(3.1.14a)式。所以(3.1.14a)式的物理意义是微四面体的动量矩守恒。

如果考虑到 $\boldsymbol{c}$ 和$\boldsymbol{l}_i$ 的存在,并注意到相对两面上的 $\boldsymbol{l}_i$ 之不同,将动量矩守恒

定律应用于图 3.3 所示的微长方体，则有

$$\rho \boldsymbol{c} + \frac{\partial \boldsymbol{l}_i}{\partial x_i} + \boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{t}_i = \boldsymbol{0} \tag{3.1.17}$$

由于

$$\frac{\partial \boldsymbol{l}_i}{\partial x_i} = \boldsymbol{\chi} \cdot \overleftarrow{\nabla}, \quad \boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{t}_i = \boldsymbol{\sigma} \cdot\cdot\, \boldsymbol{e} \tag{3.1.18}$$

其中 $\boldsymbol{\chi} \cdot \overleftarrow{\nabla}$ 为偶应力张量 $\boldsymbol{\chi}$ 在E氏坐标中的散度，e 为置换张量，$\boldsymbol{\sigma} \cdot\cdot\, \boldsymbol{e} = \sigma_{ji} e_{ijk} \boldsymbol{e}_k$ 表示 $\boldsymbol{\sigma}$ 和 $\boldsymbol{e}$ 的第二种二次点积，所以(3.1.17) 式可写为

$$\rho \boldsymbol{c} + \boldsymbol{\chi} \cdot \overleftarrow{\nabla} + \boldsymbol{\sigma} \cdot\cdot\, \boldsymbol{e} = \boldsymbol{0} \tag{3.1.19}$$

式(3.1.19)中的 3 项分别表示单位瞬时体积介质所受的体力偶矩、单位瞬时体积介质所受的面力偶矩和单位瞬时体积介质所受的接触面力之矩。

对非极性物质，$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}, \boldsymbol{\chi} = \boldsymbol{0}$，(3.1.19)式即成为

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot\cdot\, \boldsymbol{e} = \boldsymbol{0}$$

此即式(3.1.12b)，由此即可给出 $\boldsymbol{\sigma}$ 为 2 阶对称张量的结果(3.1.13)式。

本节所利用的应力矢量 $\boldsymbol{t} = \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{f}}{\mathrm{d}a}$ 是指瞬时构形每单位面积上所受的接触面力，因之是真应力矢量，相应地 σ_{ji} 则表示瞬时构形第 i 个坐标面上所受应力在 j 方向上的投影，故 Cauchy 应力张量也称为真应力张量。

3.2 Piola-Kirchhoff 应力张量

如上节所述，Cauchy 应力张量是在现时构形中量度的真应力张量。以后我们会看到当将有关量作为 E 氏坐标 $\boldsymbol{x}$ 的函数并在现时构形中列出运动方程时采用 Cauchy 应力张量是方便的；而且在本构理论中将会看到，当变形采用 Euler 型描述和度量时，用 Cauchy 应力张量才是方便且合理的。但当变形采用 Lagrange 型的物质描述时，应力张量也采用在参考构形中的度量，本构方程才是方便和合理的，且在 L 氏坐标中的运动方程也具有相应的简明形式。为此我们引入如下的在参考构形中的 Piola-Kirchhoff 应力张量，简称 P-K 应力张量。引入 P-K 应力张量的另一意义是便于在初始构形的边界上写出边界条件。

设初始构形 B 中某粒子 $\boldsymbol{X}$ 处单位法矢量为 $\boldsymbol{N}$、面积为 $\mathrm{d}A$ 的一个微面元矢量

$dA = NdA$,运动后变为现时构形中点 x 处单位法矢量为 n、面积为 da 的微面元矢量 $da = nda$,如图 3.4 所示。如以 $t(n)$表示现时刻的真应力矢量,则面元 $da = nda$ 上在现时刻的真实作用面力为 $df = tda$。设想此时刻在初始面元 dA 上作用着同样的力 df,但引入单位初始面积上的应力矢量 $t^* = \frac{df}{dA}$,称之为第一类 P-K 应力矢量,则

$$t^* dA = t da = df, \quad t^* = \frac{df}{dA} \tag{3.2.1}$$

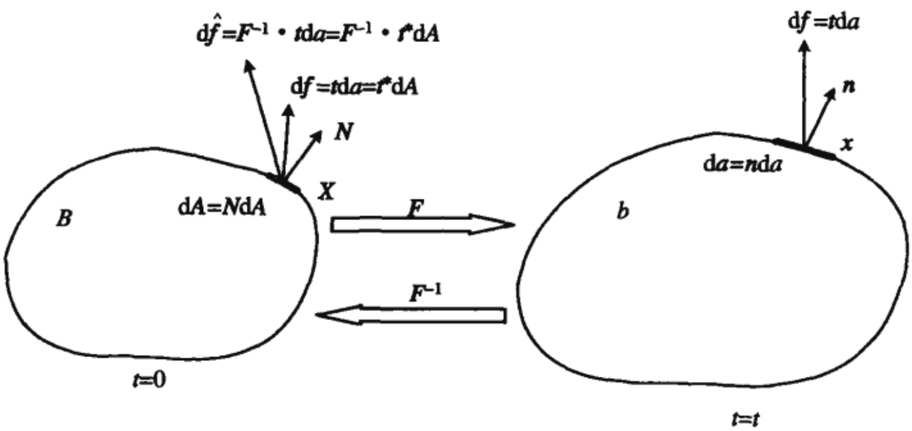


图 3.4 真应力矢量和假应力矢量

如同在现时构形中由矢量 n 到矢量 t 的线性映射(上节中的 Cauchy 公式(3.1.10)式)中引入 Cauchy 应力张量 σ 一样,我们可以在初始构形中引入一个由矢量 N 到矢量 t^* 的线性映射,即引入一新的应力张量 S,于是可类似于如下的(3.2.2)式而写出(3.2.3)式:

$$t(n) = \sigma \cdot n \tag{3.2.2}$$

$$t^*(N) = S \cdot N \tag{3.2.3}$$

我们把给出应力矢量和应力张量间映射关系的公式(3.2.2)式和(3.2.3)式统称为 Cauchy 公式,将之代入(3.2.1)式,可得

$$S \cdot NdA = \sigma \cdot nda$$

即

$$S \cdot dA = \sigma \cdot da \tag{3.2.4}$$

将 2.2 节中关于面元变形的公式(2.2.20)式即

$$\mathrm{d}\boldsymbol{A} = \frac{1}{J}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a} \tag{3.2.5}$$

代入(3.2.4)式，有

$$\frac{1}{J}\boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a}$$

此式对任意的面元矢量 $\mathrm{d}\boldsymbol{a}$ 都成立，故可得

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{J}\boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}} \tag{3.2.6}$$

$$\boldsymbol{S} = J\boldsymbol{\sigma} \cdot (\boldsymbol{F}^{-1})^{\mathrm{T}} \tag{3.2.7}$$

(3.2.6)式和(3.2.7)式给出了由映射关系(3.2.3)式所定义的应力张量 $\boldsymbol{S}$ 和 Cauchy 应力张量 $\boldsymbol{\sigma}$ 的关系，我们将这样引入的应力张量 $\boldsymbol{S}$ 称为第一类 P-K 应力张量，有时也称为工程应力张量或 Lagrange 应力张量。由于 $\boldsymbol{t}^{*}(\boldsymbol{N}) = \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{n})}{\mathrm{d}A}$ 代表了瞬时构形中真实面力分配在单位初始面积上的面力，是 E 氏坐标中的矢量，而 $\boldsymbol{n}$ 和 $\boldsymbol{N}$ 分别是 E 氏坐标和 L 氏坐标中的矢量，故将商法则应用于(3.2.3)式，显然可见 $\boldsymbol{S}$ 是一个 2 阶两点张量。下面我们来写出它的分量并说明其物理意义。

将 Cauchy 公式(3.2.3)式写为张量直接记法，取 $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{d}_K$ 为 L 氏坐标系的单位基矢量 $\boldsymbol{d}_K$，并从左边点乘以 E 氏坐标系的单位基矢量 $\boldsymbol{e}_i$，得

$$\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{t}_K^{*} = \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{d}_K = S_{ik} \tag{3.2.8}$$

其中

$$\boldsymbol{t}_K^{*} = \boldsymbol{t}^{*}(\boldsymbol{d}_K) \tag{3.2.9}$$

表示第 K 个 L 氏坐标面即初始构形中法线为 $\boldsymbol{d}_K$ 的坐标面上的 P-K 应力矢量。(3.2.8)式说明：两点张量 $\boldsymbol{S}$ 的分量 S_{iK} 在物理上表示初始构形中第 K 个坐标面上的 P-K 应力矢量(即每单位初始面积上的面力) $\boldsymbol{t}_K^{*} = \boldsymbol{t}^{*}(\boldsymbol{d}_K)$ 在现时构形第 i 个 E 氏坐标方向上的分量。

由(3.2.6)式 、(3.2.7)式及 $\boldsymbol{\sigma}$ 的对称性，易得

$$\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}} \tag{3.2.10}$$

故与 $\boldsymbol{\sigma}$ 是对称张量不同，$\boldsymbol{S}$ 并不是对称张量。由于(3.2.10)式是由 $\boldsymbol{\sigma}$ 的对称性而得出的，而 $\boldsymbol{\sigma}$ 对称所依据的物理基础是非极性物质的动量矩定律，故(3.2.10)式就是用 $\boldsymbol{S}$ 所表达的动量矩定律的数学形式。

为了克服 $\boldsymbol{S}$ 不对称的缺点，我们以如下方法引入所谓的第二类 P-K 应力张量。如果我们按照由 $\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ 追溯到 $\mathrm{d}\boldsymbol{X}$ 的方式将 $\mathrm{d}\boldsymbol{a}$ 上的力 $\mathrm{d}\boldsymbol{f} = \boldsymbol{t}\mathrm{d}a$ 追溯到 $\mathrm{d}\boldsymbol{A}$ 上去，即想象在 $\mathrm{d}\boldsymbol{A}$ 上受有假想的力 $\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{f}}$:

$$\mathrm{d}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{F}^{-1} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x}, \quad \mathrm{d}\hat{\boldsymbol{f}} = \boldsymbol{F}^{-1} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{f}$$

则有

$$\begin{cases} \mathrm{d}\hat{\boldsymbol{f}} = \boldsymbol{F}^{-1} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{f} = \boldsymbol{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{t}\mathrm{d}a = \boldsymbol{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{t}^{*}\mathrm{d}A = \boldsymbol{q}\mathrm{d}A \\ \boldsymbol{q} \equiv \boldsymbol{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{t}^{*} \end{cases} \tag{3.2.11}$$

其中

$$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{t}^{*} = \frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{f}}}{\mathrm{d}A} \tag{3.2.12}$$

表示单位初始面积上的假想面力$\dfrac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{f}}}{\mathrm{d}A}$,我们将之称为第二类 P-K 应力矢量。由此我们可以由矢量 $\boldsymbol{N}$ 到矢量 $\boldsymbol{q}$ 的线性映射定义一个新的 2 阶张量 $\boldsymbol{\Sigma}$,由

$$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{\Sigma} \cdot \boldsymbol{N} \tag{3.2.13}$$

给出,称 $\boldsymbol{\Sigma}$ 为第二类 P-K 应力张量,而映射关系(3.2.13)式也称为 Cauchy 公式。将 $\boldsymbol{t}^{*} = \boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{N}$ 代入 $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{t}^{*}$,再代入(3.2.13)式,并利用 $\boldsymbol{N}$ 的任意性,即有

$$\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{S} = J\boldsymbol{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot (\boldsymbol{F}^{-1})^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{S} = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{\Sigma} \tag{3.2.14}$$

式(3.2.14)给出了 $\boldsymbol{\Sigma}$ 与 $\boldsymbol{S}$ 和 $\boldsymbol{\sigma}$ 的关系。由式(3.2.14)显然可见 $\boldsymbol{\Sigma}$ 是一个 2 阶对称张量:

$$\boldsymbol{\Sigma}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{\Sigma} \tag{3.2.15}$$

这就是用 $\boldsymbol{\Sigma}$ 所表达的动量矩定律的数学形式。

由于 $\boldsymbol{t}^{*} = \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{f}}{\mathrm{d}A}$是 E 氏坐标中的矢量,故 $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{t}^{*}$ 是 L 氏坐标中的矢量,$\boldsymbol{N}$ 也是 L 氏坐标中的矢量,于是将商法则应用于 Cauchy 公式(3.2.13)式,可知 $\boldsymbol{\Sigma}$ 是 L 氏坐标中的 2 阶张量。在 Cauchy 公式(3.2.13)式中取 $\boldsymbol{N}$ 为$\boldsymbol{d}_K$,并记 $\boldsymbol{q}_K = \boldsymbol{q}(\boldsymbol{d}_K)$,然后以 $\boldsymbol{d}_I$ 进行左点积,可得

$$\boldsymbol{d}_I \cdot \boldsymbol{q}_K = \boldsymbol{d}_I \cdot \boldsymbol{\Sigma} \cdot \boldsymbol{d}_K = \Sigma_{IK} \tag{3.2.16}$$

(3.2.16)式说明:Σ_{IK}表示第K 个 L 氏坐标面上的第二类 P-K 应力矢量$\boldsymbol{q}_K$ 在第 I 个 L 氏单位基矢量$\boldsymbol{d}_I$ 上的分量。

很多文献中常常把第一类 P-K 应力张量 $\boldsymbol{S}$ 和第二类 P-K 应力张量 $\boldsymbol{\Sigma}$ 都称为假应力张量(pseudo-stress tensor),因为它们反映的都是在单位初始面积上而非单位瞬时面积上的面力。但是我们强调指出:它们所反映的都是介质在现时刻所受的真实接触面力的状态,而非介质在初始时刻所受的接触面力的状态,因为它们都是以介质的现时刻变形梯度张量 $\boldsymbol{F}$ 为桥梁而和介质在现时刻的真实接触面力 $\mathrm{d}\boldsymbol{f}$ 相联系的。

3.3 应力张量的时空变换式与本构导数

3.3.1 应力张量的时空变换式

设有两个时空系 $\varphi(\boldsymbol{x},t)$和$\bar{\varphi}(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{t})$,同一粒子在 φ 和$\bar{\varphi}$ 中的位置矢量$\boldsymbol{x}$ 和$\bar{\boldsymbol{x}}$ 由时空变换式:

$$\bar{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{x}+\bar{\boldsymbol{x}}_0 \tag{3.3.1}$$

相联系,其中 $\boldsymbol{Q}$ 为正交张量。当考虑两个无限接近的粒子时,我们即得到连接它们的线元的时空变换式:

$$\mathrm{d}\bar{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{Q}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{x} \tag{3.3.2a}$$

在 2.10 节中我们曾把此公式表述为“线元是一个时空无关的矢量”,而且我们把满足与(3.3.2a)式类似关系的矢量 $\boldsymbol{b}$:

$$\bar{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{b} \tag{3.3.2b}$$

称为时空无关的矢量。于是,对任意两个时空无关的矢量 $\boldsymbol{b}$ 和$\boldsymbol{c}$,我们都有

$$\bar{\boldsymbol{b}}\cdot\bar{\boldsymbol{c}} = (\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{c} = \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c} \tag{3.3.3}$$

(3.3.3)式说明:任意两个时空无关矢量的点积都是时空无关的标量。特别说来,任意时空无关矢量的长度都是时空无关的标量。如 $\boldsymbol{b}$ 和$\boldsymbol{c}$ 是时空无关的矢量,记 $\boldsymbol{d}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$,则在 $\bar{\varphi}$ 中将有$\bar{\boldsymbol{d}}=\bar{\boldsymbol{b}}\times\bar{\boldsymbol{c}}$,于是

$$d_j = e_{jkl}b_kc_l = e_{jkl}(Q_{mk}\bar{b}_m)(Q_{nl}\bar{c}_n) = e_{jkl}Q_{mk}Q_{nl}\bar{b}_m\bar{c}_n$$

上式两端同乘以 Q_{ij},即得

$$Q_{ij}d_j = e_{jkl}Q_{ij}Q_{mk}Q_{nl}\bar{b}_m\bar{c}_n = \| Q \| e_{imn}\bar{b}_m\bar{c}_n = e_{imn}\bar{b}_m\bar{c}_n = \bar{d}_i$$

即

$$\bar{\boldsymbol{d}} = \boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{d} \tag{3.3.4a}$$

这说明对正则的时空变换,任意两个时空无关矢量的叉积也是时空无关的矢量。特别说来,作为两个微线元叉积的微面元矢量 $\mathrm{d}\boldsymbol{a}$ 是时空无关的矢量:

$$\mathrm{d}\bar{\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{Q}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{a} \tag{3.3.4b}$$

于是,根据前面的结论,微面元面积的大小 $\mathrm{d}a$ 必是时空无关的标量:

$$\mathrm{d}\bar{a} = \mathrm{d}a \tag{3.3.5}$$

由(3.3.4b)式和(3.3.5)式可知：面元的单位法矢量 $\boldsymbol{n}$ 也必是时空无关的矢量：

$$\bar{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{n} \tag{3.3.6}$$

由变形梯度张量 $\boldsymbol{F}$ 的时空变换式：

$$\bar{\boldsymbol{F}} = \boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{F} \tag{3.3.7}$$

取行列式，可有

$$\bar{J} \equiv \| \bar{\boldsymbol{F}} \| = \| \boldsymbol{Q} \| \, \| \boldsymbol{F} \| = \| \boldsymbol{F} \| = J \tag{3.3.8}$$

即介质的膨胀比 $J = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}V}$是标架无关的标量(其实这是显然的)。根据力是标架无关矢量这一基本假设以及面积是标架无关标量的结论，显然可见真应力矢量 $\boldsymbol{t}$ 是标架无关的矢量：

$$\bar{\boldsymbol{t}} = \frac{\mathrm{d}\bar{\boldsymbol{f}}}{\mathrm{d}\bar{a}} = \frac{\boldsymbol{Q} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{f}}{\mathrm{d}a} = \boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{t} \tag{3.3.9}$$

设 $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ 和 $\boldsymbol{\sigma}$ 分别是新、旧时空系中的 Cauchy 应力张量，则 Cauchy 公式给出：

$$\bar{\boldsymbol{t}} = \bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \bar{\boldsymbol{n}}, \quad \boldsymbol{t} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n} \tag{3.3.10}$$

将(3.3.10)式代入(3.3.9)式，并利用(3.3.6)式，有

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{n} = \boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n} \tag{3.3.11}$$

由 $\boldsymbol{n}$ 的任意性，即可得

$$\boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \boldsymbol{Q} \quad \text{或} \quad \bar{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}} \tag{3.3.12}$$

式(3.3.12)说明：Cauchy 应力张量是一个标架无关的 2 阶张量。利用 P-K 应力张量与 Cauchy 应力张量的关系以及(3.3.7)式、(3.3.8)式和(3.3.12)式，可得

$$\bar{\boldsymbol{S}} = \bar{J}\bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot (\bar{\boldsymbol{F}}^{-1})^{\mathrm{T}} = J\boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}} \cdot [(\boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{F})^{-1}]^{\mathrm{T}} = J\boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot (\boldsymbol{F}^{-1})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{S} \tag{3.3.13}$$

$$\bar{\boldsymbol{\Sigma}} = \bar{\boldsymbol{F}}^{-1} \cdot \bar{\boldsymbol{S}} = (\boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{F})^{-1} \cdot (\boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{S}) = \boldsymbol{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{S} = \boldsymbol{\Sigma} \tag{3.3.14}$$

(3.3.13)式和(3.3.14)式分别给出了第一类和第二类 P-K 应力张量 $\boldsymbol{S}$ 和 $\boldsymbol{\Sigma}$ 的时空系变换式。

3.3.2 应力张量的随体导数和本构导数

尽管 Cauchy 应力张量 $\boldsymbol{\sigma}$ 是标架无关的张量，但其通常意义下的随体导数即应力率 $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ 并不是标架无关的张量。事实上，对 $\boldsymbol{\sigma}$ 的时空变换式 $\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}$，求对时间的导数，有

$$\dot{\bar{\boldsymbol{\sigma}}} = \boldsymbol{Q} \cdot \dot{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}} + \dot{\boldsymbol{Q}} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot (\dot{\boldsymbol{Q}})^{\mathrm{T}} \tag{3.3.15}$$

式(3.3.15)就是 $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ 的时空变换式，它表明 $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ 并不是时空无关的 2 阶张量，因为它比时空无关 2 阶张量的变换式多出后面两项。第 2 章中曾给出过转动率张量 $\boldsymbol{W}$ 的时空变换式：

$$\bar{\boldsymbol{W}} = \boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{W} \cdot \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}} + \dot{\boldsymbol{Q}} \cdot \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}} \tag{3.3.16}$$

故

$$\dot{\boldsymbol{Q}} = \bar{\boldsymbol{W}} \cdot \boldsymbol{Q} - \boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{W}, \quad (\dot{\boldsymbol{Q}})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{W} \cdot \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \bar{\boldsymbol{W}} \tag{3.3.17}$$

这里利用了 $\boldsymbol{W}$ 的反对称性。将(3.3.17)式代入(3.3.15)式并利用 $\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}$，经过适当运算可得

$$\dot{\bar{\boldsymbol{\sigma}}} = \boldsymbol{Q} \cdot [\dot{\boldsymbol{\sigma}} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{W} - \boldsymbol{W} \cdot \boldsymbol{\sigma}] \cdot \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}} - \bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \bar{\boldsymbol{W}} + \bar{\boldsymbol{W}} \cdot \bar{\boldsymbol{\sigma}}$$

即

$$\dot{\bar{\boldsymbol{\sigma}}} + \bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \bar{\boldsymbol{W}} - \bar{\boldsymbol{W}} \cdot \bar{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{Q} \cdot (\dot{\boldsymbol{\sigma}} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{W} - \boldsymbol{W} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \cdot \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}} \tag{3.3.18}$$

与(3.3.15)式一样，(3.3.18)式也是应力率 $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ 的时空变换式，显然它也不是标架无关 2 阶张量的时空变换关系，故 Cauchy 应力张量 $\boldsymbol{\sigma}$ 在通常意义下的随体导数 $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ 并不是标架无关的 2 阶张量。但是，如果我们定义量 $\mathring{\boldsymbol{\sigma}}$ 为

$$\mathring{\boldsymbol{\sigma}} \equiv \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{W} - \boldsymbol{W} \cdot \boldsymbol{\sigma} \tag{3.3.19}$$

则(3.3.18)式成为

$$\mathring{\bar{\boldsymbol{\sigma}}} = \boldsymbol{Q} \cdot \mathring{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}} \tag{3.3.20}$$

这说明(3.3.19)式所定义的量 $\mathring{\boldsymbol{\sigma}}$ 是标架无关的 2 阶张量，称之为 Cauchy 应力张量的**本构导数**(有的文献上将之称为 Jaumann 导数)。下面我们来说明 $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ 和 $\mathring{\boldsymbol{\sigma}}$ 各自的**物理意义**。

按照定义：

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\boldsymbol{\sigma}(t + \Delta t) - \boldsymbol{\sigma}(t)}{\Delta t}, \quad \dot{\sigma}_{ij} \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\sigma_{ij}(t + \Delta t) - \sigma_{ij}(t)}{\Delta t} \tag{3.3.21}$$

参照图 3.5，设 t 时刻坐标系 $x_1x_2x_3$ 中微物质体成为 $t + \Delta t$ 时刻坐标系 $x'_1x'_2x'_3$ 中的同一微物质体，t 时刻坐标系 $x_1x_2x_3$ 中坐标轴上的线元和坐标面上的面元也将分别成为 $t + \Delta t$ 时刻坐标系 $x'_1x'_2x'_3$ 中坐标轴上的同一物质线元和坐标面上的同一物质面元。按照定义，$\sigma_{ij}(t + \Delta t)$ 和 $\sigma_{ij}(t)$ 分别是 $t + \Delta t$ 和 t 时刻同一个空间 j 坐标面上的应力矢量在 i 方向的分量，而由于微体本身存在旋转，$t + \Delta t$ 时刻和 t 时刻同一个空间 j 坐标面上的物质面元显然将对应不同的物质面

元，故 $\dot{\sigma}_{ij}$ 代表的并不是同一个物质面上的应力矢量在 i 方向的分量(例如 $\dot{\sigma}_{11}$ 代表了我们仍处于 x_1 轴上时所感受到的正应力的变化率，而由于物质的旋转它代表的并不是同一个物质线元正应力的变化率)，而只有当微体没有旋转时它代表的才是同一面元上应力矢量在 i 方向的分量。因此，从本质上讲 $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ 表示的只是我们仅仅跟随粒子移动而不随其旋转所感受到的应力变化率，它只有随心性而没有随旋性，所以它并不具有彻底的随体性，严格而言将 $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ 称为应力张量的随心导数比称为随体导数更为恰当。

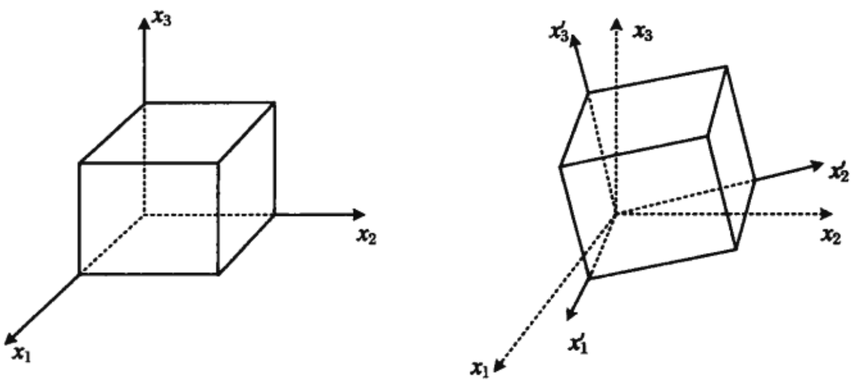


图 3.5 应力张量的随体导数和本构导数

为了引入微体瞬时刚性旋转的影响，我们定义如下的随旋应力率 $\mathring{\boldsymbol{\sigma}}$：

$$\mathring{\boldsymbol{\sigma}} \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\boldsymbol{\sigma}'(t+\Delta t) - \boldsymbol{\sigma}(t)}{\Delta t}, \quad \mathring{\sigma}_{ij} \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\sigma'_{ij}(t+\Delta t) - \sigma_{ij}(t)}{\Delta t} \tag{3.3.22}$$

其中 $\sigma'_{ij}(t+\Delta t)$ 表示 $t+\Delta t$ 时刻 j' 坐标面上的应力矢量在 i' 方向上的分量，$\sigma_{ij}(t)$ 表示 t 时刻 j 坐标面上的应力矢量在 i 方向上的分量。虽然投影方向不同，但它们所关联的应力矢量是同一个物质面元上的应力矢量，所以(3.3.22)式是引入了介质瞬时刚性旋转影响的随旋应力率。现在我们来证明(3.3.22)式所定义的随旋应力率恰恰等于(3.3.19)式所定义的应力张量的本构导数。

我们曾经说过，旋转率张量 $\boldsymbol{W}$ 表示了微体的瞬时旋转速率，在数学上可表示为伸缩率张量 $\boldsymbol{D}$ 的单位主方向 $\boldsymbol{n}$ 上的旋转速率：

$$\dot{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{W} \cdot \boldsymbol{n} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{n} \quad (\boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{n} = \lambda \boldsymbol{n},\ \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{n} = 1) \tag{3.3.23}$$

其中 $\boldsymbol{\omega}$ 为与反对称张量 $\boldsymbol{W}$ 对偶的矢量。如果不考虑微体的变形，则(3.3.23)式中的 $\boldsymbol{n}$ 可视为任何一个单位矢量，这便是单位矢量以角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 旋转时其时间导数的

公式。以 $\boldsymbol{n}'$表示 $t+\Delta t$ 时刻 $\boldsymbol{n}$ 以角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 旋转时所变成的矢量，则有

$$\boldsymbol{n}' = \boldsymbol{n} + \dot{\boldsymbol{n}}\Delta t = \boldsymbol{n} + \boldsymbol{W}\cdot\boldsymbol{n}\Delta t = (\boldsymbol{I}+\boldsymbol{W}\Delta t)\cdot\boldsymbol{n} = \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{n} \tag{3.3.24}$$

其中

$$\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{I} + \boldsymbol{W}\Delta t, \quad \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{I} - \boldsymbol{W}\Delta t \tag{3.3.25}$$

易证如果忽略 2 阶小量则张量 $\boldsymbol{\beta}$ 为正交张量，于是(3.3.24)式便是由 $\boldsymbol{n}$ 到 $\boldsymbol{n}'$ 的正交映射。记 $\boldsymbol{\beta}=\beta_{kj}\boldsymbol{e}_k\boldsymbol{e}_j$，并在(3.3.24)式中取 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{e}_i$，$\boldsymbol{n}'=\boldsymbol{e}'_i$，则(3.3.24)式便成为

$$\boldsymbol{e}'_i = \beta_{ij}\boldsymbol{e}_j \tag{3.3.26}$$

这说明：当我们将图 3.5 中的微体以旋转率张量 $\boldsymbol{W}$ 旋转时，图中 $x_1x_2x_3$ 的幺正基矢量将成为 $x'_1x'_2x'_3$ 中的幺正基矢量，而(3.3.26)式便是这两个坐标系的基变换公式。于是我们可有应力张量在这两个坐标系中表象的变换公式如下：

$$\sigma'_{ij} = \beta_{il}\beta_{jm}\sigma_{lm}, \quad \boldsymbol{\sigma}' = \boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}} \tag{3.3.27}$$

将(3.3.22)式中的 $\boldsymbol{\sigma}'(t+\Delta t)-\boldsymbol{\sigma}(t)$分解为如下两项：

$$\boldsymbol{\sigma}'(t+\Delta t)-\boldsymbol{\sigma}(t) = [\boldsymbol{\sigma}(t+\Delta t)-\boldsymbol{\sigma}(t)] + [\boldsymbol{\sigma}'(t+\Delta t)-\boldsymbol{\sigma}(t+\Delta t)] \tag{3.3.28}$$

并将(3.3.28)式代入(3.3.22)式，可得

$$\mathring{\boldsymbol{\sigma}} = \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{\sigma}'(t+\Delta t)-\boldsymbol{\sigma}(t+\Delta t)}{\Delta t} \tag{3.3.29}$$

参照图 3.5，可知式(3.3.28)的意义是：我们将应力从 t 到 $t+\Delta t$ 期间的改变分两步完成，第一步是不考虑微体的旋转而只考虑微体中心移动所得到的应力改变，由第一项来表达；第二步是随同微体一起做瞬时旋转所得到的应力改变，由第二项表达。将式(3.3.27)代入式(3.3.28)，再代入式(3.3.29)，并利用正交张量 $\boldsymbol{\beta}$ 的定义(3.3.25)式，即可得

$$\mathring{\boldsymbol{\sigma}} \equiv \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{W} - \boldsymbol{W}\cdot\boldsymbol{\sigma} \tag{3.3.30}$$

而这恰恰就是式(3.3.19)。这说明：(3.3.19)式所给出的应力张量的本构导数其意义就是我们按(3.3.22)式所定义的应力张量的随旋应力率。由以上的推导过程可以看出：应力张量的本构导数$\mathring{\boldsymbol{\sigma}}$表示了当我们既跟随微体的中心移动也随微体一起以旋转率 $\boldsymbol{W}$ 做瞬时刚性旋转时所感受到的应力的变化率，它才是应力张量"真正意义上的彻底的随体导数"，所以把它称为随旋应力率是恰当的，而式(3.3.30)中的后两项 $\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{W}-\boldsymbol{W}\cdot\boldsymbol{\sigma}$ 称为旋转修正项。

引入应力张量本构导数的意义是：当我们采用增量应力和自然增量应变间的增量型本构关系时(或者应力率和伸缩率张量间的率型本构关系时)，我们应该利

用应力张量的本构导数$\overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}}$而不是其通常意义下的随体导数 $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$,因为我们既应该跟随微体移动也应该跟随微体旋转才能测得与介质变形相关联的应力改变。例如,如果以 $\boldsymbol{M}$ 表示弹性模量张量,则应力率和伸缩率成线性关系的率型本构关系应该写成

$$\overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{M} : \boldsymbol{D} \tag{3.3.31a}$$

即

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{M} : \boldsymbol{D} + \boldsymbol{W} \cdot \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{W} \tag{3.3.31b}$$

在各类冲击动力学数值软件中,大多都是采用式(3.3.31b)进行应力增量 $\Delta\boldsymbol{\sigma} = \dot{\boldsymbol{\sigma}}\Delta t$ 计算的。由本构关系(3.3.31)式所表达的材料称为亚弹性材料(hypo-elastic materials),其中 4 阶弹性模量张量 $\boldsymbol{M}$ 可以依赖于应力 $\boldsymbol{\sigma}$ 但不依赖于 $\boldsymbol{D}$。之所以把它们称为亚弹性材料,是因为式(3.3.31)所表达的本构关系不是应力和应变之间的关系而是应力率和伸缩率(及旋转率)间的关系。

3.3.3 考虑微体变形影响的随旋应力率

由图 3.5 和式(3.3.30)可见:我们上面所引入的随旋应力率$\overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}}$虽然考虑了微体的瞬时刚体旋转的影响即转动率张量 $\boldsymbol{W}$ 的贡献,但是并没有考虑微体变形的影响,特别是并没有与介质相对于初始构形的变形相联系。在物体的变形很大时,我们有时需要与介质的初始构形相联系来考虑微体的另一种旋转率,下面我们对此做一简要介绍。

将变形梯度张量的右极分解公式

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{U} \tag{3.3.32}$$

求随体导数,有

$$\dot{\boldsymbol{F}} = \dot{\boldsymbol{R}} \cdot \boldsymbol{U} + \boldsymbol{R} \cdot \dot{\boldsymbol{U}} = \dot{\boldsymbol{R}} \cdot \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{F} + \boldsymbol{R} \cdot \dot{\boldsymbol{U}} \tag{3.3.33}$$

以$\boldsymbol{F}^{-1}$对此式两端进行点积,并利用 $\boldsymbol{L} = \dot{\boldsymbol{F}} \cdot \boldsymbol{F}^{-1}$,有

$$\boldsymbol{L} = \dot{\boldsymbol{R}} \cdot \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{R} \cdot \dot{\boldsymbol{U}} \cdot \boldsymbol{F}^{-1} \tag{3.3.34}$$

由于 $\boldsymbol{R}$ 是正交张量,$\boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{I}$,对此式求随体导数,易证下式所定义的量$\boldsymbol{W}^*$:

$$\boldsymbol{W}^* = \dot{\boldsymbol{R}} \cdot \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} \tag{3.3.35}$$

必是反对称张量(有的书上将之称为介质的相对旋转率张量)。将式(3.3.34)的两端进行和分解并利用 $\boldsymbol{L}$ 和分解的唯一性,易得

$$\boldsymbol{D} = \frac{1}{2}\boldsymbol{R} \cdot (\dot{\boldsymbol{U}} \cdot \boldsymbol{U}^{-1} + \boldsymbol{U}^{-1} \cdot \dot{\boldsymbol{U}}) \cdot \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} \tag{3.3.36}$$

$$W = W^* + \frac{1}{2} R \cdot (\dot{U} \cdot U^{-1} - U^{-1} \cdot \dot{U}) \cdot R^{T} \tag{3.3.37}$$

如以 W^* 代替(3.3.30)式中的 W,可得应力张量的另一种随旋应力率$\overset{*}{\sigma}$:

$$\overset{*}{\sigma} \equiv \dot{\sigma} + \sigma \cdot W^* - W^* \cdot \sigma \tag{3.3.38}$$

由(3.3.37)式可见,W^* 是与介质相对于初始构形的变形 U 相关的,所以$\overset{*}{\sigma}$是同时考虑了微体的旋转和变形影响的应力率。

3.4 运动方程、动量矩守恒方程

3.4.1 E 氏坐标中的运动方程

运动方程(equation of motion)是介质动量守恒定律的数学形式。为了导出运动方程,我们既可以从闭口体系出发也可以从开口体系出发,既可以取体系为微体系也可以取体系为有限的体系。在上一章导出反映质量守恒定律的连续方程时,我们就曾对微闭口、微开口、有限闭口、有限开口 4 种情况分别导出了连续方程。但是为了节省篇幅起见在本章我们将主要从有限闭口体系出发来导出运动方程,至于其他 3 种情况得到运动方程的方法读者可作为练习尝试之。

闭口体系和开口体系的动量守恒定律可分别表述为:闭口体系在任何时刻的动量变化率等于该瞬时作用于此闭口体系上的外力的矢量和;开口体系在任何时刻的动量变化率等于该瞬时作用于此开口体系上的外力的矢量和加上外界向体系的动量纯流入率。

按照上面的表述,对瞬时构形中任意的有限闭口体系 $v(t)$,其动量守恒定律在数学上可写为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{v(t)} \rho \boldsymbol{v} \mathrm{d}v = \int_{v(t)} \rho \boldsymbol{b} \mathrm{d}v + \oint_{a(t)} \boldsymbol{t}(\boldsymbol{n}) \mathrm{d}a \tag{3.4.1}$$

其中 $a(t)$为体系在 t 时刻的表面积,$\boldsymbol{v}$ 为粒子速度,ρ 和 $\boldsymbol{b}$ 为介质的瞬时质量密度和比体积力,$\boldsymbol{n}$ 为 $\mathrm{d}a$ 的单位外法矢量,$\boldsymbol{t}(\boldsymbol{n})$表示其上的 Cauchy 应力矢量,$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$表示随体导数。利用微闭口体系的质量守恒定律,即$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\rho \mathrm{d}v) = 0$,我们有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{v(t)}\rho\boldsymbol{v}\mathrm{d}v=\int_{v(t)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\rho\boldsymbol{v}\mathrm{d}v)=\int_{v(t)}\rho\dot{\boldsymbol{v}}\mathrm{d}v+\int_{v(t)}\boldsymbol{v}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\rho\mathrm{d}v)=\int_{v(t)}\rho\dot{\boldsymbol{v}}\mathrm{d}v \tag{3.4.2}$$

利用3.1节中的Cauchy公式：

$$\boldsymbol{t}=\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n} \tag{3.4.3}$$

并利用Gauss定理，有

$$\oint_{a(t)}\boldsymbol{t}(\boldsymbol{n})\mathrm{d}a=\oint_{a(t)}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}a=\int_{v(t)}\boldsymbol{\sigma}\cdot\overleftarrow{\nabla}\mathrm{d}v \tag{3.4.4}$$

其中$\overleftarrow{\nabla}$为E氏坐标中的梯度算子，$\boldsymbol{\sigma}\cdot\overleftarrow{\nabla}=\mathrm{div}\boldsymbol{\sigma}$为Cauchy应力张量在E氏坐标中的散度。

将(3.4.2)式和(3.4.4)式代入(3.4.1)式，即可得

$$\int_{v(t)}\rho\dot{\boldsymbol{v}}\mathrm{d}v=\int_{v(t)}\rho\boldsymbol{b}\mathrm{d}v+\int_{v(t)}\boldsymbol{\sigma}\cdot\overleftarrow{\nabla}\mathrm{d}v \tag{3.4.5}$$

式(3.4.1)或与之等价的式(3.4.5)即是闭口体系动量守恒定律的总体形式(global form)或积分形式(integral form)。

由闭口体系$v(t)$的任意性和被积函数的处处连续性，即可得

$$\rho\dot{\boldsymbol{v}}=\rho\boldsymbol{b}+\boldsymbol{\sigma}\cdot\overleftarrow{\nabla} \tag{3.4.6a}$$

式(3.4.6a)即是动量守恒定律的局部形式(local form)或微分形式(deferential form)，称之为运动方程，它是微闭口体系动量守恒定律在E氏坐标中的数学形式。$-\rho\dot{\boldsymbol{v}}$是单位瞬时体积介质的惯性力，$\rho\boldsymbol{b}$是单位瞬时体积介质的体积力，$\boldsymbol{\sigma}\cdot\overleftarrow{\nabla}$是单位瞬时体积介质的面积力，所以如果将式(3.4.6a)的左端移至右端，即是单位瞬时体积介质动量守恒定律的达朗贝尔形式。

按照我们在3.1节中所给出的Cauchy应力张量分量的定义方法，(3.4.6a)式的最后一项为

$$\mathrm{div}\boldsymbol{\sigma}\equiv\boldsymbol{\sigma}\cdot\overleftarrow{\nabla}=\sigma_{ij}\overleftarrow{\nabla}_j\boldsymbol{e}_i=\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j}\boldsymbol{e}_i \tag{3.4.7a}$$

故(3.4.6a)式的分量形式为

$$\rho\dot{v}_i=\rho b_i+\sigma_{ij}\overleftarrow{\nabla}_j=\rho b_i+\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j}\quad(i=1;2,3) \tag{3.4.6b}$$

对非极性物质，$\boldsymbol{\sigma}$是2阶对称张量，有

$$\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{\sigma},\quad \mathrm{div}\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{\sigma}\cdot\overleftarrow{\nabla}=\overrightarrow{\nabla}\cdot\boldsymbol{\sigma} \tag{3.4.7b}$$

故(3.4.6a)式和(3.4.6b)式也可分别写为

$$\rho\dot{\boldsymbol{v}} = \rho\boldsymbol{b} + \vec{\nabla}\cdot\boldsymbol{\sigma} \tag{3.4.6c}$$

$$\rho\,\dot{v}_i = \rho b_i + \vec{\nabla}_j\sigma_{ji} = \rho b_i + \frac{\partial\sigma_{ji}}{\partial x_j} \quad (i = 1,2,3) \tag{3.4.6d}$$

为了加深理解，我们再给出由有限开口体系动量守恒定律导出运动方程的方法及方程的表现形式。

取空间的某一固定区域 v 这一静止控制体作为我们所观察的开口体系，这里体系 v 和其表面积 a 都是与时间 t 无关的。于是开口体系 v 的动量守恒定律的数学形式为

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_v \rho\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}v = \int_v \rho\boldsymbol{b}\,\mathrm{d}v + \oint_a \boldsymbol{t}(\boldsymbol{n})\,\mathrm{d}a - \oint_a \rho\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}a \tag{3.4.8}$$

其中右端最后一项表示通过表面 a 的动量纯流入率，同时由于是静止控制体，故将其体积分的时间导数写为$\frac{\partial}{\partial t}$。考虑到 v、$\mathrm{d}v$ 都是与 t 无关的，故有

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_v \rho\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}v = \int_v \frac{\partial}{\partial t}(\rho\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}v \tag{3.4.9}$$

利用 Gauss 定理，(3.4.8)式的最后一项可写为

$$\oint_a \rho\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}a = \int_v (\rho\boldsymbol{v}\boldsymbol{v})\cdot\overleftarrow{\nabla}\,\mathrm{d}v \tag{3.4.10}$$

将(3.4.4)式、(3.4.9)式、(3.4.10)式代入(3.4.8)式，即可得

$$\int_v \frac{\partial}{\partial t}(\rho\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}v = \int_v \rho\boldsymbol{b}\,\mathrm{d}v + \int_v \boldsymbol{\sigma}\cdot\overleftarrow{\nabla}\,\mathrm{d}v - \int_v (\rho\boldsymbol{v}\boldsymbol{v})\cdot\overleftarrow{\nabla}\,\mathrm{d}v \tag{3.4.11}$$

(3.4.8)式和(3.4.11)式即是开口体系动量守恒定律的总体形式或积分形式。

由开口体系 v 的任意性和被积函数的连续性，即可得

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\boldsymbol{v}) = \rho\boldsymbol{b} + \boldsymbol{\sigma}\cdot\overleftarrow{\nabla} - (\rho\boldsymbol{v}\boldsymbol{v})\cdot\overleftarrow{\nabla} \tag{3.4.12}$$

(3.4.12)式即是开口体系动量守恒定律的局部形式或微分形式，它是运动方程的另外一种表现形式。式中左端的项$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\boldsymbol{v})$表示单位空间体积的动量变化率；右端第一项 $\rho\boldsymbol{b}$ 和第二项$\boldsymbol{\sigma}\cdot\overleftarrow{\nabla}$ 如前所述，分别表示单位空间体积所受的体积力和面积力；右端最后一项 $-(\rho\boldsymbol{v}\boldsymbol{v})\cdot\overleftarrow{\nabla}$（流入体系的动量流 $-\rho\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}$ 的散度）则表示单位空间体积的动量纯流入率。

由于我们取的是开口体系，所以从形式上看它与由闭口体系动量守恒定律所得出的运动方程(3.4.6)式乍看起来好像是不同的，但是如果注意到

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \boldsymbol{v}) = \rho \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial t}\boldsymbol{v} \tag{3.4.13}$$

$$(\rho \boldsymbol{v}\boldsymbol{v}) \cdot \overleftarrow{\nabla} = (\rho \boldsymbol{v}) \cdot \overleftarrow{\nabla} \boldsymbol{v} + \boldsymbol{v} \cdot \overleftarrow{\nabla} \rho \boldsymbol{v} \tag{3.4.14}$$

并将此两式代入(3.4.12)式，再利用如下公式：

$$\dot{\boldsymbol{v}} = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\overleftarrow{\nabla}) \cdot \boldsymbol{v} = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot (\overrightarrow{\nabla} \boldsymbol{v}) \tag{3.4.15}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\rho \boldsymbol{v}) \cdot \overleftarrow{\nabla} = 0 \quad (\text{连续方程}) \tag{3.4.16}$$

则可将(3.4.12)式化为(3.4.6)式，故它们是等价的。

关于由微闭口体系和微开口体系的动量守恒定律，直接导出式(3.4.6)和式(3.4.12)的方法，读者可作为练习尝试之。

3.4.2 L氏坐标中的运动方程

方程(3.4.1)式是闭口体系动量守恒定律在瞬时构形中的表现形式，但是我们也可以把它映射到初始构形当中。设闭口体系在瞬时构形中的体积 $v(t)$ 和表面积 $a(t)$ 分别映射为初始构形中的体积 V 和表面积 A（它们是与时间无关的），微体积 $\mathrm{d}v$ 和微表面积 $\mathrm{d}a$ 分别映射为初始构形中的微体积 $\mathrm{d}V$ 和微表面积 $\mathrm{d}A$，则由质量守恒和第一类 P-K 应力张量的定义，我们有

$$\rho \mathrm{d}v = \rho_0 \mathrm{d}V \tag{3.4.17}$$

$$\boldsymbol{t}(\boldsymbol{n})\mathrm{d}a = \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n}\mathrm{d}a = \boldsymbol{t}^*(\boldsymbol{n})\mathrm{d}A = \boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{N}\mathrm{d}A \tag{3.4.18}$$

于是可将方程(3.4.1)式映射为初始构形中的方程：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \rho_0 \boldsymbol{v}\mathrm{d}V = \int_V \rho_0 \boldsymbol{b}\mathrm{d}V + \oint_A \boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{N}\mathrm{d}A \tag{3.4.19}$$

其中 ρ_0 为介质在初始构形中的质量密度，即单位初始体积介质的质量。由于 V、$\mathrm{d}V$、ρ_0 都是与时间无关的，所以(3.4.19)式的左端的体积分随体导数可化为体积分：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \rho_0 \boldsymbol{v}\mathrm{d}V = \int_V \rho_0 \dot{\boldsymbol{v}}\mathrm{d}V \tag{3.4.20}$$

对(3.4.19)式中的最后一项在L氏坐标中应用Gauss定理，可有

$$\oint_A \boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{N}\mathrm{d}A = \int_V \boldsymbol{S} \cdot \overleftarrow{\nabla}\mathrm{d}V \tag{3.4.21}$$

其中 $\overleftarrow{\nabla}$ 表示L氏坐标中的梯度算子。将(3.4.20)式、(3.4.21)式代入(3.4.19)式，即可得

$$\int_V \rho_0 \dot{\boldsymbol{v}} \mathrm{d}V = \int_V \rho_0 \boldsymbol{b} \mathrm{d}V + \int_V \boldsymbol{S} \cdot \overleftarrow{\nabla} \mathrm{d}V \tag{3.4.22}$$

式(3.4.19)和式(3.4.22)即是L氏坐标中所表达的闭口体系动量守恒定律的总体形式或积分形式。

利用体系 V 的任意性和被积函数的连续性,可得

$$\rho_0 \dot{\boldsymbol{v}} = \rho_0 \boldsymbol{b} + \boldsymbol{S} \cdot \overleftarrow{\nabla} \tag{3.4.23a}$$

式(3.4.23a)即是L氏坐标中的运动方程,式中 $-\rho_0 \dot{\boldsymbol{v}}$、$\rho_0 \boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{S} \cdot \overleftarrow{\nabla}$ 三项分别表示单位初始体积介质所受的惯性力、体积力和面积力。我们特别指出:式(3.4.23a)中的 $\overleftarrow{\nabla}$ 表示L氏坐标中的梯度算子,$\boldsymbol{S} \cdot \overleftarrow{\nabla}$ 表示第一类P-K应力张量 $\boldsymbol{S}$ 在L氏坐标中的散度:

$$\mathrm{DIV}\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S} \cdot \overleftarrow{\nabla} = S_{iJ} \overleftarrow{\nabla}_J \boldsymbol{e}_i \tag{3.4.24}$$

故(3.4.23a)式的分量形式为

$$\rho_0 \dot{v}_i = \rho_0 b_i + S_{iJ} \overleftarrow{\nabla}_J = \rho_0 b_i + \frac{\partial S_{iJ}}{\partial X_J} \quad (i = 1,2,3) \tag{3.4.23b}$$

注意:尽管方程(3.4.23)式是L氏坐标中的偏微分方程,但方程(3.4.23b)式却是矢量方程(3.4.23a)式在E氏坐标中投影的分量形式。

对比(3.4.6)式和(3.4.23)式可以发现:只要把(3.4.6)式中的 ρ、$\boldsymbol{\sigma}$、$\boldsymbol{x}$ 分别改为 ρ_0、$\boldsymbol{S}$、$\boldsymbol{X}$,便可得到(3.4.23)式,简言之,ρ、$\boldsymbol{\sigma}$、$\boldsymbol{x}$ 和 ρ_0、$\boldsymbol{S}$、$\boldsymbol{X}$ 是分别配套的。

最后,由第二类P-K应力张量 $\boldsymbol{\Sigma}$ 和第一类P-K应力张量 $\boldsymbol{S}$ 的关系,可将(3.4.23)式化为由 $\boldsymbol{\Sigma}$ 所表达的运动方程:

$$\rho_0 \dot{\boldsymbol{v}} = (\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{\Sigma}) \cdot \overleftarrow{\nabla} + \rho_0 \boldsymbol{b} \tag{3.4.25a}$$

$$\rho_0 v_i = (F_{iL} \Sigma_{LJ}) \overleftarrow{\nabla}_J + \rho_0 b_i = \frac{\partial (F_{iL} \Sigma_{LJ})}{\partial X_J} + \rho_0 b_i \quad (i = 1,2,3) \tag{3.4.25b}$$

3.4.3 动量矩守恒方程

在3.1节中我们以通过微闭口体系的动量矩守恒定律得到过极性物质的动量矩守恒方程,在此我们再以有限闭口体系的动量矩守恒定律简要给出动量矩守恒方程的推导。闭口体系的动量矩守恒定律可表达为:闭口体系的动量对任意固定点的动量矩的变化率,等于该时刻体系全部外力对同一点之矩的矢量和。如对各粒子位置矢量的参考点 O 取矩,则这在数学上可以表达为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{v(t)} \boldsymbol{x}\times\rho\boldsymbol{v}\mathrm{d}v = \int_{v(t)} \boldsymbol{x}\times\rho\boldsymbol{b}\mathrm{d}v + \oint_{a(t)} \boldsymbol{x}\times\boldsymbol{t}(\boldsymbol{n})\mathrm{d}a + \int_{v(t)} \rho\boldsymbol{c}\mathrm{d}v + \oint_{a(t)} \boldsymbol{l}(\boldsymbol{n})\mathrm{d}a \tag{3.4.26}$$

其中 $\boldsymbol{c}$ 和 $\boldsymbol{l}$ 分别表示介质所受的比体力偶矩矢量和接触面力偶矩密度矢量。由于

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{v(t)} \boldsymbol{x}\times\rho\boldsymbol{v}\mathrm{d}v = \int_{v(t)} \boldsymbol{x}\times\rho\dot{\boldsymbol{v}}\mathrm{d}v + \int_{v(t)} \boldsymbol{v}\times\rho\boldsymbol{v}\mathrm{d}v + \int_{v(t)} \boldsymbol{x}\times\boldsymbol{v}\frac{\mathrm{d}(\rho\mathrm{d}v)}{\mathrm{d}t} = \int_{v(t)} \boldsymbol{x}\times\rho\dot{\boldsymbol{v}}\mathrm{d}v \tag{3.4.27}$$

$$\oint_{a(t)} \boldsymbol{x}\times\boldsymbol{t}(\boldsymbol{n})\mathrm{d}a = \oint_{a(t)} \boldsymbol{x}\times(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n})\mathrm{d}a = \int_{v(t)} (\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{\sigma})\cdot\overleftarrow{\nabla}\mathrm{d}v \tag{3.4.28}$$

$$\oint_{a(t)} \boldsymbol{l}(\boldsymbol{n})\mathrm{d}a = \oint_{a(t)} \boldsymbol{\chi}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}a = \int_{v(t)} \boldsymbol{\chi}\cdot\overleftarrow{\nabla}\mathrm{d}v \tag{3.4.29}$$

将此3式代入(3.4.26)式并利用闭口体系 $v(t)$ 的任意性和被积函数的连续性,可得动量矩守恒方程的局部形式如下:

$$\boldsymbol{x}\times\rho\dot{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{x}\times\rho\boldsymbol{b} + (\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{\sigma})\cdot\overleftarrow{\nabla} + \rho\boldsymbol{c} + \boldsymbol{\chi}\cdot\overleftarrow{\nabla} \tag{3.4.30}$$

利用公式:

$$(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{\sigma})\cdot\overleftarrow{\nabla} = \boldsymbol{x}\times(\boldsymbol{\sigma}\cdot\overleftarrow{\nabla}) + \boldsymbol{\sigma}\cdot\cdot\,\boldsymbol{e} \quad \text{(读者可作为练习证明之)} \tag{3.4.31}$$

和运动方程(3.4.6)式,我们可将(3.4.30)式化为

$$\boldsymbol{\sigma}\cdot\cdot\,\boldsymbol{e} + \rho\boldsymbol{c} + \boldsymbol{\chi}\cdot\overleftarrow{\nabla} = \boldsymbol{0} \tag{3.4.32}$$

其中 $\boldsymbol{\sigma}\cdot\cdot\,\boldsymbol{e}$ 表示 $\boldsymbol{\sigma}$ 和置换张量 $\boldsymbol{e}$ 的第二种二次点积。(3.4.32)式就是极性物质动量矩守恒方程的简化形式。

对非极性物质,$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$,$\boldsymbol{\chi}=\boldsymbol{0}$,(3.4.32)式成为

$$\boldsymbol{\sigma}\cdot\cdot\,\boldsymbol{e} = \boldsymbol{0} \tag{3.4.33a}$$

这便给出了 Cauchy 应力张量 $\boldsymbol{\sigma}$ 对称的结论:

$$\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{\sigma} \tag{3.4.33b}$$

这些我们已经在3.1节中讲过了。

3.5 纯力学情况下的能量方程

3.5.1 E 氏坐标中的纯力学能量方程

能量方程(energy equation)是能量守恒定律的数学形式。所谓纯力学情况，是指不存在热效应时的情况。纯力学情况下，闭口体系和开口体系能量守恒定律可分别表达为：闭口体系总能量(动能和内能)的增加率等于该时刻外力的功率；开口体系总能量(动能和内能)的增加率等于该时刻外力的功率与能量的纯流入率之和。

连续介质力学中介质的总能量包括动能和内能。如果以 k 和 u 分别表示介质的比动能和比内能，则闭口体系 $v(t)$ 的纯力学能量守恒定律可写为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{v(t)}\rho(k+u)\mathrm{d}v=\int_{v(t)}\boldsymbol{v}\cdot\rho\boldsymbol{b}\mathrm{d}v+\oint_{a(t)}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{t}(\boldsymbol{n})\mathrm{d}a \tag{3.5.1}$$

(3.5.1)式中的 3 项分别表示闭口体系总能量的增加率、体力的功率和面力的功率。利用与 3.4 节中类似的方法，有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{v(t)}\rho(k+u)\mathrm{d}v=\int_{v(t)}\rho(\dot{k}+\dot{u})\mathrm{d}v \tag{3.5.2}$$

$$\oint_{a(t)}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{t}(\boldsymbol{n})\mathrm{d}a=\oint_{a(t)}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}a=\int_{v(t)}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\sigma})\cdot\overleftarrow{\nabla}\mathrm{d}v \tag{3.5.3}$$

在(3.5.2)式中我们利用了质量守恒定律，在(3.5.3)式中我们利用了 Cauchy 公式和 Gauss 定理。故(3.5.1)式可改写为

$$\int_{v(t)}\rho(\dot{k}+\dot{u})\mathrm{d}v=\int_{v(t)}\boldsymbol{v}\cdot\rho\boldsymbol{b}\mathrm{d}v+\int_{v(t)}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\sigma})\cdot\overleftarrow{\nabla}\mathrm{d}v \tag{3.5.4}$$

式(3.5.1)和式(3.5.4)就是纯力学情况下闭口体系能量守恒定律的总体形式或积分形式。由 $v(t)$ 的任意性和被积函数的连续性，可得其局部形式或微分形式：

$$\rho(\dot{k}+\dot{u})=\boldsymbol{v}\cdot\rho\boldsymbol{b}+(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\sigma})\cdot\overleftarrow{\nabla} \tag{3.5.5}$$

(3.5.5)式的左端 $\rho(\dot{k}+\dot{u})$ 表示单位瞬时体积介质总能量的增加率，其右端 $\boldsymbol{v}\cdot\rho\boldsymbol{b}+(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\sigma})\cdot\overleftarrow{\nabla}\equiv\rho\dot{w}^*$ 表示单位瞬时体积介质的体力功率和单位瞬时体积

介质的面力功率之和，$\dot{w}^*$ 表示外力(体力和面力)的比功率。故(3.5.5)式表达的就是单位瞬时体积介质的总能量增加率和外力功率相等的纯力学能量守恒定律。需要说明的是:尽管功是过程量而不是状态量,而为了书写简单起见我们仍用记号 $\dot{w}^*$ 来表达比功率,但需注意它并不代表随体导数。

为了读者阅读文献方便,也为了加深理解,我们也给出开口体系纯力学能量守恒方程的导出方法和其表现形式。

对静止的空间控制体 v,其纯力学能量守恒定律的初始数学形式为

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_v \rho(k+u)\mathrm{d}v = \int_v \boldsymbol{v}\cdot\rho\boldsymbol{b}\mathrm{d}v + \oint_a \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{t}(\boldsymbol{n})\mathrm{d}a - \oint_a \rho(k+u)\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}a \tag{3.5.6}$$

其中右端的最后一项 $-\oint_a \rho(k+u)\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}a$ 表示能量的纯流入率。由于

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_v \rho(k+u)\mathrm{d}v = \int_v \frac{\partial}{\partial t}[\rho(k+u)]\mathrm{d}v \tag{3.5.7}$$

$$\oint_a \rho(k+u)\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}a = \int_v [\rho(k+u)\boldsymbol{v}]\cdot\overleftarrow{\nabla}\mathrm{d}v \tag{3.5.8}$$

将(3.5.3)式、(3.5.7)式、(3.5.8)式代入(3.5.6)式,可得开口体系能量守恒方程总体形式或积分形式(3.5.6)式的另一形式如下:

$$\int_v \frac{\partial}{\partial t}[\rho(k+u)]\mathrm{d}v = \int_v \boldsymbol{v}\cdot\rho\boldsymbol{b}\mathrm{d}v + \int_v (\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\sigma})\cdot\overleftarrow{\nabla}\mathrm{d}v - \int_v [\rho(k+u)\boldsymbol{v}]\cdot\overleftarrow{\nabla}\mathrm{d}v \tag{3.5.9}$$

由此可得开口体系能量方程的局部形式和微分形式为

$$\frac{\partial}{\partial t}[\rho(k+u)] = \boldsymbol{v}\cdot\rho\boldsymbol{b} + (\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\sigma})\cdot\overleftarrow{\nabla} - [\rho(k+u)\boldsymbol{v}]\cdot\overleftarrow{\nabla} \tag{3.5.10}$$

其中 $\frac{\partial}{\partial t}[\rho(k+u)]$、$-[\rho(k+u)\boldsymbol{v}]\cdot\overleftarrow{\nabla}$ 分别表示单位空间体积中的能量增加率和单位空间体积的能量纯流入率,而另外两项的意义前面已经说过了。如果注意到

$$\frac{\partial}{\partial t}[\rho(k+u)] = \frac{\partial\rho}{\partial t}(k+u) + \rho\frac{\partial(k+u)}{\partial t} \tag{3.5.11}$$

$$[\rho(k+u)\boldsymbol{v}]\cdot\overleftarrow{\nabla} = (\rho\boldsymbol{v})\cdot\overleftarrow{\nabla}(k+u) + (k+u)\overleftarrow{\nabla}\cdot(\rho\boldsymbol{v}) \tag{3.5.12}$$

将此两式代入(3.5.10)式并利用连续方程:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + (\rho\boldsymbol{v})\cdot\overleftarrow{\nabla} = 0 \tag{3.5.13}$$

和

$$\dot{k} + \dot{u} = \frac{\partial(k+u)}{\partial t} + (k+u)\overleftarrow{\nabla}\cdot\boldsymbol{v} \tag{3.5.14}$$

立即可将(3.5.10)式化为(3.5.5)式,即它们是等价的,只不过它们分别是开口体系和闭口体系能量守恒定律的表现形式而已。

下面我们将单位体积面力的功率做一些形式上的改变并说明其物理意义。对

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\sigma})\cdot\overleftarrow{\nabla} &= (\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\sigma})_i\overleftarrow{\nabla}_i = (v_j\sigma_{ji})\overleftarrow{\nabla}_i = (\sigma_{ji}\overleftarrow{\nabla}_i)v_j + (v_j\overleftarrow{\nabla}_i)\sigma_{ji}\\ &= (\boldsymbol{\sigma}\cdot\overleftarrow{\nabla})\cdot\boldsymbol{v} + \boldsymbol{L}:\boldsymbol{\sigma} = (\boldsymbol{\sigma}\cdot\overleftarrow{\nabla})\cdot\boldsymbol{v} + \boldsymbol{\sigma}:\boldsymbol{L}\end{aligned} \tag{3.5.15a}$$

其意义是:单位体积面力的功率$(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\sigma})\cdot\overleftarrow{\nabla}$可分解为两项之和,第一项$(\boldsymbol{\sigma}\cdot\overleftarrow{\nabla})\cdot\boldsymbol{v}$是“不均衡面力”即单位体积介质面力$\boldsymbol{\sigma}\cdot\overleftarrow{\nabla}$在微体平移速度$\boldsymbol{v}$上的功率,第二项$\boldsymbol{\sigma}:\boldsymbol{L}$是微体的“均衡面力”$\boldsymbol{\sigma}$在微体非均匀运动即速度空间梯度$\boldsymbol{L}$上的功率。将速度的空间梯度$\boldsymbol{L}$进行和分解,并注意到伸缩率张量$\boldsymbol{D}$和旋转率张量$\boldsymbol{W}$分别是对称的和反对称的,而$\boldsymbol{\sigma}$也是对称的,因之有

$$\boldsymbol{\sigma}:\boldsymbol{W}=0,\quad \boldsymbol{\sigma}:\boldsymbol{L}=\boldsymbol{\sigma}:(\boldsymbol{D}+\boldsymbol{W})=\boldsymbol{\sigma}:\boldsymbol{D} \tag{3.5.16}$$

即“均衡面力”$\boldsymbol{\sigma}$的旋转功率为零,它在$\boldsymbol{L}$上的功率完全是纯变形功率$\boldsymbol{\sigma}:\boldsymbol{D}$,于是(3.5.15)式可写为

$$(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\sigma})\cdot\overleftarrow{\nabla} = (\boldsymbol{\sigma}\cdot\overleftarrow{\nabla})\cdot\boldsymbol{v} + \boldsymbol{\sigma}:\boldsymbol{L} = (\boldsymbol{\sigma}\cdot\overleftarrow{\nabla})\cdot\boldsymbol{v} + \boldsymbol{\sigma}:\boldsymbol{D} \tag{3.5.15b}$$

将(3.5.15b)式代入(3.5.5)式中,并将其中的$(\boldsymbol{\sigma}\cdot\overleftarrow{\nabla})\cdot\boldsymbol{v}$与(3.5.5)式右端的第一项$\rho\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{v}$相合并,则有

$$\rho(\dot{k}+\dot{u}) = [\rho\boldsymbol{b}+\boldsymbol{\sigma}\cdot\overleftarrow{\nabla}]\cdot\boldsymbol{v} + \boldsymbol{\sigma}:\boldsymbol{D} \tag{3.5.17}$$

(3.5.17)式是能量方程(3.5.5)式的另一种形式,其中右端第一项$[\rho\boldsymbol{b}+\boldsymbol{\sigma}\cdot\overleftarrow{\nabla}]\cdot\boldsymbol{v}$表示单位体积介质体积力$\rho\boldsymbol{b}$和不均衡面力$\boldsymbol{\sigma}\cdot\overleftarrow{\nabla}$在微体质心速度$\boldsymbol{v}$上的刚性移动功率,而第二项$\boldsymbol{\sigma}:\boldsymbol{D}\equiv\rho\dot{w}$表示均衡面力$\boldsymbol{\sigma}$的变形功率($\dot{w}$表示比变形功率即单位质量介质的变形功率)。

如果将运动方程:

$$\rho\dot{\boldsymbol{v}} = \rho\boldsymbol{b} + \boldsymbol{\sigma}\cdot\overleftarrow{\nabla} \tag{3.5.18}$$

两端点乘以质点速度$\boldsymbol{v}$,并注意到

$$\rho\dot{\boldsymbol{v}}\cdot\boldsymbol{v} = \rho\frac{1}{2}\overline{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}}^{\boldsymbol{\cdot}} = \rho\dot{k} \tag{3.5.19}$$

则有

$$\rho \dot{k} = (\rho \boldsymbol{b} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \overleftarrow{\nabla}) \cdot \boldsymbol{v} \tag{3.5.20}$$

将(3.5.20)式代入(3.5.17)式，即可得

$$\rho \dot{u} = \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{D} \tag{3.5.21}$$

式(3.5.20)的意义是：单位体积介质的体力和面力的刚性移动功率等于其动能增量率，而这也就是微体的动能定理。式(3.5.21)的意义是：单位体积介质的变形功率等于其内能增加率，故在纯力学的情况下，介质的内能实际上也就是应力在介质变形上的变形能。

我们以上的推理过程实际上是把单位体积介质总能量的守恒方程(3.5.17)式分解成了分别表示其动能守恒和内能守恒的两个方程(3.5.20)式和(3.5.21)式。由于动能定理(3.5.20)式是显然的，故我们也可以把(3.5.21)式视为是能量方程的另一种形式。

3.5.2 变形功率的几种等价形式

利用 P-K 应力 $\boldsymbol{S}$ 和 $\boldsymbol{\Sigma}$ 与 Cauchy 应力 $\boldsymbol{\sigma}$ 的关系，我们可得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{L} &= \frac{1}{J}(\boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}) : (\dot{\boldsymbol{F}} \cdot \boldsymbol{F}^{-1}) = \frac{1}{J} S_{iK} F_{jK} \dot{F}_{iL} F_{Lj}^{-1} \\ &= \frac{1}{J}\delta_{KL} S_{iK} \dot{F}_{iL} = \frac{1}{J} S_{iK} \dot{F}_{iK} = \frac{1}{J}\boldsymbol{S} : \dot{\boldsymbol{F}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{D} &= \frac{1}{J}(\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{\Sigma} \cdot \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}) : [(\boldsymbol{F}^{-1})^{\mathrm{T}} \cdot \dot{\boldsymbol{E}} \cdot \boldsymbol{F}^{-1}] = \frac{1}{J} F_{iJ} \Sigma_{JK} F_{jK} F_{Li}^{-1} \dot{E}_{LM} F_{Mj}^{-1} \\ &= \frac{1}{J}\delta_{JL}\delta_{KM}\Sigma_{JK}\dot{E}_{LM} = \frac{1}{J}\Sigma_{JK}\dot{E}_{JK} = \frac{1}{J}\boldsymbol{\Sigma} : \dot{\boldsymbol{E}}\end{aligned}$$

故对单位体积介质的变形功率 $\rho\dot{w}$，我们可有如下几种等价的共轭表达方式：

$$\rho\dot{w} = \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{L} = \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{D} = \frac{1}{J}\boldsymbol{S} : \dot{\boldsymbol{F}} = \frac{1}{J}\boldsymbol{\Sigma} : \dot{\boldsymbol{E}} \tag{3.5.22}$$

简言之，对单位体积介质的变形功率而言，与广义力 $\boldsymbol{\sigma}$、$\dfrac{\boldsymbol{S}}{J}$、$\dfrac{\boldsymbol{\Sigma}}{J}$ 相对应的广义速度分别是 $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{L})$、$\dot{\boldsymbol{F}}$、$\dot{\boldsymbol{E}}$。

如果我们分别取 $\boldsymbol{\sigma}$ 和 $\boldsymbol{D}$ 为表达变形功率 $\rho \dot{w}$ 的动力学和运动学共轭量，则可导出变形功率的另外一种形式。将应力张量 $\boldsymbol{\sigma}$ 和伸缩率张量 $\boldsymbol{D}$ 都分解为球形部分和偏量部分之和，即设

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\boldsymbol{I} + \boldsymbol{\sigma}', \quad p = -\frac{1}{3}\mathrm{tr}\boldsymbol{\sigma} = -\frac{1}{3}\sigma_{ii}, \quad \mathrm{tr}\boldsymbol{\sigma}' = \sigma'_{ii} = 0 \tag{3.5.22a}$$

$$\boldsymbol{D} = \left(\frac{1}{3}\mathrm{tr}\boldsymbol{D}\right)\boldsymbol{I} + \boldsymbol{D}', \quad \mathrm{tr}\boldsymbol{D} = D_{ii} = \mathrm{div}\boldsymbol{v}, \quad \mathrm{tr}\boldsymbol{D}' = D'_{ii} = 0 \tag{3.5.22b}$$

其中的 p 称为压力，$-p\boldsymbol{I}$ 称为球形应力张量或各向同性应力张量，它只引起微体的各向等值拉压而任何面上都不存在切应力，$\boldsymbol{\sigma}'$称为偏应力张量，它的第一主不变量为零；$\boldsymbol{D}$ 的第一主不变量 $\mathrm{tr}\boldsymbol{D}$ 为相对体积膨胀率，$\left(\frac{1}{3}\mathrm{tr}\boldsymbol{D}\right)\boldsymbol{I}$ 称为球形伸缩率张量，它只引起微体的各向等值伸缩而不引起形状的畸变，$\boldsymbol{D}'$称为偏伸缩率张量或畸变率张量，它的第一主不变量也为零。显然我们有

$$-p\boldsymbol{I} : \boldsymbol{D}' = 0, \quad \boldsymbol{\sigma}' : \left(\frac{1}{3}\mathrm{tr}\boldsymbol{D}\right)\boldsymbol{I} = 0 \tag{3.5.23}$$

即压力不在畸变上做功，偏应力不在纯胀缩上做功。将(3.5.22)式代入由 $\boldsymbol{\sigma}$ 和 $\boldsymbol{D}$ 所表达的变形功率表达式之中，并利用(3.5.23)式，则有

$$\rho\dot{w} = \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{D} = -p\mathrm{div}\boldsymbol{v} + \boldsymbol{\sigma}' : \boldsymbol{D}' \tag{3.5.24}$$

式(3.5.24)的含义是：单位瞬时体积介质的应力变形功率 $\rho\dot{w}$ 等于压力 p 的体积胀缩功率 $-p\mathrm{div}\boldsymbol{v}$ 和偏应力$\boldsymbol{\sigma}'$的畸变功率$\boldsymbol{\sigma}' : \boldsymbol{D}'$之和。

3.5.3 L 氏坐标中的纯力学能量方程

类似于 3.4 节中导出 L 氏坐标中运动方程的方法，我们也可以将本节中的(3.5.1)式或(3.5.4)式映射到初始构形中，从而得到 L 氏坐标中的能量方程。事实上，设闭口体系 $v(t)$及其表面 $a(t)$在初始构形中的映象分别为体积 V 和表面 A，它们是与时间无关的，则我们有

$$\rho \mathrm{d}v = \rho_0 \mathrm{d}V \tag{3.5.25}$$

$$\boldsymbol{t}(\boldsymbol{n})\mathrm{d}a = \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}a = \boldsymbol{t}^*(\boldsymbol{n})\mathrm{d}A = \boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{N}\mathrm{d}A \tag{3.5.26}$$

此二式分别表达了质量守恒和第一类 P-K 应力张量的定义。将它们代入(3.5.1)式中，并注意到体积 V 和 $\mathrm{d}V$ 与时间无关因之可将左端的求导移入积分号内，即可得

$$\int_V \rho_0(\dot{k} + \dot{u})\mathrm{d}V = \int_V \boldsymbol{v}\cdot\rho_0\boldsymbol{b}\mathrm{d}V + \oint_A \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{N}\mathrm{d}A \tag{3.5.27}$$

对右端最后一项在 L 氏坐标中利用 Gauss 定理后，则可将(3.5.27)式改写为

$$\int_V \rho_0(\dot{k} + \dot{u})\mathrm{d}V = \int_V \boldsymbol{v}\cdot\rho_0\boldsymbol{b}\mathrm{d}V + \int_V (\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{S})\cdot\overleftarrow{\nabla}\mathrm{d}V \tag{3.5.28}$$

其中∇表示 L 氏坐标中的梯度算子。

式(3.5.27)或式(3.5.28)即是初始构形中所表达的闭口体系纯力学能量方程的总体形式或积分形式，并由此可得到其局部形式或微分形式：

$$\rho_0(\dot{k}+\dot{u}) = \boldsymbol{v}\cdot\rho_0\boldsymbol{b} + (\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{S})\cdot\overleftarrow{\nabla} \tag{3.5.29}$$

式(3.5.29)的含义是：单位初始体积介质的总能量增加率 $\rho_0(\dot{k}+\dot{u})$ 等于单位初始体积介质的体力功率 $\boldsymbol{v}\cdot\rho_0\boldsymbol{b}$ 加上单位初始体积介质的面力功率 $(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{S})\cdot\overleftarrow{\nabla}$。

类似于式(3.5.15a)的推导，并注意到$\dfrac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \boldsymbol{X}}=\dot{\boldsymbol{F}}$，即$\dfrac{\partial v_j}{\partial X_I}=\dot{F}_{jI}$，可有

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{S})\cdot\overleftarrow{\nabla} &= (\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{S})_I\overleftarrow{\nabla}_I = (v_jS_{jI})\overleftarrow{\nabla}_I = (S_{jI}\overleftarrow{\nabla}_I)v_j + v_j\overleftarrow{\nabla}_IS_{jI}\\ &= (\boldsymbol{S}\cdot\overleftarrow{\nabla})\cdot\boldsymbol{v} + \boldsymbol{S}:\dot{\boldsymbol{F}}\end{aligned} \tag{3.5.30}$$

其中$(\boldsymbol{S}\cdot\overleftarrow{\nabla})\cdot\boldsymbol{v}$ 表示非均衡的面力$\boldsymbol{S}\cdot\overleftarrow{\nabla}$在 $\boldsymbol{v}$ 上的刚性移动功率，$\boldsymbol{S}:\dot{\boldsymbol{F}}$ 表示均衡面力 $\boldsymbol{S}$ 的变形功率$\rho_0\dot{w}$，它们都是对于单位初始体积介质而言的。将(3.5.30)式代入(3.5.29)式，可得 L 氏坐标中能量方程的另一种形式：

$$\rho_0(\dot{k}+\dot{u}) = (\rho_0\boldsymbol{b}+\boldsymbol{S}\cdot\overleftarrow{\nabla})\cdot\boldsymbol{v} + \boldsymbol{S}:\dot{\boldsymbol{F}} \tag{3.5.31}$$

其中右端第一项$(\rho_0\boldsymbol{b}+\boldsymbol{S}\cdot\overleftarrow{\nabla})\cdot\boldsymbol{v}$ 表示单位初始体积介质体积力和面力的刚性移动功率。与前面类似，将 L 氏坐标中的运动方程两端点乘以 $\boldsymbol{v}$，可得动能定理的表达形式：

$$\rho_0\dot{k} = (\rho_0\boldsymbol{b}+\boldsymbol{S}\cdot\overleftarrow{\nabla})\cdot\boldsymbol{v} \tag{3.5.32}$$

故(3.5.31)式可等价地写为

$$\rho_0\dot{u} = \boldsymbol{S}:\dot{\boldsymbol{F}} \tag{3.5.33}$$

如用第二类 P-K 应力张量 $\boldsymbol{\Sigma}$ 来表达，则可写为

$$\rho_0\dot{u} = \boldsymbol{\Sigma}:\dot{\boldsymbol{E}} \tag{3.5.34}$$

式(3.5.29)、式(3.5.31)、式(3.5.33)和式(3.5.34)都可作为 L 氏坐标中纯力学能量方程的表达形式。

习　题

3.1　试由微闭口体系的动量守恒定律导出运动方程：

$$\rho\dot{\boldsymbol{v}} = \rho\boldsymbol{b} + \boldsymbol{\sigma}\cdot\overleftarrow{\nabla}$$

3.2　试由坐标面所围成的微闭口体系(即将某一时刻处于坐标面中的物质作为一个闭口体系)的动量守恒定律导出运动方程在相应坐标系(直角笛卡尔坐标系和正交曲线坐标系)中的具体数学形式。

3.3　试由微开口体系的动量守恒定律导出运动方程：

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\boldsymbol{v}) = \rho\boldsymbol{b} + \boldsymbol{\sigma}\cdot\overleftarrow{\nabla} - (\rho\boldsymbol{v}\boldsymbol{v})\cdot\overleftarrow{\nabla}$$

3.4　试由坐标面所围成的微开口体系的动量守恒定律导出运动方程在相应坐标系(直角笛卡尔坐标系和正交曲线坐标系)中的具体数学形式。

3.5　试证明式(3.4.14)，即

$$(\rho\boldsymbol{v}\boldsymbol{v})\cdot\overleftarrow{\nabla} = (\rho\boldsymbol{v})\cdot\overleftarrow{\nabla}\,\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}\cdot\overleftarrow{\nabla}\,\rho\boldsymbol{v}$$

3.6　试证明式(3.4.31)，即

$$(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{\sigma})\cdot\overleftarrow{\nabla} = \boldsymbol{x}\times(\boldsymbol{\sigma}\cdot\overleftarrow{\nabla}) + \boldsymbol{\sigma}\cdot\cdot\,\boldsymbol{e}$$

3.7　试写出非极性物质中动量矩守恒定律的 3 种数学形式。

3.8　试导出极性物质中用 P-K 应力 $\boldsymbol{S}$ 和 $\boldsymbol{\Sigma}$ 表达的动量矩守恒方程。

3.9　试证明式(3.5.12)，即

$$[\rho(k+u)\boldsymbol{v}]\cdot\overleftarrow{\nabla} = (\rho\boldsymbol{v})\cdot\overleftarrow{\nabla}(k+u) + (k+u)\overleftarrow{\nabla}\cdot(\rho\boldsymbol{v})$$

3.10　试证明式(3.5.16)，即

$$\boldsymbol{\sigma}:\boldsymbol{W} = 0$$

3.11　试证明一维柱对称运动和球对称运动中用 L 氏坐标所表达的连续方程分别为

$$\frac{\rho_0}{\rho}r = (r+u)\frac{\partial(r+u)}{\partial r},\quad \frac{\rho_0}{\rho}r^2 = (r+u)^2\frac{\partial(r+u)}{\partial r}$$

其中 ρ_0 和 ρ 分别为介质的初始和瞬时质量密度，对一维柱对称运动和球对称运动 r 分别为柱径坐标和球径坐标，对一维柱对称运动和球对称运动 u 分别为柱径位

移和球径位移。

3.12 试证明一维柱对称运动和球对称运动中用L氏坐标和Cauchy应力所表达的运动方程分别为

$$\rho_0 r\ddot{u} = -(r+u)\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} - (\sigma_r - \sigma_\theta)\frac{\partial (r+u)}{\partial r}$$

$$\rho_0 r\ddot{u}^2 = -(r+u)^2\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} - (\sigma_r - \sigma_\theta)\frac{\partial (r+u)^2}{\partial r}$$

其中 ρ_0 为介质的初始质量密度，对一维柱对称运动和球对称运动 r 分别为柱径坐标和球径坐标，对一维柱对称运动和球对称运动 u 分别为柱径位移和球径位移，σ_r 和 σ_θ 分别为柱坐标和球坐标中的径向正应力和环向正应力。

3.13 对厚度为 h 的薄靶柱对称垂直贯穿的扩孔问题，试导出其运动方程：

$$\rho h\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial}{\partial r}(h\sigma_r) + \frac{h(\sigma_r - \sigma_\theta)}{r}$$

其中 ρ 和 u 分别为介质的瞬时质量密度和扩孔径向速度，σ_r 和 σ_θ 分别为径向正应力和环向正应力，r 为径向坐标。

第 4 章　变形热力学

4.1　能 量 方 程

4.1.1　热力学第一定律

热力学第一定律是涉及热现象的能量守恒和转化定律。在普通物理中，读者曾学习过热力学第一定律，对任何一个物质量确定的热力学体系即闭口体系而言，在那里曾把热力学第一定律表达为：闭口体系内能的增加率等于体系所受的外力功率加上外界对它的供热率。需要指出的是：普通物理中所讲的热力学体系都是静止而没有宏观流动的体系，所以那里的热力学事实上只能称之为静热力学(static thermodynamics)。在连续介质力学中所处理的介质是存在着宏观流动的介质，故介质的总能量除了自身蕴藏的内能之外，还有其宏观流动的动能（这里的动能并非介质的分子无规则运动的动能，而是其宏观流动的动能，而前者则是其内能）。所以，如果将反映能量守恒和转化的热力学第一定律应用于连续介质力学的体系上，我们可将之表达为：闭口体系的总能量（动能和内能）的增加率等于该时刻外力的功率加上外界对体系的供热率；开口体系的总能量（动能和内能）的增加率等于该时刻外力的功率加上外界对体系的供热率，再加上总能量的纯流入率。

如果以 K、U、W^*、Q 分别表示体系的动能、内能、外功、外热，则任意闭口体系率形式的热力学第一定律可以表达为

$$\dot{K} + \dot{U} = \dot{W}^* + \dot{Q} \tag{a}$$

需要强调指出的是：动能 K 和内能 U 是所谓的状态量(state quantities)，体系

的某种确定状态对应着确定的动能和内能,当体系由一个状态过渡到另一个状态时,其动能和内能的改变量只与其初态和终态有关,而与其所经历的不同过程完全无关;但是,功 W^* 和热 Q 则并不是状态量,而是所谓的过程量,它们是与由一个状态过渡到另一个状态的具体过程紧密相关的,当体系由某个初态过渡到某个终态时,外界对体系的外功值和外热值并不能由其初态和终态完全确定,而是与实现这一过渡的具体过程紧密相关的。所以,对闭口体系而言,式(a)中的 $\dot{K}$ 和 $\dot{U}$ 分别是状态量 K 和 U 的随体导数;而 $\dot{W}^*$ 和 $\dot{Q}$ 则并不代表 W^* 和 Q 的随体导数(过程量无所谓随体导数),它们只表示极限意义下无限小时间间隔 $\mathrm{d}t$ 中外功 $\mathrm{d}W^*$ 和外热 $\mathrm{d}Q$ 与 $\mathrm{d}t$ 之比:

$$\dot{W}^* = \mathrm{d}W^*/\mathrm{d}t, \quad \dot{Q} = \mathrm{d}Q/\mathrm{d}t$$

如果把式(a)两端乘以 $\mathrm{d}t$,则可以写出无限小时间间隔 $\mathrm{d}t$ 中闭口体系热力学第一定律的形式:

$$\mathrm{d}K + \mathrm{d}U = \mathrm{d}W^* + \mathrm{d}Q \tag{b}$$

同样,式(b)中的 $\mathrm{d}K$ 和 $\mathrm{d}U$ 分别表示状态量 K 和 U 的全微分;而 $\mathrm{d}W^*$ 和 $\mathrm{d}Q$ 则并不表示全微分,而只是表示时间间隔 $\mathrm{d}t$ 中的过程量增量,即微小外功和微小外热。

动能 K、外功 W^* 和外热 Q 的意义是显然的和众所周知的,不需要做细致的说明。但是内能 U 的含义则比较复杂,需要简单加以说明。从宏观上讲,我们可以说一个物质体的内能是它内部所储藏的可以转化为对外做功和对外放出热量的一种能量,或者反过来说,内能是一个物质体能够接受外功和外热并将之储藏起来的能量。而这只不过是由能量守恒和转化定律对内能做的一个形式上的解释而已。从细观和微观的角度讲,内能的含义则和物质的形式以及人们对其进行研究的模型有关。对普通物理中人们所研究的所谓"理想气体",气体分子被视为没有大小和之间没有相互作用的无限小微粒点,内能表示其分子无规则热运动的能量,故理想气体的内能只是温度 T 的函数;当气体压力较高时,人们需要考虑分子本身所占有的体积以及分子间的相互作用,这就是所谓的"实际气体"模型,此时气体的内能则表示其分子无规则热运动的能量以及分子间相互作用的势能之和,故"实际气体"的内能是温度 T 和其比容 v 的函数;对于温度不高时的固体,内能则是晶格(原子晶体、分子晶体、离子晶体、原子键晶体等)在其平衡位置附近热振动的能量以及晶格变形势能之和,而在更高的温度之下,内能除了上面所述的能量外,则还将包括高温下的电子激发能等等。因此一般而言,固体的内能将是温度 T 和与其变形有关的一些运动学量 a_k(比容、应变、组分浓度等)的函数。

4.1.2 连续介质热力学场的能量方程(E 氏坐标)

在做了上面的一些说明之后，我们可以由热力学第一定律出发，导出涉及热效应的连续介质热力学场的能量方程。像其他的守恒定律一样，在导出能量方程时我们也可以从有限闭口体系、有限开口体系、无限小闭口体系和无限小开口体系的角度出发来进行，同时可以证明它们所导出的方程是等价的；而且，我们也可以分别导出能量方程在 E 氏坐标和 L 氏坐标中的表达形式。但为了节省篇幅起见，我们仍将主要从有限闭口体系的观点出发，来导出其在 E 氏坐标中的能量方程。

以 r 表示外热源对单位质量介质的热辐射供热率，即所谓的比热辐射供热率；以 $\boldsymbol{h}$ 表示在瞬时构形中所表达的热传导的热流矢量(E 氏热流矢量)，它指向热量传导最快的方向而其大小等于与其垂直的单位面积上的热量传导率，即向面元 $\boldsymbol{n}\mathrm{d}a$ 外侧的热量传导率为 $\boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}a$，则边界为 $a(t)$ 的闭口体系 $v(t)$ 的能量守恒方程的总体形式或积分形式可写为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{v(t)}\rho(k+u)\mathrm{d}v=\int_{v(t)}\rho\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{v}\mathrm{d}v+\oint_{a(t)}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{t}(\boldsymbol{n})\mathrm{d}a+\int_{v(t)}\rho r\mathrm{d}v-\oint_{a(t)}\boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}a \tag{4.1.1}$$

除去量 r 及 $\boldsymbol{h}$ 的意义如前所述以外，式(4.1.1)中其他各量的意义与 3.5 节一样。式(4.1.1)中最后两项分别表示外界对体系的热辐射供热率和热传导供热率，其他各项的意义也如 3.5 节中所述。与 3.5 节中的推导一样，我们有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{v(t)}\rho(k+u)\mathrm{d}v=\int_{v(t)}\rho(\dot{k}+\dot{u})\mathrm{d}v \tag{4.1.2}$$

$$\oint_{a(t)}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{t}(\boldsymbol{n})\mathrm{d}a=\oint_{a(t)}\boldsymbol{v}\cdot(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n})\mathrm{d}a=\int_{v(t)}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\sigma})\cdot\overleftarrow{\nabla}\mathrm{d}v \tag{4.1.3}$$

$$\oint_{a(t)}\boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}a=\int_{v(t)}\boldsymbol{h}\cdot\overleftarrow{\nabla}\mathrm{d}v \tag{4.1.4}$$

其中∇表示在 E 氏坐标中的梯度算子。将式(4.1.2)、式(4.1.3)、式(4.1.4)代入式(4.1.1)，并利用闭口体系 $v(t)$ 的任意性和被积函数的处处连续性，可得

$$\rho(\dot{k}+\dot{u})=\rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{b}+(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\sigma})\cdot\overleftarrow{\nabla}+\rho r-\boldsymbol{h}\cdot\overleftarrow{\nabla} \tag{4.1.5}$$

式(4.1.5)即是单位瞬时体积介质的能量守恒方程的局部形式或微分形式。

在 3.5 节中我们已经证明：上式中右端第二项外面力的功率 $(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\sigma})\cdot\overleftarrow{\nabla}$ 可以分解为不均衡面力 $\boldsymbol{\sigma}\cdot\overleftarrow{\nabla}$ 的刚性移动功率 $\boldsymbol{v}\cdot(\boldsymbol{\sigma}\cdot\overleftarrow{\nabla})$ 和均衡面力 $\boldsymbol{\sigma}$ 的变形功率

$\boldsymbol{\sigma}:\boldsymbol{D}$之和(见式(3.5.15b)),即

$$(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\sigma})\cdot\overleftarrow{\nabla}=\boldsymbol{v}\cdot(\boldsymbol{\sigma}\cdot\overleftarrow{\nabla})+\boldsymbol{\sigma}:\boldsymbol{D} \tag{4.1.6}$$

而外体力和不均衡外面力的刚性移动功率恰等于动能的增加率(见式(3.5.20)):

$$\boldsymbol{v}\cdot[\rho\boldsymbol{b}+(\boldsymbol{\sigma}\cdot\overleftarrow{\nabla})]=\rho\dot{k} \tag{4.1.7}$$

将式(4.1.6)代入式(4.1.5)并利用式(4.1.7),则可得

$$\rho\dot{u}=\boldsymbol{\sigma}:\boldsymbol{D}+\rho r-\mathrm{div}\boldsymbol{h} \tag{4.1.8}$$

这是单位瞬时体积介质能量方程的又一形式,其意义是:介质内能的增加率等于介质的变形功率与供热率之和。前面的推理相当于我们将单位瞬时体积介质的能量守恒方程(4.1.5)式分解成了等价的两个方程(4.1.7)式和(4.1.8)式。式(4.1.8)说明:在考虑热效应的时候,介质的内能不仅包含变形势能(这由第一项 $\boldsymbol{\sigma}:\boldsymbol{D}$ 来表达),同时还包括热效应所引起的与介质热运动有关的额外能量(这由第二项和第三项 $\rho r-\mathrm{div}\boldsymbol{h}$ 来表达)。

如果我们从开口体系的能量守恒定律出发,则容易证明其能量方程的局部形式或微分形式将是

$$\frac{\partial}{\partial t}[\rho(k+u)]=\boldsymbol{v}\cdot\rho\boldsymbol{b}+(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\sigma})\cdot\overleftarrow{\nabla}-[\rho(k+u)\boldsymbol{v}]\cdot\overleftarrow{\nabla}+\rho r-\boldsymbol{h}\cdot\overleftarrow{\nabla} \tag{4.1.5$'$}$$

读者可作为练习推导之。同时,容易证明式(4.1.5)′和式(4.1.5)是等价的,关于此点可参阅3.5节中纯力学情况能量方程(3.5.10)式和(3.5.5)式等价性的说明。

4.1.3 连续介质热力学场的能量方程(L氏坐标)

类似于3.5节中的处理方法,我们可以导出考虑热现象时的L氏坐标中的能量方程。将闭口体系 $v(t)$ 映射到初始构形中,并以 V 和 A 分别表示其体积和外表面。在3.5节中我们曾写出了表示质量守恒和面力守恒的公式(3.5.25)式和(3.5.26)式,即如下二式:

$$\rho\mathrm{d}v=\rho_0\mathrm{d}V \tag{4.1.9}$$

$$\boldsymbol{t}(\boldsymbol{n})\mathrm{d}a=\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}a=\boldsymbol{t}^*(\boldsymbol{N})\mathrm{d}A=\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{N}\mathrm{d}A \tag{4.1.10}$$

如果我们再以如下方式引入所谓的L氏热流矢量 $\boldsymbol{H}$:

$$\boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}a=\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{N}\mathrm{d}A \tag{4.1.11}$$

将式(4.1.9)、式(4.1.10)、式(4.1.11)代入式(4.1.1)之中,则可以将闭口体系 $v(t)$ 的能量守恒公式(4.1.1)式映射到初始构形之中,而写出

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \rho_0(k+u)\mathrm{d}V = \int_V \rho_0 \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{v}\mathrm{d}V + \oint_A \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{N}\mathrm{d}A + \int_V \rho_0 r\mathrm{d}V - \oint_A \boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{N}\mathrm{d}A \tag{4.1.12a}$$

对式(4.1.12a)中的面积分在L氏坐标中利用Guass定理,并注意到体积V和时间无关,则式(4.1.12a)可写为如下的等价形式:

$$\int_V \rho_0(\dot{k}+\dot{u})\mathrm{d}V = \int_V \rho_0 \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{v}\mathrm{d}V + \int_V (\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{S})\cdot\overleftarrow{\nabla}\mathrm{d}A + \int_V \rho_0 r\mathrm{d}V - \int_V \boldsymbol{H}\cdot\overleftarrow{\nabla}\mathrm{d}V \tag{4.1.12b}$$

其中∇表示L氏坐标中的梯度算子。由式(4.1.12)中闭口体系V的任意性和被积函数的处处连续性,则可得出能量方程的局部形式或微分形式如下:

$$\rho_0(\dot{k}+\dot{u}) = \rho_0 \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{v} + (\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{S})\cdot\overleftarrow{\nabla} + \rho_0 r - \boldsymbol{H}\cdot\overleftarrow{\nabla} \tag{4.1.13}$$

式(4.1.13)所表达的是考虑热效应时单位初始体积介质的能量守恒定律,它比纯力学情况下L氏坐标中的能量守恒方程(3.5.29)式多出了右端的最后两项。重复3.5节中式(3.5.29)后的相关说明和推导,我们即可以将式(4.1.13)分解为如下两个等价的形式:

$$\rho_0\dot{k} = (\rho_0\boldsymbol{b}+\boldsymbol{S}\cdot\overleftarrow{\nabla})\cdot\boldsymbol{v} \tag{4.1.14}$$

$$\rho_0\dot{u} = \boldsymbol{S}:\dot{\boldsymbol{F}} + \rho_0 r - \boldsymbol{H}\cdot\overleftarrow{\nabla},\quad \rho_0\dot{u} = \boldsymbol{\Sigma}:\dot{\boldsymbol{E}} + \rho_0 r - \boldsymbol{H}\cdot\overleftarrow{\nabla} \tag{4.1.15}$$

以上我们是以有限闭口体系为例,分别导出了E氏坐标和L氏坐标中的能量方程。当然,我们也可以以有限的开口体系为例来导出能量方程的相应形式,并证明它们与由闭口体系所导出的能量方程的等价性;同样,我们也可以(在直角笛卡尔坐标或正交曲线坐标中)以无限小的微闭口体系或微开口体系为研究对象来导出其能量方程。读者可将这些工作作为练习推导之。

4.2 熵不等式(热力学第二定律)

4.2.1 可逆过程与不可逆过程,热力学第二定律

热力学第一定律规定了热力学过程中能量守恒和转化所遵循的量的法则,它对于任何与热现象有关的过程都是适用的,但它并不涉及对热力学过程在方向性

特征方面的限制和描述,对热力学过程在方向性特征方面进行质的揭示并给出量的表述的则是热力学第二定律。为了揭示热力学过程的方向性特征,人们提出了可逆过程和不可逆过程的概念。我们将热力学体系由一个状态过渡到另一个状态的热力学过程称为可逆过程,如果存在另一个过程可以使体系本身和外界都完全恢复到原状态而不产生其他任何影响的话;相反,如果不管我们用什么方法,都不能使体系本身和外界都完全恢复到原状态的话,则我们称原来的热力学过程为不可逆过程。需要强调说明的是:人们将热力学过程区分为可逆过程和不可逆过程,只是对客观的热力学过程的基本特征所进行的一种抽象,因为严格而言,一切与热现象有关的宏观热力学过程在本质上都是不可逆的,所谓的可逆过程只是人们对客观的不可逆过程在某种理想和极限情况下的近似而已:当一个过程在某种程度上可以被视为进行得无限缓慢以至于可认为系统有足够的时间在每一步都达到均匀的平衡态时,我们即可以将这一过程视为由一系列无限接近的平衡态所组成的所谓"准静态过程"或可逆过程。其中一个最典型的例子就是两个温差为无限小的平衡态体系之间所发生的热传导过程就可以被视为是一个可逆过程,因为它们的温度相等,所以所发生的热量传递可以认为是可逆的。在这里我们引用了普通物理和大多数热力学教科书中所用的术语,把可逆过程视为所谓的"准静态过程",但这很容易引起误解和迷惑,一方面人们可能会认为可逆过程只适用于静态或准静态问题而不适用于动态问题;另一方面这很容易和准静态材料性能实验中的"准静态过程"相混淆,而后者则是因为实验过程的准静态而可作为等温过程从而与快速冲击实验的绝热过程相区别的,它所指的仅仅是等温过程而已,所以与我们前面所定义的可逆过程显然是不同的。为了克服上述关于可逆过程表述的缺点,在这里我们给出可逆过程的另一种表述:当体系本身在某种程度上具有极快的调节能力,从而可以认为在过程的每一步体系都可以在瞬间即达到均匀的平衡状态时,则我们可以将这一过程视为由一系列无限接近的平衡态所组成的所谓"瞬均过程",或可逆过程。如果在更精确的意义上宏观热力学过程的发生是更加激烈和快速的,而相对于这一过程而言体系本身来不及达到瞬态均匀化,则这一过程事实上就是由一系列无限接近的非平衡态所组成的,于是过程即成为不可逆过程。一切宏观热力学过程在本质上都是不可逆过程的事实说明,热力学过程除了应遵循能量守恒和转化定律的量的约束以外,还应具有某种方向性上的特征和限制。我们可以用很多事实来说明这一问题。例如,宏观定向运动的摩擦功可以完全转变为热,但是我们却不能从单一热源提取热量使之完全变为规则运动的机械功而不产生其他影响,或简言之"摩擦生热的过程是不可逆的";又如,热量可以自发地由高温物体传向低温物体,但是却不能自发地由低温物体传向高温物体(除非人们像电冰箱的

电机一样人为地付出额外的功)，或简言之"热传导是不可逆的"；再如，被隔板分割为一半真空一半空气的封闭容器，当隔板被抽出时会发生空气充满整个容器的自由膨胀运动，但是却不可能发生整个容器中的空气自发地收缩到半边容器空间的过程，或简言之"气体的自由膨胀过程是不可逆的"。这样的事例我们还可以举出很多，而且事实上可以举出无穷多，但它们的实质都是反映了宏观热力学过程不可逆性的方向性特征；而且，在热力学中人们还证明了所有宏观热力学过程的不可逆性都是可以互推的因而都是互相等价的，因此，我们可以把任何一个宏观热力学过程的不可逆性表述作为热力学第二定律的一种表述。在热力学中用得最多的就是所谓的开尔芬(Kelvin)说法和克劳修斯(Clausius)说法，它们事实上也就是我们刚刚所讲到的热力学过程不可逆性的前两个例子。

开尔芬说法：不可能从单一热源提取热量使之完全变为有用功而不产生其他影响。这一说法是在人们探讨提高热机效率的过程中总结出来的，它说明了热机总要向另一低温热源废弃部分热量，故开尔芬说法也可以表达为：热效率等于 1 的热机即所谓第二类永动机是不存在的。

克劳修斯说法：热量不可能自发地从低温物体传向高温物体而不产生其他影响。

热力学第二定律所揭示的一切宏观热力学过程都是不可逆的这一事实，从统计力学和微观物质学的角度看，反映了如下的本质：系统内部所发生的过程总是由几率小的状态向几率大的状态进行，由包含微观数目少的状态向包含微观数目多的状态进行，由内部相对地有秩序的状态向更加混乱的状态进行。宏观热力学过程的这一方向性特征说明：我们应该能够找到某一个热力学状态量，由它的值来表征系统的某个状态在不可逆过程中所处的地位和程度，而由它的值的改变来表征不可逆过程所进行的方向，这个宏观状态量就是系统的熵(在统计力学中被称为系统的混乱度)。

4.2.2 克劳修斯(Clausius)不等式和熵

卡诺(Carnot)在提高热机效率的研究工作中提出了一种理想形式的所谓卡诺循环，它是将工作物质循环于一个高温热源和一个低温热源之间的一种循环，由于工作物质在和高温热源及低温热源接触时的过程必是等温过程，而和两个热源都脱离时的过程必是绝热过程，因之整个卡诺循环是由等温膨胀、绝热膨胀、等温压缩、绝热压缩四个过程所组成的。由热力学第二定律出发，人们证明了如下的卡诺定理：

卡诺定理 所有工作于同样的高温热源和低温热源之间的一切可逆卡诺热机的效率都是相同的；所有工作于同样的高温热源和低温热源之间的一切不可逆卡

诺热机的效率都低于相应的可逆卡诺热机的效率。

由于不可逆卡诺热机和可逆卡诺热机的效率分别为 $\eta=1-\dfrac{Q_2}{Q_1}$ 和 $\eta=1-\dfrac{Q_2}{Q_1}=1-\dfrac{T_2}{T_1}$，其中 Q_1 和 Q_2 分别是工作物质从绝对温度为 T_1 的高温热源所得到的热量以及向绝对温度为 T_2 的低温热源所放出的热量，所以卡诺定理可表达为

$$1-\frac{Q_2}{Q_1}\leqslant 1-\frac{T_2}{T_1}$$

或

$$\frac{Q_1}{T_1}-\frac{Q_2}{T_2}\leqslant 0$$

如果我们改变一下记号，分别以 Q_1 和 Q_2 表示工作物质从相应热源所获得的热量的代数值，则上式可写为

$$\frac{Q_1}{T_1}+\frac{Q_2}{T_2}\leqslant 0 \tag{a}$$

由热力学第二定律可以证明：将式(a)推广到体系与任意多个热源依次接触而完成循环的情况也是成立的，即

$$\sum\frac{Q_i}{T_i}\leqslant 0 \tag{b}$$

其中 Q_i 为体系从温度为 T_i 的热源所吸取的热量。当体系与一系列温度 T 连续变化的热源接触并最终完成一个循环时，则我们可以写出式(a)和式(b)在体系经历一般循环情况下的推广形式：

$$\oint\frac{\mathrm{d}Q}{T}\leqslant 0 \tag{c}$$

式(c)连同式(a)和式(b)称为克劳修斯不等式，式中 T 表示热源的绝对温度，$\mathrm{d}Q$ 则表示体系在每一微过程中从热源 T 所吸收的微热，积分号表示体系完成了一个回到原状态的循环。对于过程的每一步体系都可以实现瞬间均匀化的“瞬均过程”而言，即当循环是由一系列无限接近的平衡态所组成的可逆循环时，式(c)中的小于等于号即成为等号。可逆循环中体系的每一个状态都是平衡态，对应状态平面上的一个点，故我们可以用状态平面上的实线来表示可逆过程，如图 4.1 中的实线 c_1 和 c_2 所示，相应地，我们将以状

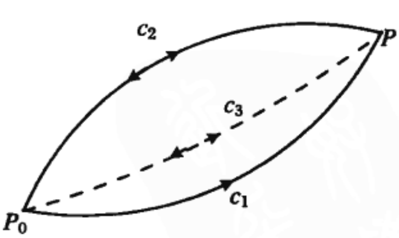


图 4.1　可逆过程和不可逆过程

态平面上的虚线来表示不可逆过程，如图 4.1 中的虚线 c_3所示。

现在我们来考虑体系经历任意一个可逆循环这一极限情况。此时不等式(c)成为等式，即

$$\oint \frac{\mathrm{d}Q}{T} = 0 \tag{d}$$

这说明此闭路积分是与路径无关的，即虽然过程量 dQ 不是全微分，但是$\frac{\mathrm{d}Q}{T}$却必然是某个状态量的全微分。事实上，设 P_0 和 P 分别是体系在可逆循环中的任意两个平衡状态，则式(d)可以写为

$$\int_{P_0\,(c_1)}^{P} \frac{\mathrm{d}Q}{T} + \int_{P\,(c_2)}^{P_0} \frac{\mathrm{d}Q}{T} = \int_{P_0\,(c_1)}^{P} \frac{\mathrm{d}Q}{T} - \int_{P_0\,(c_2)}^{P} \frac{\mathrm{d}Q}{T} = 0$$

即

$$\int_{P_0\,(c_1)}^{P} \frac{\mathrm{d}Q}{T} = \int_{P_0\,(c_2)}^{P} \frac{\mathrm{d}Q}{T} \tag{e}$$

式(e)说明：在可逆过程中，积分$\int_{P_0}^{P} \frac{\mathrm{d}Q}{T}$是与具体路径无关的，它的值完全是由过程的初态和终态所决定的。因此，在相差一个任意常数 S_0 的情况下，我们可以定义一个状态函数 $S(P)$ 如下：

$$S(P) = S_0 + \int_{P_0}^{P} \frac{\mathrm{d}Q}{T}, \quad S_0 = S(P_0) \tag{4.2.1a}$$

$$\mathrm{d}S = \frac{\mathrm{d}Q}{T} \tag{4.2.1b}$$

其中 $S_0 = S(P_0)$表示状态函数 $S(P)$在初态 P_0 的值，它是可以任取的，但这并不影响问题的实质，因为我们所关心的是由一个状态到另一个状态时这个状态函数 $S(P)$的值的改变。我们将式(4.2.1)所定义的状态函数 $S(P)$称为体系的熵(entropy)。由于过程是可逆过程，故式(4.2.1)中的 T(既是热源的温度)也是体系自身的温度。下面我们将看到，可以通过体系熵值的改变来描述过程的方向性和不可逆性特征。

需要强调指出的是：尽管我们是通过可逆过程由式(4.2.1)来定义体系的熵 $S(P)$的，但是，既然熵是体系的一个状态量，它的存在性以及体系由一个平衡态到另一个平衡态所产生的熵值的改变量则是客观确定的，它和所经历的过程是可逆过程还是不可逆过程都是完全无关的。式(4.2.1)只是告诉我们：我们可以通过可逆传热过程来计算体系由一个平衡态到另一个平衡态所产生的熵值的增加量，即我们可以通过一个与体系温度无限接近的热源对之供热 dQ 而按式(4.2.1)算出

体系的熵增 $dS=\frac{dQ}{T}$,因此这里的热源温度 T 也即等于体系的温度;或者简言之,一个温度为 T 的体系从任意的热源获得热量 dQ 时,它的熵增量 dS 将等于热源供热 dQ 除以体系自身温度 T 所得的商。

以上我们通过可逆供热过程给出了一个体系在平衡状态下其熵值的定义和其改变量的计算方法。对于一个处于非平衡状态下的体系,我们可以采用分割的方法将之划分为许多足够小的子体系,以至于每一个子体系都可以被视之为处于均匀的平衡状态之下,于是就可以按前面的方法来定义其每个子体系的熵,而我们将把整个体系的熵定义为所有子体系熵的和,这样我们也就给出了非平衡态体系的熵的定义。按我们在这里的定义方法,体系的熵具有对其全部物质可加的性质。

4.2.3 熵均衡、熵不等式和恒非负产熵——热力学第二定律更清晰的表述

克劳修斯不等式(c)式是反映过程不可逆性的热力学第二定律的直接结果,因此它可以作为热力学第二定律的一种数学表示。但是,它的缺点是并没有和体系的某种状态量建立联系。现在我们将以刚刚所引入的体系状态量熵为基础,来对克劳修斯不等式(c)式的含义进行新的解释。参见图 4.1,设体系由某一个初始平衡状态 P_0 出发经过任意一个过程(不可逆如 c_3或可逆如 c_1)到达某一新的平衡状态 P,然后再经过一个可逆过程(如 c_2)回到原状态 P_0 从而完成一个循环。根据克劳修斯不等式(c)式,我们可以写出:

$$\oint_{P_0PP_0}\frac{dQ}{T}=\int_{P_0}^{P}\frac{dQ}{T}+\int_{P}^{P_0}\frac{dQ}{T}_{(\text{可逆})}=\int_{P_0}^{P}\frac{dQ}{T}-\int_{P_0}^{P}\frac{dQ}{T}_{(\text{可逆})}\leqslant 0$$

即

$$\int_{P_0}^{P}\frac{dQ}{T}\leqslant\int_{P_0}^{P}\frac{dQ}{T}_{(\text{可逆})}\tag{f}$$

根据体系熵的定义(4.2.1)式,我们有

$$\int_{P_0}^{P}\frac{dQ}{T}_{\text{可逆}}=S(P)-S_0$$

故式(f)可写为

$$S(P)-S_0\geqslant\int_{P_0}^{P}\frac{dQ}{T}\tag{4.2.2a}$$

$$dS\geqslant\frac{dQ}{T}\tag{4.2.2b}$$

式(4.2.2)即是由系统的状态量熵所表达的克劳修斯不等式,称之为熵不等式(entropy inequality),它表明:在任意的过程中,系统状态量熵值的增加 dS 都大于

或等于单位热源温度对体系的供热$\frac{\mathrm{d}Q}{T}$，它是对揭示宏观热力学过程不可逆性特征的热力学第二定律的更清晰和更深刻的数学表达式。熵不等式对任何的热力学过程都是成立的，特别说来，对作为不可逆过程理想极限情况的可逆过程而言，不等式(4.2.2)式将退化成为等式(4.2.1)式，于是我们也就得到了由可逆供热过程计算体系熵增的方法。

以上我们是对初态 P_0和终态 P 都是平衡态的情况证明了熵不等式(4.2.2)式，更进一步，很容易说明对初、终态都是非平衡态的情况，熵不等式(4.2.2)式也是成立的。事实上，我们可以将处于非平衡初态 P_0的体系分为足够多无限小的可视为平衡态的子体系，而它们又分别经历所给的过程而成为处于终态 P 中的相应无限小的平衡态子体系，由于对每一对平衡态子体系间的过程熵不等式(4.2.2)式都成立，而整个体系的熵等于其各个子体系熵的和，于是我们便可得出结论：对由非平衡初态 P_0到非平衡终态 P 的任意过程，熵不等式(4.2.2)式也都是成立的。

由式(4.2.1)或式(4.2.2)可见，当过程为可逆过程且 $\mathrm{d}Q=0$ 时，即当过程为可逆绝热过程时，我们将有 $\mathrm{d}S=0$，因此可逆绝热过程也即是等熵过程，连续波在介质中的传播即属于这种情况。而当过程为不可逆的绝热过程时，虽然 $\mathrm{d}Q=0$，但式(4.2.2)将取绝对不等号，于是我们将有 $\mathrm{d}S>0$，即在不可逆绝热过程中体系的熵必然增加，我们将这称之为孤立绝热体系任意自发过程的熵增原理，激烈突变的冲击波在介质中的传播过程即属于这种情况。对体系接受供热 $\mathrm{d}Q\neq 0$ 而非绝热的一般情况，我们将有 $\mathrm{d}S-\frac{\mathrm{d}Q}{T}\geqslant 0$，这个值非负即表明了过程的不可逆性特点，而这个非负值的大小即表明了不可逆过程所进行的程度，即过程的“不可逆程度”。下面我们将引入产熵的概念来进一步阐述这一思想。

由于我们恒有不等式(4.2.2)式，即 $\mathrm{d}S-\frac{\mathrm{d}Q}{T}\geqslant 0$，所以可以将微过程中系统的熵增 $\mathrm{d}S$ 分解为两部分$\mathrm{d}S^{\mathrm{r}}$ 和$\mathrm{d}S^{\mathrm{i}}$，而写出下式：

$$\begin{cases}\mathrm{d}S=\mathrm{d}S^{\mathrm{r}}+\mathrm{d}S^{\mathrm{i}}\\[4pt] \mathrm{d}S^{\mathrm{r}}=\dfrac{\mathrm{d}Q}{T}\\[4pt] \mathrm{d}S^{\mathrm{i}}=\mathrm{d}S-\mathrm{d}S^{\mathrm{r}}=\mathrm{d}S-\dfrac{\mathrm{d}Q}{T}\geqslant 0\end{cases}\tag{4.2.3}$$

我们强调指出：式(4.2.3)中 T 表示供热源的绝对温度而非体系自身的温度。我们称 $\mathrm{d}S$ 为体系的总熵增(total entropy increase)或简称熵增，它表示在微过程中体系状态量熵的总增加量(等于 $\mathrm{d}Q$ 除以体系自身的温度)；$\mathrm{d}S^{\mathrm{r}}=\frac{\mathrm{d}Q}{T}$称为体系的

可逆熵增(reversible entropy increase)或热源 T 对体系的供熵(entropy supply),它的意义是当热源将热量 $\mathrm{d}Q$ 供给与自己的温度 T 相同的介质时,即假设当过程为可逆过程时热量 $\mathrm{d}Q$ 所能引起的介质熵增;$\mathrm{d}S^{\mathrm{i}}$ 称为体系的不可逆熵增(irreversible entropy increase)或产熵(entropy production),它永远是非负的。我们将式(4.2.3)的第一式称为体系的"熵守恒"或更精确地称为"熵均衡"(entropy balance),它表示体系的总熵增等于其热源对它的供熵与体系自身的产熵之和;式(4.2.3)的第二式表示热源对体系的供熵等于分配在单位热源温度上的供热;式(4.2.3)的第三式表明在任意过程中体系的产熵永远非负,称之为熵不等式(entropy inequality),它是热力学第二定律的核心,是过程不可逆性特征本质的体现。下面我们对体系产熵的物理意义给以简单说明。

4.2.4 产熵的物理意义

为了说明产熵的物理意义,设想体系由平衡状态1经一不可逆过程到另一平衡状态2,其间从外界吸收外功 $\mathrm{d}W^*$,吸收外热 $\mathrm{d}Q$,如图4.2中虚线所示。想象另外一个由状态1到状态2的可逆过程,其间吸收外功 $\mathrm{d}W_0^*$,吸收外热 $\mathrm{d}Q_0=T\mathrm{d}S$,其中 T 为体系温度,如图4.2中实线所示。如以 $\mathrm{d}U$ 和 $\mathrm{d}K$ 分别表示体系由状态1到状态2的内能增量和动能增量(作为状态量它们与过程无关,只由初终态所决定),则由热力学第一定律,我们将有

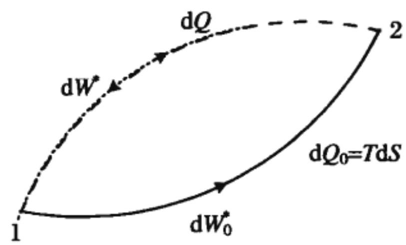


图4.2 产熵的物理意义解释

$$\mathrm{d}K+\mathrm{d}U=\mathrm{d}W^*+\mathrm{d}Q=\mathrm{d}W_0^*+T\mathrm{d}S$$

即

$$\mathrm{d}S=\frac{\mathrm{d}Q}{T}+\frac{\mathrm{d}W^*-\mathrm{d}W_0^*}{T} \tag{4.2.4}$$

将式(4.2.4)代入式(4.2.3),有

$$\mathrm{d}S^{\mathrm{i}}=\frac{\mathrm{d}W^*-\mathrm{d}W_0^*}{T}\geqslant 0,\quad \mathrm{d}W^*-\mathrm{d}W_0^*=T\mathrm{d}S^{\mathrm{i}}\geqslant 0 \tag{4.2.5}$$

式(4.2.5)即给出了对产熵 $\mathrm{d}S^{\mathrm{i}}$ 或 $\mathrm{d}W^*-\mathrm{d}W_0^*=T\mathrm{d}S^{\mathrm{i}}$ 的物理解释:量 $\mathrm{d}W^*-\mathrm{d}W_0^*=T\mathrm{d}S^{\mathrm{i}}$ 表示体系从状态1经不可逆过程到状态2,再经可逆过程回到状态1的一个循环中所吸收的总外功;而由于状态量内能和动能都回到原值,故由能量守恒原理知此外功必然转化为此循环中体系对外的热输出,即 $\mathrm{d}W^*-\mathrm{d}W_0^*=$

$TdS^i \geqslant 0$ 等于此循环中由系统本身存在的某些内耗散机制所引起的不可逆内耗散生热。我们也可以对之给出另外一种等价的解释：$dW^* - dW_0^* = TdS^i$ 表示体系从状态 1 经不可逆过程到状态 2 所接受的外功 dW^* 比由状态 1 经可逆过程到状态 2 所接受的外功 dW_0^* 所需要多付出的功，这也同样表明了系统在不可逆过程中必然存在某些额外的内部能量耗散机制。这些内部能量耗散机制通常是与介质的不可逆变形（如引起不可逆塑性变形的位错运动）、与速度梯度有关的黏性内摩擦机制或者与温度梯度有关的热阻效应等相联系的。

这里我们对初、终态都是平衡态的过程中的产熵非负给出了解释，说明了它（乘以温度 T）是不可逆过程中体系的内耗散机制所产生的体系内部能量耗散。对初、终态都是非平衡态的情况，可以把初、终态下的体系各自分解为相互对应的无穷多对极小的平衡态子体系，于是实际的过程就是这无穷多对平衡态子体系间的过程，在这一过程中每一对子体系间的非负产熵导致相应子体系的能量耗散，而整个过程中体系的非负产熵等于每对子体系产熵的和，并导致整个体系内部能量的耗散。

4.3 场热力学的熵均衡和熵不等式

4.3.1 场热力学的熵均衡和熵不等式(E 氏坐标)

如以 S、S^r 和 S^i 分别表示闭口体系的总熵、外界对体系的供熵和体系本身的产熵，而以 $\dot{S}$，$\dot{S}^r$ 和 $\dot{S}^i$ 分别表示体系的总熵增率、外界对体系的供熵率和体系本身的产熵率，则闭口体系总体形式的熵均衡和熵不等式将为

$$\dot{S} = \dot{S}^r + \dot{S}^i, \quad \dot{S}^i \geqslant 0 \tag{4.3.1a}$$

而局部形式的熵均衡和熵不等式即为

$$\dot{s} = \dot{s}^r + \dot{s}^i, \quad \dot{s}^i \geqslant 0 \tag{4.3.1b}$$

其中 s、s^r 和 s^i 分别表示单位质量介质的熵（即比熵）、对单位质量介质的供熵（比供熵）和单位质量介质的产熵（比产熵），而以 $\dot{s}$、$\dot{s}^r$ 和 $\dot{s}^i$ 分别表示对应单位质量介质的总熵增率、供熵率和产熵率。在式(4.3.1)中，熵 S 和比熵 s 都是状态量，熵增率 $\dot{S}$ 和比熵增率 $\dot{s}$ 也分别是相应量的随体导数，它们的含义是非常明确的；但是需

要说明的是供熵率 $\dot{S}^{\mathrm{r}}$ 和产熵率 $\dot{S}^{\mathrm{i}}$ 以及比供熵率 $\dot{s}^{\mathrm{r}}$ 和比产熵率 $\dot{s}^{\mathrm{i}}$ 则只是表示相应过程量在极限意义下随时间的变化率,即无限小过程量增量与无限小时间间隔之比。式(4.3.1)只是在形式上给出了熵均衡和熵不等式的数学形式,为了更清楚地揭示其本质,我们还需要写出其更具体的数学形式,即写出供熵以及产熵的具体形式。现在我们就来完成这一任务。

考虑到体系内温度等的不均匀性,体系总的供熵率应理解为外界对其各部分的供熵率之和,而这又是由各部分的辐射热源和热传导热流所提供的,因此体系总的供熵率 $\dot{S}^{\mathrm{r}}$ 为

$$
\begin{aligned}
\dot{S}^{\mathrm{r}} &= \int_{v} \rho \dot{s}^{\mathrm{r}} \mathrm{d}v = \int_{v} \frac{\rho r}{T} \mathrm{d}v - \oint_{a} \frac{\boldsymbol{h} \cdot \boldsymbol{n}}{T} \mathrm{d}a \\
&= \int_{v} \frac{\rho r}{T} \mathrm{d}v - \int_{v} \left(\frac{\boldsymbol{h}}{T}\right) \cdot \overleftarrow{\nabla} \mathrm{d}v = \int_{v} \left[\frac{\rho r}{T} - \mathrm{div}\left(\frac{\boldsymbol{h}}{T}\right)\right] \mathrm{d}v
\end{aligned} \tag{4.3.2}
$$

其中,ρ、r 和 $\boldsymbol{h}$ 分别表示介质的瞬时质量密度、对单位质量介质的热辐射供热率和 E 氏坐标中的热流矢量。在上式中我们利用了 Guass 定理,而∇ 表示在 E 氏坐标中的梯度算子。由式(4.3.2)我们即可得到对单位瞬时体积介质的供熵率为

$$
\rho \dot{s}^{\mathrm{r}} = \frac{\rho r}{T} - \mathrm{div}\left(\frac{\boldsymbol{h}}{T}\right) \tag{4.3.3a}
$$

由于

$$
\mathrm{div}\left(\frac{\boldsymbol{h}}{T}\right) = \left(\frac{\boldsymbol{h}}{T}\right) \cdot \overleftarrow{\nabla} = \frac{\boldsymbol{h} \cdot \overleftarrow{\nabla}}{T} + \boldsymbol{h} \cdot \left(\frac{1}{T}\right) \overleftarrow{\nabla} = \frac{\mathrm{div}\boldsymbol{h}}{T} - \frac{1}{T^2} \boldsymbol{h} \cdot \boldsymbol{g} \tag{4.3.4a}
$$

其中

$$
\boldsymbol{g} \equiv T \overleftarrow{\nabla} = \overrightarrow{\nabla} T = \mathrm{grad} T \tag{4.3.4b}
$$

表示温度 T 的 E 氏空间梯度,于是式(4.3.3a)也可以写为

$$
\rho \dot{s}^{\mathrm{r}} = \frac{\rho r - \mathrm{div}\boldsymbol{h}}{T} + \frac{1}{T^2} \boldsymbol{h} \cdot \boldsymbol{g} \tag{4.3.3b}
$$

分别将供熵率的表达式(4.3.3a)式和(4.3.3b)式代入熵均衡和熵不等式(4.3.1b)式之中,我们即可分别得到熵不等式的如下两种等价的形式:

$$
\rho \dot{s}^{\mathrm{i}} = \rho \dot{s} - \frac{\rho r}{T} + \mathrm{div}\left(\frac{\boldsymbol{h}}{T}\right) \geqslant 0 \tag{4.3.5}
$$

$$
\rho \dot{s}^{\mathrm{i}} = \left[\rho \dot{s} - \frac{\rho r - \mathrm{div}\boldsymbol{h}}{T}\right] - \frac{1}{T^2} \boldsymbol{h} \cdot \boldsymbol{g} \geqslant 0 \tag{4.3.6}
$$

式(4.3.5)和式(4.3.6)在连续介质的场热力学中常称之为克劳修斯-杜赫姆(Clausius-Duhem)不等式。式(4.3.6)说明产熵率由两部分组成,第一部分可记为

$$\rho\,\dot{s}^{l} \equiv \rho\,\dot{s} - \frac{\rho r - \operatorname{div}\boldsymbol{h}}{T} \tag{4.3.7}$$

它只与热流矢量 $\boldsymbol{h}$ 和当地温度 T 有关,故称之为单位瞬时体积介质的局部产熵(local entropy production)率;第二部分可记为

$$\rho\,\dot{s}^{c} \equiv -\frac{1}{T^{2}}\boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{g} \tag{4.3.8}$$

它不但与热流矢量 $\boldsymbol{h}$ 和当地温度 T 有关,而且还与引起不可逆热传导的温度梯度 $\boldsymbol{g}$ 有关,故称之为热传导产熵(heat conduction entropy production)率。单纯从数学推理上看,似乎我们只能由熵不等式得出介质的总产熵率(局部产熵率和热传导产熵率之和)为非负的结论,即

$$\rho\,\dot{s}^{l} + \rho\,\dot{s}^{c} \geqslant 0$$

但是,从更深刻的物理机制出发,我们事实上是可以得出它们中的每一项都必为非负的结论的。事实上,从不可逆过程产生机理的角度看问题,我们可认为介质中存在各种各样的内耗散机制从而导致过程的不可逆性,而且这些内耗散机制是各自相互独立的,因此当只有某种内耗散机制发生作用而其他内耗散机制都不发生作用时,我们即可得出该种内耗散机制所引起产熵率必为非负的结论。所以,我们要求每一种内耗散机制的产熵率都为非负在物理上自然就是合理的。具体到现在的情况,我们即可以要求介质的局部产熵率 $\rho\,\dot{s}^{l}$ 和热传导产熵率 $\rho\,\dot{s}^{c}$ 都各自为非负的,即

$$\rho\,\dot{s}^{l} \equiv \rho\,\dot{s} - \frac{\rho r - \operatorname{div}\boldsymbol{h}}{T} \geqslant 0 \tag{4.3.7$'$}$$

$$\rho\,\dot{s}^{c} \equiv -\frac{1}{T^{2}}\boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{g} \geqslant 0 \tag{4.3.8$'$}$$

以热传导产熵率为例,热流矢量 $\boldsymbol{h}$ 向单位法矢量为 $\boldsymbol{n}$ 的面元 $\boldsymbol{n}\mathrm{d}a$ 方向所传递的热量为 $\mathrm{d}Q = \boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}a$,当采用线性的 Fourier 热传导定律时

$$\mathrm{d}Q = \boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}a = -\beta\frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}a = -\beta\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}a$$

其中 $\beta>0$ 是介质的热传导系数,故有

$$\boldsymbol{h} = -\beta\boldsymbol{g} \tag{4.3.9}$$

$$\rho\,\dot{s}^{c} \equiv -\frac{1}{T^{2}}\boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{g} = \frac{\beta}{T^{2}}\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{g} \geqslant 0 \tag{4.3.10}$$

所以热传导系数 β 非负以及热流矢量指向温度梯度相反的方向即是热传导不可逆性的体现。

与介质中每一种内耗散机制所引起的产熵率相对应，人们常常将产熵率乘以温度 T 而引入另外一个物理量，称之为（单位质量介质的）内耗散（internal dissipation）：

$$\delta \equiv T\dot{s}^{i},\quad \delta^{l} = T\dot{s}^{l},\quad \delta^{c} = T\dot{s}^{c} \tag{4.3.11}$$

这里，δ、δ^{l} 和 δ^{c} 分别称为单位质量介质的总内耗散、局部内耗散和热传导内耗散，它们具有功率密度（或热量率密度）的量纲，即单位质量介质在单位时间内的耗功。于是，将产熵率非负的熵不等式乘以温度 T 即可写出内耗散非负的内耗散不等式：

$$\rho\delta = \rho\delta^{l} + \rho\delta^{c} \geqslant 0,\quad \rho\delta^{l} \geqslant 0,\quad \rho\delta^{c} \geqslant 0$$

下面，我们来把熵不等式写成由内能或自由能等所谓的热力学势所表达的不等式形式，这些式子在第5章本构理论中将会用到，可以发现，热力学第二定律的熵不等式会对本构方程的形式加上很强的限制（见5.3节中的许可性原理）。利用由比内能 u 所表达的能量均衡方程（4.1节中的式(4.1.8)）：

$$\rho\dot{u} = \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{D} + \rho r - \mathrm{div}\boldsymbol{h}$$

解出 $\rho r - \mathrm{div}\boldsymbol{h}$，然后将之代入熵不等式(4.3.6)式中并乘以温度 T，我们即可得到：

$$\rho\delta = \rho T\dot{s}^{i} = \rho(T\dot{s} - \dot{u}) + \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{D} - \frac{1}{T}\boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{g} \geqslant 0 \tag{4.3.12}$$

或引入介质的比自由能 ψ：

$$\psi = u - Ts \tag{4.3.13}$$

则可将由比内能 u 所表达的内耗散不等式(4.3.12)式改写为由比自由能 ψ 所表达的内耗散不等式：

$$\rho\delta = \rho T\dot{s}^{i} = -\rho(\dot{\psi} + \dot{T}s) + \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{D} - \frac{1}{T}\boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{g} \geqslant 0 \tag{4.3.14}$$

式(4.3.12)和式(4.3.14)分别是由比内能 u 和比自由能 ψ 所表达的熵不等式，在第5章和第6章中导出热力学势的微分关系时有重要的应用。

4.3.2 局部内耗散的物理意义——变形功内耗散

由比内能 u 所表达的单位体积介质的能量方程为

$$\rho\dot{u} = \rho\dot{w} + \rho r - \mathrm{div}\boldsymbol{h} \tag{4.3.15a}$$

其中，$\rho\dot{w} = \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{D}$ 表示单位瞬时体积介质的变形功率。能量方程(4.3.15a)式适

合于任何的过程，包括可逆过程和不可逆过程。对于设想的可逆过程，(4.3.15a)式成为

$$\rho\,\dot{u} = \rho\,\dot{w}^0 + \rho r^0 - \operatorname{div}\boldsymbol{h}^0 \tag{4.3.15b}$$

其中$\rho\,\dot{w}^0$、ρr^0 和 $-\operatorname{div}\boldsymbol{h}^0$ 分别是单位瞬时体积介质的可逆变形功率、可逆的热辐射供热率和可逆的热传导供热率。对可逆过程，其产熵率为零而熵增率即等于供熵率，故

$$\rho\,\dot{s} = \frac{\rho r^0}{T} - \operatorname{div}\left(\frac{\boldsymbol{h}^0}{T}\right) = \frac{\rho r^0}{T} - \frac{\operatorname{div}\boldsymbol{h}^0}{T} + \frac{\boldsymbol{h}^0\cdot\boldsymbol{g}^0}{T^2}$$

$$= \frac{\rho r^0}{T} - \frac{\operatorname{div}\boldsymbol{h}^0}{T} \quad (\text{对可逆过程}\boldsymbol{g}^0 = \boldsymbol{0})$$

于是，在先后利用(4.3.15b)式和(4.3.15a)式之后，我们即有

$$\rho\,\dot{s} = \frac{\rho r^0}{T} - \frac{\operatorname{div}\boldsymbol{h}^0}{T} = \frac{\rho\,\dot{u}}{T} - \frac{\rho\,\dot{w}^0}{T} = \frac{\rho r}{T} - \frac{\operatorname{div}\boldsymbol{h}}{T} + \frac{\rho(\dot{w} - \dot{w}^0)}{T} \tag{4.3.16a}$$

或

$$\rho\,\dot{s} - \frac{\rho r}{T} + \frac{\operatorname{div}\boldsymbol{h}}{T} = \frac{\rho(\dot{w} - \dot{w}^0)}{T} \tag{4.3.16b}$$

而式(4.3.16b)的左端恰恰即是式(4.3.7)所定义的单位瞬时体积介质的局部产熵率$\rho\,\dot{s}^{\mathrm{l}}$，所以，局部产熵率即是由介质不可逆变形引起的变形功产熵率(或称机械产熵率)。如将式(4.3.16b)两端同乘以温度 T，即表明局部内耗散即是变形功内耗散，记之为 δ^{w}：

$$\rho\delta^{\mathrm{l}} = \rho(\dot{w} - \dot{w}^0) = \rho\delta^{\mathrm{w}} \tag{4.3.17}$$

4.3.3 场热力学的熵均衡和熵不等式(L 氏坐标)

如果我们将闭口体系供熵率的方程(4.3.2)式映射到初始构形之中，则有

$$\dot{S}^{\mathrm{r}} = \int_V \rho_0\,\dot{s}^{\mathrm{r}}\mathrm{d}V = \int_V \frac{\rho_0 r}{T}\mathrm{d}V - \oint_A \frac{\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{N}}{T}\mathrm{d}A = \int_V \frac{\rho_0 r}{T}\mathrm{d}V - \int_V \left(\frac{\boldsymbol{H}}{T}\right)\cdot\overleftarrow{\nabla}\mathrm{d}V$$

$$= \int_V \left[\frac{\rho_0 r}{T} - \mathrm{DIV}\left(\frac{\boldsymbol{H}}{T}\right)\right]\mathrm{d}V \tag{4.3.18}$$

其中 ρ_0、$\boldsymbol{N}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 分别是介质的初始质量密度、在初始构形中的面元 $\mathrm{d}A$ 的单位法矢量和通过此面元的 L 氏热流矢量，∇ 为 L 氏坐标中的梯度算子，DIV 表示在 L 氏坐标中的散度。于是，我们可以得到对单位初始体积介质的供热率为

$$\rho_0\dot{s}^{\mathrm{r}} = \frac{\rho_0 r}{T} - \mathrm{DIV}\left(\frac{\boldsymbol{H}}{T}\right) \tag{4.3.19a}$$

类似于前面 E 氏坐标中的处理方法，可以写出(4.3.19a)的另一等价形式：

$$\rho_0 \dot{s}^{\mathrm{r}} = \frac{\rho_0 r - \mathrm{DIV}\boldsymbol{H}}{T} + \frac{1}{T^2}\boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{G} \tag{4.3.19b}$$

其中

$$\boldsymbol{G} \equiv T \overleftarrow{\nabla} = \overrightarrow{\nabla} T = \mathrm{GRAD}T \tag{4.3.20}$$

表示温度的 L 氏空间梯度。于是，我们可分别得到 L 氏坐标中 Clausius-Duhem 熵不等式的如下两种等价的形式：

$$\rho_0 \dot{s}^{\mathrm{i}} = \rho_0 \dot{s} - \frac{\rho_0 r}{T} + \mathrm{DIV}\left(\frac{\boldsymbol{H}}{T}\right) \geqslant 0 \tag{4.3.21}$$

$$\rho_0 \dot{s}^{\mathrm{i}} = \left[\rho_0 \dot{s} - \frac{\rho_0 r - \mathrm{DIV}\boldsymbol{H}}{T}\right] - \frac{1}{T^2}\boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{G} \geqslant 0 \tag{4.3.22}$$

它们都表示单位初始体积介质产熵率的非负。相应地，我们可以写出单位初始体积介质的局部产熵率和热传导产熵率：

$$\rho_0 \dot{s}^{\mathrm{l}} \equiv \rho_0 \dot{s} - \frac{\rho_0 r - \mathrm{DIV}\boldsymbol{H}}{T} \tag{4.3.23}$$

$$\rho_0 \dot{s}^{\mathrm{c}} \equiv - \frac{1}{T^2}\boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{G} \tag{4.3.24}$$

利用 L 氏坐标中单位初始体积介质的能量均衡方程(4.1 节中的式(4.1.15))：

$$\rho_0 \dot{u} = \boldsymbol{S} : \dot{\boldsymbol{F}} + \rho_0 r - \mathrm{DIV}\boldsymbol{H} = \boldsymbol{\Sigma} : \dot{\boldsymbol{E}} + \rho_0 r - \mathrm{DIV}\boldsymbol{H}$$

解出 $\rho_0 r - \mathrm{DIV}\boldsymbol{H}$ 代入熵不等式(4.3.22)式并乘以 T，我们即可得到 L 氏坐标中由比内能 u 所表达的内耗散不等式如下：

$$\rho_0 \delta = \rho_0 T \dot{s}^{\mathrm{i}} = \rho_0 (T\dot{s} - \dot{u}) + \boldsymbol{\Sigma} : \dot{\boldsymbol{E}} - \frac{1}{T}\boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{G} \geqslant 0 \tag{4.3.25}$$

它所表达的是单位初始体积介质的内耗散非负。而由比自由能 ψ 所表达的内耗散不等式则为

$$\rho_0 \delta = \rho_0 T \dot{s}^{\mathrm{i}} = - \rho_0 (\dot{\psi} + \dot{T} s) + \boldsymbol{\Sigma} : \dot{\boldsymbol{E}} - \frac{1}{T}\boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{G} \geqslant 0 \tag{4.3.26}$$

当然，我们也可以把以上公式中的 $\boldsymbol{\Sigma} : \dot{\boldsymbol{E}}$ 改为 $\boldsymbol{S} : \dot{\boldsymbol{F}}$。

4.4 三维固体中冲击波的突跃条件

4.4.1 引言

在第 2 章、第 3 章和第 4 章的各节中，我们重点处理了在连续介质中的主要物理量(如应力、应变和质点速度等)处处连续分布时各主要力学定律的数学表达形式，这些定律主要包括质量守恒、动量守恒、动量矩守恒和能量守恒定律。在工程实际问题中，特别是在涉及爆炸与冲击工程的实际问题中，人们还常常遇到介质的应力和质点速度在极小的空间范围内即会发生剧烈变化的一类问题，作为一种数学上的理想化处理，人们常常将这种应力和质点速度发生急剧变化的极窄区域简化为一种厚度为零的曲面，于是我们便遇到了一类特殊的所谓"奇异面"的问题，在这些"奇异面"之内，介质的应力和质点速度虽然是连续分布的，但是当我们从奇异面的一侧跨至其另一侧时，介质的应力和质点速度却发生了间断或突跃性的变化，这就是力学中的所谓冲击波(简称激波，shock wave)的问题。本节中我们就来简要介绍冲击波传播的 E 氏描述和 L 氏描述的问题，特别是冲击波突跃条件的 E 氏描述和 L 氏描述的问题，而这些突跃条件也就是力学守恒定律在无限薄的冲击波阵面上的表现形式。

4.4.2 运动学关系

对三维固体中应力波的传播，有 Lagrange 描述(L 氏描述或物质描述)和 Euler 描述(E 氏描述或空间描述)两种方法，前者给出时间 t 和波阵面在初始构形(L 氏构形)中的笛卡尔坐标 $\boldsymbol{X}$ 间的函数关系，后者则给出时间 t 和波阵面在瞬时构形(E 氏构形)中的笛卡尔坐标 $\boldsymbol{x}$ 间的函数关系：

$$t = \tau(\boldsymbol{X}), \quad t = \hat{\tau}(\boldsymbol{x}) \tag{4.4.1}$$

以 L 氏描述为例，当我们站在波阵面上沿任何一条传播射线 $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}(t)$ 前进时，相应的 L 氏波速 $\boldsymbol{U}(t)$ 可由函数 $\boldsymbol{X}(t)$ 对 t 求导得到：

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}(t), \quad \boldsymbol{U} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}(t)}{\mathrm{d}t} \tag{4.4.2}$$

而将式(4.4.1)代入式(4.4.2)并对 t 求导，即可得

$$1 = \tau_{,I}\frac{\mathrm{d}X_I}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial\tau}{\partial \boldsymbol{X}}\cdot\boldsymbol{U} \tag{4.4.3}$$

(以后大小写指标分别表示 L 氏和 E 氏坐标指标。)其中第一式采用了张量指标记法中的约定求和法，第二式中的"·"则是张量直接记法中的一次点积。如以 $\boldsymbol{N}$ 表示 L 氏波阵面的单位外法矢，则必有

$$\tau_{,I} = kN_I,\quad \frac{\partial\tau}{\partial\boldsymbol{X}} = k\boldsymbol{N} \tag{4.4.4}$$

其中 k 是待定因子。将式(4.4.4)代入式(4.4.3)，即可得

$$1 = k\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{U}\equiv kU_N,\quad k = \frac{1}{U_N},\quad U_N = \boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{N} \tag{4.4.5}$$

其中 $U_N\equiv\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{N}$ 为 L 氏法向波速。显然，尽管沿不同的射线可得不同的 L 氏波速 $\boldsymbol{U}$，但 L 氏法向波速 U_N 则是唯一确定的。由式(4.4.4)和式(4.4.5)，我们有

$$\frac{\partial\tau}{\partial\boldsymbol{X}} = \frac{\boldsymbol{N}}{U_N},\quad \frac{\partial\tau}{\partial X_I} = \frac{N_I}{U_N} \tag{4.4.6}$$

类似地，当采用波阵面的 E 氏描述时，可有

$$\frac{\partial\hat{\tau}}{\partial\boldsymbol{x}} = \frac{\boldsymbol{n}}{V_n},\quad \frac{\partial\hat{\tau}}{\partial x_i} = \frac{n_i}{V_n} \tag{4.4.6$'$}$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 为 E 氏波阵面的单位外法矢，$V_n = \boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n}$ 为 E 氏法向波速，而 $\boldsymbol{V} = \mathrm{d}\boldsymbol{x}(t)/\mathrm{d}t$ 则是沿任一射线 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t)$ 的 E 氏波速。由连续介质力学中 L 氏构形面元和 E 氏构形面元之间的关系：

$$\mathrm{d}\boldsymbol{a} = \frac{\rho_0}{\rho}\mathrm{d}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{F}^{-1},\quad \mathrm{d}\boldsymbol{A} = \frac{\rho}{\rho_0}\mathrm{d}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{F}$$

其中 ρ_0 和 ρ 分别为初始和瞬时质量密度，则易得

$$\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{F}^{-1}}{|\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{F}^{-1}|},\quad \boldsymbol{N} = \frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{F}}{|\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{F}|},\quad |\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{F}| = \frac{1}{|\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{F}^{-1}|} \tag{4.4.7}$$

其中 $\boldsymbol{F} = \partial\boldsymbol{x}/\partial\boldsymbol{X}$ 为变形梯度张量。

如果介质的运动规律为 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{X}, t)$，则可得 L 氏阵面和 E 氏阵面间的转换关系 $\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{X}(t), t)$，对 t 求导即可得出 L 氏波速和 E 氏波速间的关系如下：

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{U},\quad \boldsymbol{V}^* \equiv \boldsymbol{V} - \boldsymbol{v} = \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{U} \tag{4.4.8}$$

其中 $\boldsymbol{v}$ 为介质质点速度，$\boldsymbol{V}^*\equiv\boldsymbol{V}-\boldsymbol{v}$ 为波阵面对介质的相对速度即局部波速。由式(4.4.8)之两端点乘以 $\boldsymbol{n}$，并利用式(4.4.7)，即可得出 E 氏法向波速和 L 氏法向波速的关系如下：

$$\begin{cases} V_n - v_n \equiv V_n^* = \dfrac{U_N}{|\boldsymbol{N} \cdot \boldsymbol{F}^{-1}|} = U_N |\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{F}| \\ U_N = \dfrac{V_n^*}{|\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{F}|} = V_n^* |\boldsymbol{N} \cdot \boldsymbol{F}^{-1}| \end{cases} \tag{4.4.9}$$

4.4.3 广义开口体系和冲击波突跃条件的 E 氏表述

任何一个封闭网表面 $a(t)$(E 氏表述)所包含的空间体系 $v(t)$,当其表面有介质出入时都是一个广义开口体系。这里加“广义”二字,是为了区别于流体力学中常用的静止控制体那种特殊的开口体系。如果以 $\boldsymbol{V}$ 表示网表面某点沿某方向的 E 氏射线网速,则显然当网上各点皆有 $\boldsymbol{V}=\boldsymbol{v}$ 时,体系即成为与外界无质量交换的闭口体系;当 $\boldsymbol{V}=\boldsymbol{0}$ 时,体系即成为常用的静止控制体;而在一般情况下,只要在部分网面上 $\boldsymbol{V}^* \equiv \boldsymbol{V}-\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$,体系即为一般情况下的广义开口体系。体系和外界的质量交换取决于网对介质的相对法向网速 V_n^*,而单位时间内通过网面元 $\mathrm{d}a$ 流入体系的质量流、动量流和能量流将分别是(参见 2.8 节中的式(2.8.20))

$$\rho V_n^* \mathrm{d}a, \quad \rho V_n^* \boldsymbol{v} \mathrm{d}a, \quad \rho V_n^* (e + \frac{v^2}{2}) \mathrm{d}a \tag{4.4.10}$$

其中 e 和 $v^2/2$ 分别为介质的比内能(即单位质量介质的内能)和比动能。而广义开口体系的质量、动量和能量守恒定律可以分别表述为:

开口体系的质量增加率 = 质量纯流入率

开口体系的动量增加率 = 动量纯流入率 + 外力

开口体系的能量增加率 = 能量纯流入率 + 外力功率 + 外供热率

其数学形式分别为

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\displaystyle\int_{v(t)} \rho \mathrm{d}v = \oint_{a(t)} \rho V_n^* \mathrm{d}a \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\displaystyle\int_{v(t)} \rho \boldsymbol{v} \mathrm{d}v = \oint_{a(t)} \rho V_n^* \boldsymbol{v} \mathrm{d}a + \oint_{a(t)} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}a + \int_{v(t)} \rho \boldsymbol{b} \mathrm{d}v \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\displaystyle\int_{v(t)} \rho \left(e + \frac{v^2}{2}\right) \mathrm{d}v = \oint_{a(t)} \rho V_n^* \left(e + \frac{v^2}{2}\right) \mathrm{d}a + \oint_{a(t)} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}a \\ \qquad + \displaystyle\int_{v(t)} \boldsymbol{v} \cdot \rho \boldsymbol{b} \mathrm{d}v + \int_{v(t)} \rho \gamma \mathrm{d}v - \oint_{a(t)} \boldsymbol{h} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}a \end{cases} \tag{4.4.11}$$

其中,$\boldsymbol{\sigma}$ 为 Cauchy 应力张量,$\boldsymbol{b}$ 为比体积力,γ 为热辐射比供热率,$\boldsymbol{h}$ 为 E 氏热流矢量,而 $\mathrm{d}(\cdot)/\mathrm{d}t$ 表示体系内相应量的时变率。式(4.4.11)适用于任何开口体系,特别当取其为一个有限面积为 S 并且附着在冲击波阵面上的无限薄的薄层时,

V、V_n 和 V_n^* 即分别成为冲击波的 E 氏射线波速、法向波速和相对法向波速，而此时我们有 $a = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + S^+ + S^-$，见图 4.3。

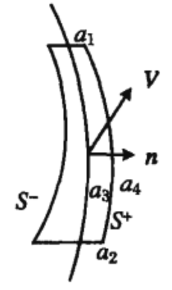


图 4.3　波阵面上的薄层开口体系

由于 a_1、a_2、a_3、a_4和薄层体积 v 都与薄层厚度 δ 成比例皆为一阶小量，只有 $S^+ = S^- = S$ 为任意有限的量，故当薄层厚度 δ 趋于 0 的情况下，将有

$$\int_v (\cdot)\mathrm{d}v \to 0, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_v (\cdot)\mathrm{d}v \to 0, \quad \oint_{a_1+a_2+a_3+a_4} (\cdot)\mathrm{d}a \to 0$$

而式(4.4.11)的 3 式将分别给出

$$\begin{cases} 0 = \int_{S^+ + S^-} \rho V_n^* \mathrm{d}a, \\ \mathbf{0} = \int_{S^+ + S^-} \{\rho V_n^* \boldsymbol{v} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n}\} \mathrm{d}a \\ 0 = \int_{S^+ + S^-} \left\{\rho V_n^* \left(e + \frac{v^2}{2}\right) + \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n} - \boldsymbol{h} \cdot \boldsymbol{n}\right\} \mathrm{d}a \end{cases} \tag{4.4.12}$$

利用 $S^+ = S^- = S$ 的任意性，并注意作为开口体系 v 外表面的一部分，冲击波内外表面 S^- 和 S^+ 的外法线方向分别与冲击波前进的外法向 $\boldsymbol{n}$ 反向和同向，则由式(4.4.12)的 3 式可分别得到：

$$[\rho V_n^*] = 0 \quad (\text{质量守恒}) \tag{4.4.13}$$

$$[\rho V_n^* \boldsymbol{v} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n}] = \mathbf{0} \quad (\text{动量守恒}) \tag{4.4.14}$$

$$\left[\rho V_n^* \left(e + \frac{v^2}{2}\right) + \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n} - \boldsymbol{h} \cdot \boldsymbol{n}\right] = 0 \quad (\text{能量守恒}) \tag{4.4.15}$$

其中

$$[f] \equiv f^- - f^+ \tag{4.4.16}$$

表示任一物理量 f 由冲击波紧前方跨跃到紧后方的突跃量，即由量 f 来衡量的冲击波的强度。

式(4.4.13)、式(4.4.14)和式(4.4.15) 可简单地表述为：当跨过冲击波阵面时，质量流ρV_n^*、广义动量流$\rho V_n^* \boldsymbol{v} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n}$ 和广义能量流$\rho V_n^* (e + v^2/2) + \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n} - \boldsymbol{h} \cdot \boldsymbol{n}$ 都保持连续。注意，广义动量流在动量流中加入了波阵面上的应力矢量，而广义能量流则在能量流中加入了热传导供热率和波阵面上应力矢量的功率。当考虑到冲击波效应极快而不计热传导效应，即 $-\boldsymbol{h} \cdot \boldsymbol{n} = 0$ 时，即得常用的绝热冲击波的突跃条件。

同时我们指出：当把单位面积的冲击波阵面单位时间内所扫过的物质量

$(\rho V_n^*)^- = (\rho V_n^*)^+$ 作为一个闭口体系考虑时，则式(4.4.13)、式(4.4.14)、式(4.4.15)也即是这个闭口体系质量守恒、动量守恒、能量守恒的表现形式：

$$(\rho V_n^*)^- - (\rho V_n^*)^+ = 0, \quad \rho V_n^* [\boldsymbol{v}] = -[\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n}],$$

$$\rho V_n^* \left[e + \frac{v^2}{2} \right] = [\boldsymbol{h} \cdot \boldsymbol{n} - \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n}]$$

4.4.4 广义开口体系和冲击波突跃条件的 L 氏表述

如同对闭口体系一样，对广义开口体系也同样可采用 E 氏描述和 L 氏描述。设 E 氏构形中开口体系 $v(t)$、网表面 $a(t)$ 及单位外法矢量 $\boldsymbol{n}$ 在 L 氏构形中的映象分别为 $\boldsymbol{V}(t)$、$\boldsymbol{A}(t)$ 和 $\boldsymbol{N}(t)$，并以 $\boldsymbol{U}$ 和 $U_N = \boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{N}$ 表示网表面的 L 氏射线网速和 L 氏法向射线网速，则单位时间内通过网面元 $\mathrm{d}A$ 流入体系的质量流、动量流和能量流将分别是(参见 2.8 节中的式(2.8.23))

$$\rho_0 U_N \mathrm{d}A, \quad \rho_0 U_N \boldsymbol{v} \mathrm{d}A, \quad \rho_0 U_N \left(e + \frac{v^2}{2} \right) \mathrm{d}A \tag{4.4.17}$$

而 3 个守恒定律的 E 氏表述(4.4.17)式在 L 氏构形中将表现为

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \displaystyle\int_{V(t)} \rho_0 \mathrm{d}V = \oint_{A(t)} \rho_0 U_N \mathrm{d}A \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \displaystyle\int_{V(t)} \rho_0 \boldsymbol{v} \mathrm{d}V = \oint_{A(t)} \rho_0 U_N \boldsymbol{v} \mathrm{d}A + \oint_{A(t)} \boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{N} \mathrm{d}A + \int_{V(t)} \rho_0 \boldsymbol{b} \mathrm{d}V \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \displaystyle\int_{V(t)} \rho_0 \left(e + \frac{v^2}{2} \right) \mathrm{d}V = \oint_{A(t)} \rho_0 U_N \left(e + \frac{v^2}{2} \right) \mathrm{d}A + \oint_{A(t)} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{N} \mathrm{d}A \\ \qquad + \displaystyle\int_{V(t)} \boldsymbol{v} \cdot \rho_0 \boldsymbol{b} \mathrm{d}V + \int_{V(t)} \rho_0 \gamma \mathrm{d}V - \oint_{A(t)} \boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{N} \mathrm{d}A \end{cases} \tag{4.4.18}$$

其中 ρ_0 是介质的初始质量密度，$\boldsymbol{S}$ 为第一类 Piola-Kirchhoff 应力张量，$\boldsymbol{H}$ 为 L 氏热流矢量。通过与前面类似的极限过程，容易得到与冲击波阵面上突跃条件的 E 氏表述式(4.4.13)、式(4.4.14)、式(4.4.15)相对应的突跃条件的 L 氏表述：

$$[\rho_0 U_N] = 0 \quad (质量守恒) \tag{4.4.19}$$

$$[\rho_0 U_N \boldsymbol{v} + \boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{N}] = 0 \quad (动量守恒) \tag{4.4.20}$$

$$\left[\rho_0 U_N \left(e + \frac{v^2}{2} \right) - \boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{N} + \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{N} \right] = 0 \quad (能量守恒) \tag{4.4.21}$$

由物理意义显然可知，E 氏波速 $\boldsymbol{V}$、E 氏法向波速 V_n、L 氏波速 $\boldsymbol{U}$、L 氏法向波速 U_N 都是跨波连续的，但 E 氏相对波速 $\boldsymbol{V}^*$ 和相对法向波速 V_n^* 则是跨波间断的，这是因为质点速度 $\boldsymbol{v}$ 及法向质点速度 v_n 是跨波间断的。因此对比质量守恒条

件(4.4.13)式和(4.4.19)式可知：质量守恒的E氏表述是有实质意义的，而质量守恒的L氏表述(4.4.19)式只是一个平凡和显然可见的结果，并无实质意义，因为ρ_0、U_N显然都是跨波连续的。与此相应的是，L氏突跃条件中少了一个未知量——瞬时密度ρ，而ρ却是出现在E氏突跃条件中的。当然，当采用L氏表述时，瞬时密度可通过$\rho=\rho_0\|\boldsymbol{F}\|$而求出，其中$\|\boldsymbol{F}\|$表示$\boldsymbol{F}$的行列式。

4.4.5　冲击波阵面上的位移连续条件

只要不出现破坏，介质的位移应是单值连续的，这就是连续介质力学中的位移连续条件。当跨过存在着应力、质速等间断现象的冲击波时，同样应满足这一条件。位移连续也就是运动的连续，或粒子坐标的连续，故跨过冲击波的位移连续条件可表达为

$$[\boldsymbol{x}]=\boldsymbol{0}\quad(\text{或}[\boldsymbol{X}]=\boldsymbol{0})\tag{4.4.22}$$

设介质运动规律为$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X},t)$，冲击波的L氏阵面为$t=\tau(\boldsymbol{X})$，则在冲击波阵面上粒子的E氏坐标将成为阵面所经过的L氏坐标的复合函数：

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X},\tau(\boldsymbol{X}))\equiv\boldsymbol{x}^*(\boldsymbol{X})\tag{4.4.23}$$

式(4.4.23)可称之为运动学量欧拉坐标$\boldsymbol{x}$的随波场函数，而式(4.4.22)则说明这一随波场函数应是跨波连续的，即在冲击波紧前方和紧后方人们应感受到同样的随波场函数，或

$$[\boldsymbol{x}^*(\boldsymbol{X})]=\boldsymbol{0}\tag{4.4.22$'$}$$

故其随波偏导数(它是阵面上的内导数，不同于外导数$\partial\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X},t)/\partial\boldsymbol{X}$和$\partial\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X},t)/\partial t$)也必然跨波连续，即

$$\left[\frac{\partial\,\boldsymbol{x}^*(\boldsymbol{X})}{\partial\boldsymbol{X}}\right]=\boldsymbol{0}\tag{4.4.24}$$

将式(4.4.23)代入式(4.4.24)，并利用式(4.4.6)，即可得

$$\left[\boldsymbol{F}+\frac{\boldsymbol{v}\boldsymbol{N}}{U_N}\right]=\boldsymbol{0}\tag{4.4.25}$$

其中$\boldsymbol{vN}$表示$\boldsymbol{v}$和$\boldsymbol{N}$的并矢。再利用U_N和V_n^*间的关系(4.4.9)式以及$\boldsymbol{N}$和$\boldsymbol{n}$间的关系(4.4.7)式，则式(4.4.25)也可化为

$$\left[\boldsymbol{F}+\frac{\boldsymbol{v}\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{F}}{V_n^*}\right]=\boldsymbol{0}\tag{4.4.26}$$

式(4.4.25)和式(4.4.26)各包含9个公式，它们分别是冲击波阵面上位移连续条件的L氏表述和E氏表述。

4.4.6 关于质量守恒条件和位移连续条件的关系

在连续介质理论中，至今人们一直习惯地将由质量守恒定律导出的方程称为连续方程，严格而言这是不恰当和不严谨的。事实上，位移单值连续的条件必然可导出并因之包含了质量守恒方程，但质量守恒却并不能代替和包含位移单值连续的条件，后者包含了更为丰富的内容和更为多彩的结果。这里将以冲击波阵面上的质量守恒条件和位移连续条件的关系来具体说明这一问题。

质量守恒条件(4.4.13)式或(4.4.19)式只有一个关系，它不能完全包含和代替有 9 个方程的位移连续条件(4.4.25)式和(4.4.26)式，这是显然的。现在我们将证明如下命题：质量守恒方程(4.4.13)式只是位移连续条件(4.4.26)式的结果而已。

事实上，式(4.4.26)可写为

$$\left[\left(\boldsymbol{I}+\frac{\boldsymbol{vn}}{V_n^*}\right)\cdot\boldsymbol{F}\right]=\boldsymbol{0}\quad(\boldsymbol{I}\text{ 为单位张量})\tag{4.4.26$'$}$$

任一 2 阶张量跨波连续时，其行列式的值也必然跨波连续。由此，利用线性代数中的公式：

$$\|\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C}\|=\|\boldsymbol{B}\|\,\|\boldsymbol{C}\|,\quad \|\boldsymbol{I}+\boldsymbol{ab}\|=1+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\tag{4.4.27}$$

其中 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 为任意 2 个 2 阶张量，而 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 为任意 2 个矢量，由式(4.4.26)$'$便可得

$$\left[\frac{V_n}{V_n^*}\frac{\rho_0}{\rho}\right]=0\tag{4.4.28}$$

由于 ρ_0 和 V_n 都是跨波连续的，故式(4.4.28)可引出$\dfrac{1}{\rho V_n^*}$跨波连续，则ρV_n^* 也跨波连续，即

$$[\rho V_n^*]=0\tag{4.4.13}$$

而这恰恰即是质量守恒条件(4.4.13)式，这就证明了我们的命题。

习　　题

4.1　试由微闭口体系的能量守恒定律导出能量方程(4.1.5)式，即

$$\rho(\dot{k}+\dot{u})=\rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{b}+(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\sigma})\cdot\overleftarrow{\nabla}+\rho r-\boldsymbol{h}\cdot\overleftarrow{\nabla}$$

4.2　试由微开口体系的能量守恒定律导出能量方程(4.1.5)′式，即

$$\frac{\partial}{\partial t}[\rho(k+u)]=\boldsymbol{v}\cdot\rho\boldsymbol{b}+(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\sigma})\cdot\overleftarrow{\nabla}-[\rho(k+u)\boldsymbol{v}]\cdot\overleftarrow{\nabla}+\rho r-\boldsymbol{h}\cdot\overleftarrow{\nabla}$$

4.3　试由坐标面所围成的微闭口体系(即将某一时刻处于坐标面中的物质作为一个闭口体系)的能量守恒定律导出能量方程在相应坐标系(直角笛卡尔坐标系和正交曲线坐标系)中的具体数学形式。

4.4　试由坐标面所围成的微开口体系的能量守恒定律导出能量方程在相应坐标系(直角笛卡尔坐标系和正交曲线坐标系)中的具体数学形式。

4.5　试由热力学第二定律的开尔芬说法证明克劳修斯说法；试由热力学第二定律的克劳修斯说法证明开尔芬说法。

4.6　试由热力学第二定律证明卡诺定理。

4.7　试由热力学第二定律证明克劳修斯不等式：$\Sigma\frac{Q_i}{T_i}\leqslant 0$。

4.8　设温度为 T_1 的体系Ⅰ向温度为 T_2 的体系Ⅱ供热 $\mathrm{d}Q$，试分别写出此过程中体系Ⅰ、Ⅱ、(Ⅰ+Ⅱ)各自的总熵增、可逆熵增及产熵。

4.9　试证明式(4.3.4a)，即

$$\operatorname{div}\left(\frac{\boldsymbol{h}}{T}\right)=\left(\frac{\boldsymbol{h}}{T}\right)\cdot\overleftarrow{\nabla}=\frac{\boldsymbol{h}\cdot\overleftarrow{\nabla}}{T}+\boldsymbol{h}\cdot\left(\frac{1}{T}\right)\overleftarrow{\nabla}=\frac{\operatorname{div}\boldsymbol{h}}{T}-\frac{1}{T^2}\boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{g}$$

第 5 章　本构方程的一般理论

5.1　本构方程理论的基本原理和假定

材料本构方程的理论体系是由诺尔(Noll)和特鲁斯德尔(Trusdell)等人在 20 世纪 60 年代所建立的。本构方程的理论试图以一系列公理化体系的假说为基础，通过严格的逻辑推理，统一处理各种材料特别是有耗散机制的材料在大变形和高低温等复杂条件下的力学和热力学性质，建立材料本构关系的数学表达形式，并对各种材料的本构关系进行科学分类。这些本构理论的公理化假设以公认的物理事实和试验结果为依据和基础，将所得出的本构方程与有关的试验结果进行对比并接受检验。本构方程理论本身不能代替试验，人们不能离开试验单独地由本构理论就完全解决材料本构关系的全部问题；但是几十年来的实践中，本构理论已成功地处理了各种有耗散机制材料的本构关系的描述问题，并且在很多情况下本构理论所给出的结果与此前人们所曾经采用过的经验和半经验的本构关系形式相一致，同时预言了一些新的结果。所以，在其发展之初曾经受到若干非议的材料本构关系的理论现在已经得到了广泛的认可，并且在继续发展和完善着。材料本构关系理论的基本思想是，以材料的运动历史和温度历史作为本源变量即自变量，寻求材料的各种响应量即因变量对其本源变量的依赖关系。材料本构关系理论的基本数学方法可以分为两大类，一类是将因变量的当前值作为本源变量整个历史的泛函来描述，称之为泛函表述(functional formulation)；另一类是将因变量的当前值作为本源变量以及若干内变量当前值的函数来描述，称之为内变量表述(internal variables formulation)。泛函表述中以本源变量的整个历史来反映材料的历史记

忆效应，内变量表述中以若干个对材料的变形历史有记忆标记的所谓内变量来近似反映材料的历史记忆效应。尽管二者数学表达形式不同，但是其目的都是为了揭示有耗散机制的介质的运动和变形的不可逆性特征，同时其理论处理方法也是完全类似的。只要我们对本构理论上述两种体系中的一种掌握了其处理方法，则对另一种体系的处理方法也便同时掌握了。在本章中我们将主要以泛函表述为基础来阐述本构理论的有关知识，并阐述有关结果的物理意义，同时将在适当的地方顺便指出内变量表述的相应结果。

本构理论的主要原理可简要解释如下：

1. 确定性原理(determinism)

确定性原理可以表述为：物体 B 中任一粒子 $\boldsymbol{X}$ 在 t 时刻的热力学行为(即响应)由物体 B 中所有粒子 $\boldsymbol{X}'$ 的直至 t 为止的整个运动历史和温度历史所确定。以 Cauchy 应力 $\boldsymbol{\sigma}$、比熵 s、比自由能 ψ、E氏热流矢量 $\boldsymbol{h}$ 为例，确定性原理可以表达为

$$\sigma(\boldsymbol{X},t) = \hat{\boldsymbol{\sigma}}[\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X}',t'),T(\boldsymbol{X}',t');\boldsymbol{X},t] \tag{5.1.1a}$$

$$s(\boldsymbol{X},t) = \hat{s}[\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X}',t'),T(\boldsymbol{X}',t');\boldsymbol{X},t] \tag{5.1.2a}$$

$$\psi(\boldsymbol{X},t) = \hat{\psi}[\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X}',t'),T(\boldsymbol{X}',t');\boldsymbol{X},t] \tag{5.1.3a}$$

$$\boldsymbol{h}(\boldsymbol{X},t) = \hat{\boldsymbol{h}}[\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X}',t'),T(\boldsymbol{X}',t');\boldsymbol{X},t] \tag{5.1.4a}$$

这里 $\boldsymbol{X}'$ 是属于 B 的任一粒子，t' 是小于或等于现时刻 t 的历史任一时刻，即

$$\boldsymbol{X}' \in B, \quad -\infty < t' \leqslant t \tag{5.1.5a}$$

$\hat{\boldsymbol{\sigma}}$、$\hat{s}$、$\hat{\psi}$、$\hat{\boldsymbol{h}}$ 等表示运动历史 $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X}',t')$ 和温度历史 $T(\boldsymbol{X}',t')$ 的泛函。泛函中“;”后对 $\boldsymbol{X}$ 的显式依赖可反映介质的非均质效应，对现实时刻即历史回溯起点 t 的显式依赖可反映介质的老化效应。但是，今后我们将不考虑这二种效应，故将去掉其中“;”后的 $\boldsymbol{X},t$。为了更简洁地对历史进行刻画，我们引入所谓的流逝时间(elapsed time)，即从现时刻 t 向回追溯的时间 τ：

$$\tau = t - t', \quad 0 \leqslant \tau < \infty \tag{5.1.6}$$

则可将运动历史和温度历史分别写为

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}(\boldsymbol{X}',\ t') = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{X}',t-\tau) \equiv \boldsymbol{x}^t(\boldsymbol{X}',\tau) \\ T(\boldsymbol{X}',\ t') = T(\boldsymbol{X}',t-\tau) \equiv T^t(\boldsymbol{X}',\tau) \end{cases} \tag{5.1.7}$$

式(5.1.7)右端的记号 $\boldsymbol{x}^t(\boldsymbol{X}',\tau)$、$T^t(\boldsymbol{X}',\tau)$ 分别表示粒子 $\boldsymbol{X}'$ 直至时刻 t 为止的运动历史和温度历史，于是式(5.1.1a)～式(5.1.4a)可写为

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{X},t) = \hat{\boldsymbol{\sigma}}[\boldsymbol{x}^t(\boldsymbol{X}',\tau),T^t(\boldsymbol{X}',\tau);\boldsymbol{X},t] \tag{5.1.1b}$$

$$s(\boldsymbol{X},t)=\hat{s}[\boldsymbol{x}^t(\boldsymbol{X}',\tau),T^t(\boldsymbol{X}',\tau);\boldsymbol{X},t] \tag{5.1.2b}$$

$$\psi(\boldsymbol{X},t)=\hat{\psi}[\boldsymbol{x}^t(\boldsymbol{X}',\tau),T^t(\boldsymbol{X}',\tau);\boldsymbol{X},t] \tag{5.1.3b}$$

$$\boldsymbol{h}(\boldsymbol{X},t)=\hat{\boldsymbol{h}}[\boldsymbol{x}^t(\boldsymbol{X}',\tau),T^t(\boldsymbol{X}',\tau);\boldsymbol{X},t] \tag{5.1.4b}$$

2. 局部作用原理（local action）

局部作用原理可以表述为：任一粒子 $\boldsymbol{X}$ 的响应只由该粒子附近很小邻域 N 内粒子的运动历史和温度历史所确定，即式(5.1.5a)中 $\boldsymbol{X}'$ 只需属于 $\boldsymbol{X}$ 的邻域 N：

$$\boldsymbol{X}'\in N,\quad -\infty<t'\leqslant t \tag{5.1.5b}$$

此原理是确定性原理在空间范围上的进一步具体化。下节将指出，当邻域 N 是一无穷小的邻域时，则可将确定性原理化为粒子 $\boldsymbol{X}$ 的响应对粒子 $\boldsymbol{X}$ 本身的变形梯度历史 $\boldsymbol{F}^t(\boldsymbol{X},\tau)$、温度历史 $T^t(\boldsymbol{X},\tau)$ 和温度梯度历史 $\boldsymbol{G}^t(\boldsymbol{X},\tau)$ 的依赖关系，这就是所谓的简单材料(simple materials)的本构关系。例如简单材料 Cauchy 应力 $\boldsymbol{\sigma}$ 的本构泛函为

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{X},t)=\hat{\boldsymbol{\sigma}}[\boldsymbol{F}^t(\boldsymbol{X},\tau),T^t(\boldsymbol{X},\tau),\boldsymbol{G}^t(\boldsymbol{X},\tau)] \tag{5.1.8}$$

需要说明的是："简单材料"事实上并不简单，这是因为现今人们所研究过的绝大多数材料事实上都可归结为简单材料的特例。通过局部作用原理引入简单材料概念的意义是：对简单材料我们可以只通过均匀变形的试验和等温度梯度的试验来寻求其本构泛函就行了。例如我们在材料试验机上常常进行的简单拉压试验和薄壁管的扭转试验就都是均匀变形的试验。

下面我们以简单材料为例对内变量理论给以简要说明。内变量理论不引入本源变量的整个历史而引入若干个内变量，以内变量的当前值记忆和表征迄今为止过去的历史，从而描述材料运动和变形的不可逆性特征。内变量和本源变量的现时值一起共同决定材料迄今为止的响应，这是内变量型本构关系的第一部分。内变量是一些反映不可逆过程中材料内部结构状态变化的量，如弹塑性材料中反映位错运动的功硬化或应变硬化参量，材料的损伤积累程度、相变程度或化学反应程度等，它们是决定材料响应的重要因素，而它们的演化又由当时的外变量和内变量"状态"所共同决定，这是内变量型本构关系的第二部分，即所谓的内变量演化方程，这些方程确定了历史下一步的演化方向。包括上述两部分的全部方程合在一起即构成完整的内变量型本构关系。所以如以 $\xi_\beta(\beta=1,\cdots,n)$ 表示与 n 种耗散机制相对应的内变量，则简单材料 Cauchy 应力 $\boldsymbol{\sigma}$ 本构方程的内变量表述可以写为

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{X},t)=\hat{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X},t),T(\boldsymbol{X},t),\boldsymbol{G}(\boldsymbol{X},t),\xi_\beta)\quad(\beta=1,\cdots,n) \tag{5.1.9}$$

$$\dot{\xi}_\alpha = f_\alpha(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X},t),T(\boldsymbol{X},t),\boldsymbol{G}(\boldsymbol{X},t),\xi_\beta) \quad (\alpha = 1,\cdots,n;\beta = 1,\cdots,n) \tag{5.1.10}$$

其中(5.1.10)式即是 n 个内变量 ξ_α 的演化方程，$\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ 和 f_α 代表本构函数（而不是泛函），它们都是粒子 $\boldsymbol{X}$ 在现时刻 t 的外变量 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X},t)$、$T(\boldsymbol{X},t)$、$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{X},t)$ 以及内变量 ξ_β 的函数。

3. 减退记忆原理(fading memory)

减退记忆原理可表达为：越久远的历史对材料现时刻响应的影响越小，以致可以忽略。这样就可以得出所谓的记忆减退型的本构方程。特别地，当假设材料的响应对历史的依赖只是对现时刻 t 前无穷短历史的依赖时（即对变形和温度变化率的依赖时），则类似于局部作用原理的处理方法，我们即可得到所谓的率型本构方程。

局部作用原理和减退记忆原理分别是确定性原理在空间和时间上的进一步具体化和近似。

4. 坐标不变性原理(coordinate invariance)

描写材料性质的本构关系与坐标系的选择无关，或者说材料的本构关系应该适用于任何的坐标系，这即是所谓的坐标不变性原理。更确切地说即是对两个不做相对运动的不同坐标系而言，本构方程具有形式不变的性质。根据第1章我们所讲的张量方程的坐标不变性法则，当我们对本构方程取张量方程的表述方式时，就自然满足了这一需求。

5. 构架无关原理(frame indifference)或客观性原理(objectivity)

构架无关原理是指对任何两个相互做刚性运动的构架中的不同观察者来说，材料的本构方程应该具有同样的形式。这一原理所反映的事实是，材料本身的性质是客观的，与观察者所处的构架是无关的，所以又称为客观性原理。

6. 许可性原理(admissibility)或一致性原理(consistency)

许可性原理是指本构方程必须和质量守恒、动量守恒、能量守恒等方程以及反映过程不可逆性特征的熵均衡方程和熵不等式相容，共同组成连续介质力学的基本方程组。今后我们将会看到，熵不等式会对本构方程加上很强的限制，所以这一原理主要指的是本构方程与熵不等式的相容性或一致性。

7. 材料对称性原理(materials symmetry)

材料对称性原理是指当材料本身存在某些构造上的对称性时，材料本构方程的形式会受到某些限制。显然，材料的对称性越多，本构方程所受到的限制也就越多，其本构方程的形式也将更加简单。

8. 等存性原理(equipresence)

等存性原理是指当我们没有确切的依据时,我们必须假设各种不同因变量的本构泛函中出现同样的自变量,除非许可性原理、构架无关原理或材料对称性原理限定了某些自变量不能出现在某些本构泛函之中。这一原理可使我们不至于遗漏影响材料行为的某些因素。

在以上原理中最重要的是构架无关原理、局部作用原理、许可性原理和材料对称性原理,我们将在下面几节中分别加以阐述。

5.2 构架无关原理和局部作用原理对本构方程形式的限制

5.2.1 物理过程和等价的物理过程

我们把处于某一时空系中的物体的运动历史 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X}', t')$、温度历史 $T=T(\boldsymbol{X}', t')$、比熵历史 $s=s(\boldsymbol{X}', t')$、应力历史 $\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{X}', t')$、自由能历史 $\psi=\psi(\boldsymbol{X}', t')$、热流历史 $\boldsymbol{h}=\boldsymbol{h}(\boldsymbol{X}', t')$等等的总和称为一个物理过程。为了描写一个物理过程需要一定的时空系,而同一个物理过程在不同的时空系中将有不同的数学表示,故为了清晰起见,我们将把同一个物理过程在不同时空系中的数学表示称之为等价的物理过程。根据我们在 2.10 节中所讲的关于时空系和时空系变换的知识,设 $\varphi(\boldsymbol{x},t)$和 $\bar{\varphi}(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{t})$表示两个不同的时空系,它们间的时空变换关系由如下的公式所表达:

$$\begin{cases} \bar{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{X}', \bar{t}')=\boldsymbol{Q}(t')\cdot\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X}',t')+\boldsymbol{C}(t') \\ \bar{t}'=t'+a \quad (t'\leqslant t,\bar{t}'\leqslant t+a) \end{cases} \tag{5.2.1a}$$

其中 $\boldsymbol{X}'$为物体中任意粒子在初始构型中的位置矢量,$\boldsymbol{x}$ 和 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 是该粒子分别在时空系 φ 中的历史时刻 t'和在 $\bar{\varphi}$ 中的相应(同一)时刻 $\bar{t}'$的瞬时位置矢量,a、$\boldsymbol{C}$、$\boldsymbol{Q}$ 分别为与粒子无关的任意常数、任意的常矢量、任意的常正交张量,但是在历史上不同的时刻 t'却可以有不同的值。式(5.2.1a)表示,时空系 φ 和 $\bar{\varphi}$ 的时间起点差一个数值 a,在历史上的 t'(即 $\bar{t}'$)时刻两个时空系构架的原点相差一个平移矢量 $\boldsymbol{C}(t')$,同时两个时空系的构架相差一个由正交张量 $\boldsymbol{Q}(t')$所表达的刚体旋转或反射。由于温度 T(连同比熵 s 及比自由能ψ)、Cauchy 应力 $\boldsymbol{\sigma}$、E 氏热流矢量 $\boldsymbol{h}$ 分别是构架无关的标量、构架无关的二阶张量、构架无关的矢量,所以对同一个客观

的物理过程，它们在时空系 φ 和 $\bar{\varphi}$ 中的表象将分别由如下各式相联系：

$$\bar{T}(X',\bar{t}') = T(X',\ t') \tag{5.2.2a}$$

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}(X',\bar{t}') = \boldsymbol{Q}(t')\cdot\boldsymbol{\sigma}(X',\ t')\cdot\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}(t') \tag{5.2.3a}$$

$$\bar{s}(X',\bar{t}') = s(X',\ t') \tag{5.2.3b}$$

$$\bar{\psi}(X',\bar{t}') = \psi(X',\ t') \tag{5.2.3c}$$

$$\bar{\boldsymbol{h}}(X',\bar{t}') = \boldsymbol{Q}(t')\cdot\boldsymbol{h}(X',\ t') \tag{5.2.3d}$$

……

换言之，在两个时空系 $\varphi(\boldsymbol{x},t)$ 和 $\bar{\varphi}(\bar{\boldsymbol{x}},\ \bar{t})$ 中，各物理量（包括本源变量和因变量）的表象由式(5.2.1)～式(5.2.3)相联系的物理过程即为等价的物理过程，即等价的物理过程代表的是不同时空系中的观察者所观察到的同一个客观物理过程。以后我们将简洁地把式(5.2.1)～式(5.2.3)称为各有关量的等价变换公式。

当我们引入流逝时间 $\tau = t - t'$ 时，本源变量的时空变换式(5.2.1a)和式(5.2.2a)可分别写为

$$\bar{\boldsymbol{x}}(X',\bar{t}') = \boldsymbol{Q}(t-\tau)\cdot\boldsymbol{x}(X',t-\tau)+\boldsymbol{C}(t-\tau) = \boldsymbol{Q}^t\cdot\boldsymbol{x}^t(X')+\boldsymbol{C}^t \tag{5.2.1b}$$

$$\bar{\boldsymbol{T}}(X',\bar{t}') = T(X',t-\tau) = T^t(X') \tag{5.2.2b}$$

其中 $\boldsymbol{Q}^t=\boldsymbol{Q}(t-\tau)$ 和 $\boldsymbol{C}^t=\boldsymbol{C}(t-\tau)$ 分别表示直至现时刻 t 为止的构架旋转历史和原点平移历史。

5.2.2　构架无关原理对本构方程形式的一般要求

根据5.1节中所讲的构架无关原理的要求，合理的本构方程必须是构架无关的，即同一材料在不同时空系中本构泛函的形式必须相同。具体说来即是：如果一个本构泛函适合于时空系 φ 中的物理过程的话，则它也必须适合于时空系 $\bar{\varphi}$ 中等价的物理过程。以Cauchy应力 $\boldsymbol{\sigma}$ 的本构泛函为例，利用确定性原理，这相当于以下二式要同时成立：

$$\boldsymbol{\sigma}(X,t) = \hat{\boldsymbol{\sigma}}[\boldsymbol{x}(X',t'),T(X',t')]\quad(\varphi) \tag{5.2.4}$$

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}(X,\ \bar{t}) = \hat{\boldsymbol{\sigma}}[\bar{\boldsymbol{x}}(X',\bar{t}'),\bar{T}(X',\bar{t}')]\quad(\bar{\varphi}) \tag{5.2.5}$$

我们强调指出，这里重要的是：尽管在时空系 φ 中表达的粒子 X 本身的应力 $\boldsymbol{\sigma}(X,t)$ 和各粒子 X' 的运动历史 $\boldsymbol{x}(X',\ t')$、温度历史 $T(X',\ t')$ 在时空系 $\bar{\varphi}$ 中分别改成了 $\bar{\boldsymbol{\sigma}}(X,\ \bar{t})$、$\bar{\boldsymbol{x}}(X',\ \bar{t}')$ 和 $\bar{T}(X',\ \bar{t}')$，但是 $\bar{\boldsymbol{\sigma}}(X,\ \bar{t})$ 对 $\bar{\boldsymbol{x}}(X',\ \bar{t}')$ 和 $\bar{T}(X',\ \bar{t}')$ 的依赖关系与 $\boldsymbol{\sigma}(X,t)$ 对 $\boldsymbol{x}(X',\ t')$ 和 $T(X',\ t')$ 的依赖关系则是完全

相同的，它们都由同一个泛函关系 $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ 所表达，这就是构架无关原理的实质和其在数学上的体现。

将物体中各粒子 $\boldsymbol{X}'$ 在历史各时刻 t' 时应力 $\boldsymbol{\sigma}$ 的等价关系(5.2.3a)式应用于粒子 $\boldsymbol{X}$ 在 t 时刻的值，我们有

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{X},\ \bar{t}) = \boldsymbol{Q}(t)\cdot\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{X},t)\cdot\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}(t) \tag{5.2.3a$'$}$$

将式(5.2.3a)′代入式(5.2.5)，并在所得结果中利用式(5.2.4)，有

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{\sigma}}[\bar{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{X}',\bar{t}'),\bar{T}(\boldsymbol{X}',\bar{t}')] &= \boldsymbol{Q}(t)\cdot\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{X},t)\cdot\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}(t)\\ &= \boldsymbol{Q}(t)\cdot\hat{\boldsymbol{\sigma}}[\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X}',t'),T(\boldsymbol{X}',t')]\cdot\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}(t)\end{aligned} \tag{5.2.6}$$

式(5.2.6)就是构架无关原理对泛函 $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ 形式的限制或一般要求，其中的运动历史 $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X}',\ t')$、$\bar{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{X}',\ \bar{t}')$ 和温度历史 $T(\boldsymbol{X}',\ t')$、$\bar{T}(\boldsymbol{X}',\ \bar{t}')$ 之间满足等价关系(5.2.1)式和(5.2.2)式，而且要对任意的 a、$\boldsymbol{C}(t')$、$\boldsymbol{Q}(t')$ 式(5.2.6)都要成立。用一句更确切的话来表达就是，构架无关原理要求本构泛函 $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ 必须具有这样的性质：当把 Cauchy 应力本构泛函 $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ 中各粒子的自变量历史进行等价变换时，其结果应该等于对其因变量的值进行现时刻 t 的等价变换的结果。这里我们是以 Cauchy 应力为例来加以说明的，显然这一表述对任意因变量的本构泛函也都是适用的，只不过它们的时空变换关系或等价变换关系不同而已。

5.2.3 构架无关原理在时空平移上的体现

构架无关原理要求本构泛函 $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ 对任意正交张量 $\boldsymbol{Q}(t')$、数值 a、矢量 $\boldsymbol{C}(t')$（含于 $\bar{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{X}',\ \bar{t}')$ 中），式(5.2.6)都要成立。特别地，如果我们取

$$\boldsymbol{Q}(t') = \boldsymbol{I},\quad a = -t,\quad \boldsymbol{C}(t') = -\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X},\ t')\quad (t'\leqslant t) \tag{5.2.7}$$

式(5.2.6)也应该成立。引入流逝时间 $\tau = t - t'$，则在特殊选择(5.2.7)式之下，式(5.2.1b)、式(5.2.2b)成为

$$\bar{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{X}',\bar{t}') = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{X}',t-\tau) - \boldsymbol{x}(\boldsymbol{X},t-\tau) = \boldsymbol{x}^t(\boldsymbol{X}') - \boldsymbol{x}^t(\boldsymbol{X}) \tag{5.2.1c}$$

$$\bar{T}(\boldsymbol{X}',\ \bar{t}') = T(\boldsymbol{X}',t-\tau) = T^t(\boldsymbol{X}') \tag{5.2.2c}$$

其中 $\boldsymbol{x}^t(\boldsymbol{X}') = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{X}',t-\tau)$、$T^t(\boldsymbol{X}') = T(\boldsymbol{X}',t-\tau)$ 分别表示粒子 $\boldsymbol{X}'$ 直至现时 t 为止的运动历史和温度历史，而 $\boldsymbol{x}^t(\boldsymbol{X}') - \boldsymbol{x}^t(\boldsymbol{X})$ 则表示 $\boldsymbol{X}'$ 对我们所考虑的粒子 $\boldsymbol{X}$ 的相对运动的历史。将(5.2.7)式、(5.2.1c)式、(5.2.2c)式代入(5.2.6)式，有

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}[(\boldsymbol{x}^t(\boldsymbol{X}') - \boldsymbol{x}^t(\boldsymbol{X})),T^t(\boldsymbol{X}')] = \hat{\boldsymbol{\sigma}}[\boldsymbol{x}^t(\boldsymbol{X}'),T^t(\boldsymbol{X}')]$$

因此本构关系可表达为

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{X},t)=\hat{\boldsymbol{\sigma}}[\boldsymbol{x}^t(\boldsymbol{X}'),T^t(\boldsymbol{X}')]=\hat{\boldsymbol{\sigma}}[(\boldsymbol{x}^t(\boldsymbol{X}')-\boldsymbol{x}^t(\boldsymbol{X})),T^t(\boldsymbol{X}')] \tag{5.2.8}$$

式(5.2.8)说明:Cauchy 应力 $\boldsymbol{\sigma}$ 的本构泛函事实上只依赖于物体中各粒子 $\boldsymbol{X}'$ 对所考虑粒子 $\boldsymbol{X}$ 的相对运动历史 $\boldsymbol{x}^t(\boldsymbol{X}')-\boldsymbol{x}^t(\boldsymbol{X})$ 和温度历史 $T^t(\boldsymbol{X}')$。从物理上看,其实这是容易理解的,因为如果各粒子对于所考虑的粒子没有相对运动,物体也就没有变形,其应力自然就等于 $\boldsymbol{0}$。

这里我们对式(5.2.7)的意义加以简单说明。当我们取式(5.2.7)时,由(5.2.1)式可见,如果 $t'=t$,则有 $\bar{t}'=t-t=0$;如果 $\boldsymbol{Q}(t')=\boldsymbol{I}$、$\boldsymbol{C}(t')=-\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X},t')$,则当 $\boldsymbol{X}'=\boldsymbol{X}$ 时,将有 $\bar{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{X}',\bar{t}')=\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X},t')-\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X},t')=\boldsymbol{x}^t(\boldsymbol{X})-\boldsymbol{x}^t(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{0}$。所以,式(5.2.7)的物理意义是:我们总是把时空系 φ 中的现时刻 t 取作时空系 $\bar{\varphi}$ 的时间原点;而且在历史上的每一时刻总是保持时空系 $\bar{\varphi}$ 和 φ 的构架坐标轴相平行(即只考虑构架平移),同时总是把我们所考虑的粒子 $\boldsymbol{X}$ 在时空系 φ 中的瞬时位置 $\boldsymbol{x}$ 取作时空系 $\bar{\varphi}$ 的坐标原点。

5.2.4 局部作用原理的体现

局部作用原理说明,本构泛函(5.2.8)式中的粒子 $\boldsymbol{X}'$ 只需属于粒子 $\boldsymbol{X}$ 的某一个小的邻域 N。若此邻域为无限小,且将 $\boldsymbol{x}^t(\boldsymbol{X}')$、$T^t(\boldsymbol{X}')$ 在 $\boldsymbol{X}$ 处展为 Taylor 级数,则有

$$\boldsymbol{x}^t(\boldsymbol{X}')=\boldsymbol{x}^t(\boldsymbol{X})+\boldsymbol{F}^t(\boldsymbol{X})\cdot(\boldsymbol{X}'-\boldsymbol{X})+\cdots+\frac{\partial^n\boldsymbol{x}^t}{\partial\boldsymbol{X}^n}\cdot\cdots\cdot\cdots\cdot(\boldsymbol{X}'-\boldsymbol{X})^n+\cdots$$

$$T^t(\boldsymbol{X}')=T^t(\boldsymbol{X})+\boldsymbol{G}^t(\boldsymbol{X})\cdot(\boldsymbol{X}'-\boldsymbol{X})+\cdots+\frac{\partial^nT^t}{\partial\boldsymbol{X}^n}\cdot\cdots\cdot\cdots\cdot(\boldsymbol{X}'-\boldsymbol{X})^n+\cdots$$

其中,$\boldsymbol{F}^t(\boldsymbol{X})$ 和 $\boldsymbol{G}^t(\boldsymbol{X})$ 分别是粒子 $\boldsymbol{X}$ 处的变形梯度张量和 L 氏温度梯度矢量,$\frac{\partial^n\boldsymbol{x}^t}{\partial\boldsymbol{X}^n}$ 和 $\frac{\partial^nT^t}{\partial\boldsymbol{X}^n}$ 可分别称为粒子 $\boldsymbol{X}$ 处的"n 阶变形梯度"和"n 阶 L 氏温度梯度","·"和"·…·…·"分别表示一次点积和 n 次点积。

当取邻域 N 为无限小时,任何粒子 $\boldsymbol{X}'$ 将都可被排除在 N 之外,所以上两式中对相对运动历史和温度历史真正起作用的将只是粒子 $\boldsymbol{X}$ 处的各阶梯度。如果我们在上两式中取至 n 阶梯度并将之代入式(5.2.8)之中,则称所得的材料为"n 阶材料";如果我们在上两式中只取至 1 阶梯度并将之代入式(5.2.8)之中,则称所得的材料为"简单材料"(simple materials)。由式(5.2.8)出发,可见简单材料 Cauchy 应力的本构关系可以表达为

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{X},t)=\hat{\boldsymbol{\sigma}}[\boldsymbol{F}^t(\boldsymbol{X}),\ T^t(\boldsymbol{X}),\ \boldsymbol{G}^t(\boldsymbol{X})] \tag{5.2.9}$$

其中

$$\boldsymbol{F}^t(\boldsymbol{X}) \equiv \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}, t-\tau), \quad T^t(\boldsymbol{X}) \equiv T(\boldsymbol{X}, t-\tau), \quad \boldsymbol{G}^t(\boldsymbol{X}) \equiv \boldsymbol{G}(\boldsymbol{X}, t-\tau)$$

分别表示粒子 $\boldsymbol{X}$ 处的变形梯度历史、温度历史和 L 氏温度梯度历史。这说明，简单材料的本构泛函只依赖于粒子 $\boldsymbol{X}$ 本身的变形梯度历史、温度历史和 L 氏温度梯度历史，因此我们可以只通过均匀变形和在各不同温度下有均匀温度梯度的试验来测量简单材料的本构关系。以后我们将由许可性原理说明，温度梯度也是不会出现在本构泛函之中的，所以对简单材料我们只需通过均匀变形和各不同温度下有均匀温度分布的试验即可得到其本构关系。

参照 5.1 节中关于内变量理论的说明，如果我们用本构方程的内变量表述，则与(5.2.9)式相对应，简单材料 Cauchy 应力的本构方程将具有如下形式：

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma} = \hat{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{F}, T, \boldsymbol{G}, \xi_\beta) \\ \dot{\xi}_\alpha = f_\alpha(\boldsymbol{F}, T, \boldsymbol{G}, \xi_\beta) \quad (\alpha = 1, \cdots, n) \end{cases} \tag{5.2.9$'$}$$

这里的各量都是针对粒子 $\boldsymbol{X}$ 和现时刻 t 取值的，但我们省略掉了粒子 $\boldsymbol{X}$ 和现时刻 t 的标记。式中 ξ_α 为 n 个内变量，$\hat{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{F}, T, \boldsymbol{G}, \xi_\beta)$ 表示 $\boldsymbol{F}$、T、$\boldsymbol{G}$、ξ_β 的张量函数(而非泛函)，后 n 个方程为内变量 ξ_α 的演化方程。

5.2.5 构架无关原理在构架旋转上的体现——本构方程的简化形式

下面我们以简单材料为例来说明构架无关原理在构架旋转上的体现。构架无关原理要求本构泛函(5.2.9)式对任意的时空系都有同样形式，即本构泛函 $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ 适合于时空系 φ 和 $\bar{\varphi}$ 中的任意两个等价物理过程，用数学公式表达，即有

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{X}, t) = \hat{\boldsymbol{\sigma}}[\boldsymbol{F}^t(\boldsymbol{X}), T^t(\boldsymbol{X}), \boldsymbol{G}^t(\boldsymbol{X})] \quad (\varphi) \tag{5.2.10}$$

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{X}, \bar{t}) = \hat{\boldsymbol{\sigma}}[\bar{\boldsymbol{F}}^{\bar{t}}(\boldsymbol{X}), \bar{T}^{\bar{t}}(\boldsymbol{X}), \bar{\boldsymbol{G}}^{\bar{t}}(\boldsymbol{X})] \quad (\bar{\varphi}) \tag{5.2.11}$$

但对等价的物理过程，我们有因变量和自变量各自的如下时空变换关系：

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{X}, \bar{t}) = \boldsymbol{Q}(t) \cdot \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{X}, t) \cdot \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}(t) \tag{5.2.12}$$

$$\bar{\boldsymbol{F}}^{\bar{t}} = \boldsymbol{Q}^t \cdot \boldsymbol{F}^t, \quad \bar{T}^{\bar{t}} = T^t, \quad \bar{\boldsymbol{G}}^{\bar{t}} = \boldsymbol{G}^t \tag{5.2.13}$$

将式(5.2.12)和式(5.2.13)代入式(5.2.11)之中并利用式(5.2.10)，有

$$\boldsymbol{Q}(t) \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}[\boldsymbol{F}^t, T^t, \boldsymbol{G}^t] \cdot \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}(t) = \hat{\boldsymbol{\sigma}}[\boldsymbol{Q}^t \cdot \boldsymbol{F}^t, T^t, \boldsymbol{G}^t] \tag{5.2.14}$$

这里我们省略掉了粒子 $\boldsymbol{X}$ 的标记。

式(5.2.14)就是构架无关原理对简单材料本构泛函 $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ 形式的限制，其中 $\boldsymbol{Q}^t$ 为任意的正交张量历史。用一句简洁的话来表达即是：本构泛函 $\hat{\boldsymbol{\sigma}}[\boldsymbol{F}^t, T^t, \boldsymbol{G}^t]$ 必须

具有这样的性质，当将泛函中的自变量历史$\boldsymbol{F}^t$、T^t、$\boldsymbol{G}^t$进行等价变换而分别改变为$\boldsymbol{Q}^t\cdot\boldsymbol{F}^t$、$T^t$、$\boldsymbol{G}^t$时所得到的因变量的值应该等于对因变量的值$\hat{\boldsymbol{\sigma}}[\boldsymbol{F}^t,T^t,\boldsymbol{G}^t]$进行现时刻 t 的等价变换的结果。

式(5.2.14)对任意的正交张量历史$\boldsymbol{Q}^t\equiv\boldsymbol{Q}(t-\tau)$都应成立，特别地，如果我们取

$$\boldsymbol{Q}^t=(\boldsymbol{R}^t)^{\mathrm{T}} \tag{5.2.15}$$

其中$\boldsymbol{R}^t\equiv\boldsymbol{R}(t-\tau)$表示粒子 $\boldsymbol{X}$ 处的旋转张量历史，则式(5.2.14)成为

$$\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}(t)\cdot\hat{\boldsymbol{\sigma}}[\boldsymbol{F}^t,T^t,\boldsymbol{G}^t]\cdot\boldsymbol{R}(t)=\hat{\boldsymbol{\sigma}}[(\boldsymbol{R}^t)^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{F}^t,T^t,\boldsymbol{G}^t]=\hat{\boldsymbol{\sigma}}[\boldsymbol{U}^t,T^t,\boldsymbol{G}^t] \tag{5.2.14$'$}$$

这里我们利用了变形梯度张量的右极分解式$\boldsymbol{F}^t=\boldsymbol{R}^t\cdot\boldsymbol{U}^t$ 和$\boldsymbol{R}^t$ 是正交张量的特性：

$$\boldsymbol{F}^t=\boldsymbol{R}^t\cdot\boldsymbol{U}^t,\quad \boldsymbol{U}^t=(\boldsymbol{R}^t)^{-1}\cdot\boldsymbol{F}^t=(\boldsymbol{R}^t)^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{F}^t \tag{5.2.16}$$

其中$\boldsymbol{U}^t\equiv\boldsymbol{U}(t-\tau)$表示粒子 $\boldsymbol{X}$ 处的右伸缩张量历史。将式(5.2.14)$'$的两端左点乘以$\boldsymbol{R}(t)$、右点乘以$\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}(t)$，可见 Cauchy 应力的本构泛函必有如下形式：

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{X},t)=\hat{\boldsymbol{\sigma}}[\boldsymbol{F}^t,T^t,\boldsymbol{G}^t]=\boldsymbol{R}(t)\cdot\hat{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{U}^t,T^t,\boldsymbol{G}^t)\cdot\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}(t) \tag{5.2.17a}$$

显然式(5.2.17a)也可以写为由 L 氏应变历史$\boldsymbol{E}^t$ 所表达的如下的形式：

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{X},t)=\boldsymbol{R}(t)\cdot\widehat{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{E}^t,T^t,\boldsymbol{G}^t)\cdot\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}(t) \tag{5.2.17b}$$

这是因为

$$\boldsymbol{E}^t=\frac{1}{2}[(\boldsymbol{U}^t)^2-\boldsymbol{I}]$$

当然式(5.2.17b)中的泛函$\widehat{\boldsymbol{\sigma}}$和式(5.2.17a)中的泛函$\hat{\boldsymbol{\sigma}}$是不同的。

式(5.2.17a)和式(5.2.17b)都称为 Cauchy 应力 $\boldsymbol{\sigma}$ 本构方程的简化形式(reduced form)，它们是局部作用原理和构架无关原理在时空旋转任意性上的体现。它们说明：简单材料的 Cauchy 应力 $\boldsymbol{\sigma}$ 依赖于粒子$\boldsymbol{X}$ 自身的 L 氏应变历史 $\boldsymbol{E}^t$(或$\boldsymbol{U}^t$)、温度历史 T^t、温度梯度历史 $\boldsymbol{G}^t$，但是却仅仅与其旋转张量的现时值$\boldsymbol{R}(t)$有关，而不是依赖于整个旋转的历史$\boldsymbol{R}^t$。

利用 Cauchy 应力的本构泛函的简化式(5.2.17)式以及 Cauchy 应力和 P-K 应力之间的如下关系(3.2 节中的式(3.2.7a)和式(3.2.14))：

$$\boldsymbol{S}=J\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{F}^{-1})^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\Sigma}=\boldsymbol{F}^{-1}\cdot\boldsymbol{S}=J\boldsymbol{F}^{-1}\cdot\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{F}^{-1})^{\mathrm{T}}$$

不难得出 P-K 应力本构泛函的简化形式可分别表达为

$$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{X},t)=\boldsymbol{R}(t)\cdot\hat{\boldsymbol{S}}(\boldsymbol{E}^t,T^t,\boldsymbol{G}^t) \tag{5.2.18}$$

$$\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{X},t) = \hat{\boldsymbol{\Sigma}}(\boldsymbol{E}^t, T^t, \boldsymbol{G}^t) \tag{5.2.19}$$

为紧凑起见在以上各式中都省略了右端各量所属粒子的标记 $\boldsymbol{X}$。

当然我们也可以参照前面对 Cauchy 应力本构方程简化形式(5.2.17)式的推导过程,以类似的方法独立地导出第一类和第二类 P-K 应力本构方程的简化形式(5.2.18)式和(5.2.19)式,读者可作为练习尝试之。

对比式(5.2.17)、式(5.2.18)和式(5.2.19),从形式上看似乎第二类 P-K 应力 $\boldsymbol{\Sigma}$ 的本构方程最为简单,除了依赖于温度历史 T^t、温度梯度历史 $\boldsymbol{G}^t$ 以外,它只依赖于 L 氏应变的历史 $\boldsymbol{E}^t$ 而与介质的旋转张量 $\boldsymbol{R}(t)$ 完全无关。但是事实上,这种所谓的"简单性"只是表面上的,因为作为应力的度量,第二类 P-K 应力 $\boldsymbol{\Sigma}$ 的定义是比较复杂的,它本身是与介质的变形梯度张量进而因之与介质的旋转是相关联的。

最后我们指出,5.2.5 节中的推理同样适用于内变量理论。仍以 Cauchy 应力为例,设在时空系 φ 中简单材料内变量形式的本构方程及内变量演化方程为

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{X},t) = \hat{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{F},T,\boldsymbol{G},\xi_\beta) \quad (\beta = 1,\cdots,n) \tag{5.2.20a}$$

$$\dot{\xi}_\alpha = f_\alpha(\boldsymbol{F},T,\boldsymbol{G},\xi_\beta) \quad (\alpha = 1,\cdots,n;\beta = 1,\cdots,n) \tag{5.2.20b}$$

构架无关原理要求在时空系 $\bar{\varphi}$ 中其 Cauchy 应力的本构方程也必须具有同样的形式,即有

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{X}, \bar{t}) = \hat{\boldsymbol{\sigma}}(\bar{\boldsymbol{F}}, \bar{T},\bar{\boldsymbol{G}},\bar{\xi}_\beta) \tag{5.2.21a}$$

$$\dot{\bar{\xi}}_\alpha = f_\alpha(\bar{\boldsymbol{F}}, \bar{T},\bar{\boldsymbol{G}},\bar{\xi}_\beta) \tag{5.2.21b}$$

这里尽管自变量和因变量都是在时空系 $\bar{\varphi}$ 中量度的因而都带有"-",但是(5.2.21)式中的本构函数 $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$、$f_\alpha$ 却是分别与(5.2.20)式中的函数 $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$、$f_\alpha$ 完全相同的。假设其中的内变量 ξ_α 都为与时空无关的标量,即都是 Lagrange 型的内变量,则其时空变换下的等价变换式将为

$$\bar{\xi}_\alpha = \xi_\alpha \tag{5.2.22a}$$

而 $\boldsymbol{F}$、T、$\boldsymbol{G}$、$\boldsymbol{\sigma}$ 的时空变换式分别为

$$\bar{\boldsymbol{F}} = \boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{F}, \quad \bar{T} = T, \quad \bar{\boldsymbol{G}} = \boldsymbol{G} \tag{5.2.22b}$$

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}} \tag{5.2.23}$$

于是,类似于前面的推导方法,利用式(5.2.20)、式(5.2.21)、式(5.2.22)和式(5.2.23),可得

$$\boldsymbol{Q}\cdot\hat{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{F},T,\boldsymbol{G},\xi_\beta)\cdot\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}} = \hat{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{F},T,\boldsymbol{G},\xi_\beta) \tag{5.2.24a}$$

$$\dot{\xi}_\alpha = f_\alpha(\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{F},T,\boldsymbol{G},\xi_\beta) \tag{5.2.24b}$$

式(5.2.24)对任意的正交张量 Q 都成立,特别地当取 $Q=\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}$ 时,式(5.2.24)成为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\cdot\hat{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{F},T,\boldsymbol{G},\xi_\beta)\cdot\boldsymbol{R} &= \hat{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{F},T,\boldsymbol{G},\xi_\beta)\\ &= \hat{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{U},T,\boldsymbol{G},\xi_\beta) = \boldsymbol{\sigma}^*(\boldsymbol{E},T,\boldsymbol{G},\xi_\beta)\end{aligned} \tag{5.2.25a}$$

$$\dot{\xi}_\alpha = f_\alpha(\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{F},T,\boldsymbol{G},\xi_\beta) = f_\alpha(\boldsymbol{U},T,\boldsymbol{G},\xi_\beta) = f_\alpha^*(\boldsymbol{E},T,\boldsymbol{G},\xi_\beta) \tag{5.2.25b}$$

将(5.2.25a)式的两端左点乘以 $\boldsymbol{R}$、右点乘以 $\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}$,则可得简单材料 Cauchy 应力张量内变量形式本构关系的简化形式以及内变量的演化方程:

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{X},t) = \boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{\sigma}^*(\boldsymbol{E},T,\boldsymbol{G},\xi_\beta)\cdot\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} \tag{5.2.26a}$$

$$\dot{\xi}_\alpha = f_\alpha^*(\boldsymbol{E},T,\boldsymbol{G},\xi_\beta) \tag{5.2.26b}$$

而 P-K 应力张量内变量形式本构函数的简化形式则为

$$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{X},t) = \boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{S}^*(\boldsymbol{E},T,\boldsymbol{G},\xi_\beta) \tag{5.2.27}$$

$$\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{X},t) = \boldsymbol{\Sigma}^*(\boldsymbol{E},T,\boldsymbol{G},\xi_\beta) \tag{5.2.28}$$

5.3　许可性原理对本构方程形式的限制

本节我们将以第一类 P-K 应力 $\boldsymbol{S}$ 为主要研究对象,同时为了书写简单起见本节将用内变量理论来叙述,然后指出泛函表述的相应结果。参照简单材料 Cauchy 应力本构方程内变量表述的公式(5.2.9)′式,简单材料第一类 P-K 应力 $\boldsymbol{S}$、比熵 s、比自由能 ψ 和 E 氏热流矢量 $\boldsymbol{h}$ 本构方程的内变量表述形式可写为

$$\begin{cases}\boldsymbol{S} = \hat{\boldsymbol{S}}(\boldsymbol{F},T,\boldsymbol{G},\xi_\beta)\\ s = \hat{s}(\boldsymbol{F},T,\boldsymbol{G},\xi_\beta)\\ \psi = \hat{\psi}(\boldsymbol{F},T,\boldsymbol{G},\xi_\beta)\\ \boldsymbol{h} = \hat{\boldsymbol{h}}(\boldsymbol{F},T,\boldsymbol{G},\xi_\beta)\\ \dot{\xi}_\alpha = f_\alpha(\boldsymbol{F},T,\boldsymbol{G},\xi_\beta)\quad(\alpha=1,\cdots,n;\beta=1,\cdots,n)\end{cases} \tag{5.3.1}$$

当然构架无关性要求各本构函数应具有相应的简化形式,但下面的推理不依赖于这些要求。许可性原理要求,本构方程(5.3.1)式必须和质量守恒、动量守恒、能量守恒方程以及熵不等式等相容。这些方程可写出为(2.9 节式(2.9.3)、3.4 节式

(3.4.23a)、4.1 节式(4.1.8)、4.3 节式(4.3.14))

$$\begin{cases}\dot{\rho}+\rho\operatorname{div}\boldsymbol{v}=0\\ \rho_0\dot{\boldsymbol{v}}=\rho_0\boldsymbol{b}+\mathrm{DIV}\boldsymbol{S}\\ \rho\dot{u}\equiv\rho(\dot{\psi}+T\dot{s}+s\dot{T})=\boldsymbol{\sigma}:\boldsymbol{D}+\rho r-\operatorname{div}\boldsymbol{h}=\dfrac{\rho}{\rho_0}\boldsymbol{S}:\dot{\boldsymbol{F}}+\rho r-\operatorname{div}\boldsymbol{h}\end{cases}\tag{5.3.2}$$

$$\rho\delta\equiv-\rho(\dot{\psi}+s\dot{T})+\boldsymbol{\sigma}:\boldsymbol{D}-\frac{1}{T}\boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{g}=-\rho(\dot{\psi}+s\dot{T})+\frac{\rho}{\rho_0}\boldsymbol{S}:\dot{\boldsymbol{F}}-\frac{1}{T}\boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{g}\geqslant 0\tag{5.3.3}$$

在式(5.3.2)和式(5.3.3)中,我们把由 $\boldsymbol{\sigma}$ 表达的单位瞬时体积的变形功率转化成了由 $\boldsymbol{S}$ 表达的式子(3.5 节式(3.5.22)):

$$\boldsymbol{\sigma}:\boldsymbol{D}=\frac{\rho}{\rho_0}\boldsymbol{S}:\dot{\boldsymbol{F}}\tag{5.3.4}$$

当我们将 L 氏坐标 $\boldsymbol{X}$ 和时间 t 作为自变量而将 E 氏坐标 $\boldsymbol{x}$ 以及 T、ρ、$\boldsymbol{S}$、s、ψ、$\boldsymbol{h}$、ξ_α 作为待求的未知量时$\left(\boldsymbol{F}=\dfrac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial\boldsymbol{X}},\boldsymbol{G}=\dfrac{\partial T}{\partial\boldsymbol{X}},\boldsymbol{g}=\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{F}^{-1}、\boldsymbol{v}=\dot{\boldsymbol{x}}\right.$ 就都不是未知量了$\Big)$,共有 $19+n$ 个未知量,而式(5.3.2)和式(5.3.1)恰有 $19+n$ 个方程,因此式(5.3.2)和式(5.3.1)组成了封闭的连续介质力学基本方程组,它们通常是可以相容的,不会对本构方程的形式提出什么限制。下面我们将要说明,熵不等式(5.3.3)式会对本构方程(5.3.1)式的形式加上一些很强的限制,所以所谓的许可性原理主要是指熵不等式对本构方程形式的要求。

对 ψ 的本构方程求随体导数,有

$$\dot{\psi}=\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial\boldsymbol{F}}:\dot{\boldsymbol{F}}+\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial T}\dot{T}+\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial\boldsymbol{G}}\cdot\dot{\boldsymbol{G}}+\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial\xi_\beta}\dot{\xi}_\beta\tag{5.3.5}$$

将此式代入熵不等式(5.3.3)式,有

$$\rho\delta\equiv\left[\frac{\rho}{\rho_0}\boldsymbol{S}-\rho\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial\boldsymbol{F}}\right]:\dot{\boldsymbol{F}}-\rho\left(s+\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial T}\right)\dot{T}-\rho\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial\boldsymbol{G}}\cdot\dot{\boldsymbol{G}}-\rho\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial\xi_\beta}\dot{\xi}_\beta-\frac{\boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{g}}{T}\geqslant 0\tag{5.3.6}$$

式(5.3.6)对任意的宏观微过程都成立,即对任意的 $\dot{\boldsymbol{F}}$、$\dot{T}$、$\dot{\boldsymbol{G}}$ 都要成立。由于式(5.3.6)中 $\dot{\boldsymbol{F}}$、$\dot{T}$、$\dot{\boldsymbol{G}}$ 的系数都是与它们自身无关的,故由 $\dot{\boldsymbol{F}}$、$\dot{T}$、$\dot{\boldsymbol{G}}$ 的任意性我们即可推知式(5.3.6)中它们的系数都必须等于 0,即有

$$\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \boldsymbol{G}} = \boldsymbol{0} \tag{5.3.7}$$

$$s + \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial T} = 0 \tag{5.3.8}$$

$$\frac{1}{\rho_0}\boldsymbol{S} - \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \boldsymbol{F}} = \boldsymbol{0} \tag{5.3.9}$$

式(5.3.7)说明比自由能 ψ 的本构函数中事实上并不包含温度梯度 $\boldsymbol{G}$；而式(5.3.9)和式(5.3.8)则说明，$\boldsymbol{S}$ 和 s 可以分别作为“热力学力”而由 ψ 对相应的“热力学距离”$\boldsymbol{F}$ 和 T 求导而得到，故当将 $\boldsymbol{F}$ 和 T 作为自变量时，ψ 是一种所谓的“热力学势”函数，同时 $\boldsymbol{S}$ 和 s 的本构函数中事实上也并不包含温度梯度 $\boldsymbol{G}$，即我们可写出如下式子：

$$\psi = \hat{\psi}(\boldsymbol{F}, T, \xi_\beta) \tag{5.3.10}$$

$$s = -\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial T} = \hat{s}(\boldsymbol{F}, T, \xi_\beta) \tag{5.3.11}$$

$$\boldsymbol{S} = \rho_0 \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \boldsymbol{F}} = \hat{\boldsymbol{S}}(\boldsymbol{F}, T, \xi_\beta) \tag{5.3.12}$$

这一段所说的结论以及由式(5.3.10)～式(5.3.12)所表达的结果，就是熵不等式对内变量型本构方程的限制。这种限制主要包括两点内容：(1) 比自由能 ψ 是不依赖于温度梯度 $\boldsymbol{G}$ 的；(2) 比自由能 ψ 是热力学势。这种限制是很强的，而且有着极其重要的理论和实践价值，因为这里的第一点结论说明，为了得到自由能的本构关系，我们只需通过均匀温度分布的试验即可；而第二点则说明各种热力学量的本构关系并不都是独立的，我们只需得到比自由能 ψ 的本构关系即可通过求导及简单的代数运算而得到其他热力学量(如 $\boldsymbol{S}$、s)的本构关系，同时由于这些热力学量也必然是不依赖于温度梯度 $\boldsymbol{G}$ 的，故我们也可通过均匀温度分布的试验而测量它们的本构关系。

利用式(5.3.7)、式(5.3.8)和式(5.3.9)，熵不等式(5.3.6)式可转换为如下的形式：

$$\rho\delta \equiv -\rho \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \xi_\beta}\dot{\xi}_\beta - \frac{\boldsymbol{h} \cdot \boldsymbol{g}}{T} \geqslant 0 \tag{5.3.13}$$

式(5.3.13)称之为熵不等式的简化形式，它的前 n 项之和代表内变量耗散，最后一项则代表热传导耗散。式(5.3.13)表明，单位瞬时体积介质的总耗散非负，它反映了宏观热力学过程的不可逆性特征。如我们在4.3节所曾指出的，如果介

质中的各种内耗散机制是相互独立的，则不但物理上应该要求而且数学上也可以严格证明每种单独的内耗散机制所引起的内耗散也都必须非负，故有

$$\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \xi_\beta}\dot{\xi}_\beta \leqslant 0 \quad (\beta = 1,2,\cdots,n,\text{不求和}) \tag{5.3.14}$$

$$\boldsymbol{h} \cdot \boldsymbol{g} \leqslant 0 \tag{5.3.15}$$

与式(5.3.13)中前 n 项对 β 约定求和不同，式(5.3.14)不对 β 约定求和而代表 n 个独立的不等式，每一个不等式表明每一种单独的内变量耗散过程都使自由能减小，即介质内部自发的不可逆过程向着自由能减小的方向进行（这在形式上有点类似于自由落体必然向着势能减小的方向落下）；式(5.3.15)则表明，热量自发地向温度梯度相反的半空间传导，这是热传导不可逆性的体现。

利用 $\boldsymbol{\sigma}$、$\boldsymbol{\Sigma}$ 和 $\boldsymbol{S}$ 之间的关系不难证明，$\boldsymbol{\sigma}$ 和 $\boldsymbol{\Sigma}$ 也可由热力学势函数 ψ 求导而得出：

$$\boldsymbol{\sigma} = \rho \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \boldsymbol{F}} \cdot \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}} \tag{5.3.16}$$

$$\boldsymbol{\Sigma} = \rho_0 \boldsymbol{F}^{-1} \cdot \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \boldsymbol{F}} = \rho_0 \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \boldsymbol{E}} \tag{5.3.17}$$

式(5.3.16)和式(5.3.17)的第一式是很容易证明的，而式(5.3.17)的第二式，则可以通过 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{F}$ 间的关系以及复合函数求导的链锁法则而导出，读者可作为练习证明之。当然我们也可以直接从 $\boldsymbol{\sigma}$ 和 $\boldsymbol{\Sigma}$ 的含内变量的本构函数出发，用类似于前面所讲的方法来证明式(5.3.16)和式(5.3.17)，这些也留给读者自己作为练习去完成。

下面我们指出，以上的推理过程同样适用于本构方程的泛函表述。仍以简单材料为例，设前面所述各量本构方程的泛函表述为

$$\begin{cases} \boldsymbol{S} = \hat{\boldsymbol{S}}[\boldsymbol{F}^t, T^t, \boldsymbol{G}^t], \quad s = \hat{s}[\boldsymbol{F}^t, T^t, \boldsymbol{G}^t] \\ \psi = \hat{\psi}[\boldsymbol{F}^t, T^t, \boldsymbol{G}^t], \quad \boldsymbol{h} = \hat{\boldsymbol{h}}[\boldsymbol{F}^t, T^t, \boldsymbol{G}^t] \end{cases} \tag{5.3.1$'$}$$

其中 $\boldsymbol{F}^t$、T^t、$\boldsymbol{G}^t$ 分别表示粒子直至现时刻 t 为止的变形梯度历史、温度历史和 L 氏温度梯度历史。此时我们可将 ψ 等因变量对自变量 $\boldsymbol{F}^t$、T^t 和 $\boldsymbol{G}^t$ 的依赖分解为对其现时值 $\boldsymbol{F}(t)$、$T(t)$、$\boldsymbol{G}(t)$ 的依赖和对其过去历史 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{p}}^t$、$T_{\mathrm{p}}^t$、$\boldsymbol{G}_{\mathrm{p}}^t$ 的依赖关系，记为

$$\psi = \hat{\psi}[\boldsymbol{F}(t), T(t), \boldsymbol{G}(t);\ \boldsymbol{F}_{\mathrm{p}}^t, T_{\mathrm{p}}^t, \boldsymbol{G}_{\mathrm{p}}^t] \tag{5.3.18}$$

ψ 等量对现时值的依赖即是材料的瞬态响应，对其过去历史的依赖就是材料历史记忆效应的反映。由式(5.3.18)对 ψ 求随体导数，可得

$$\dot{\psi} = \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \boldsymbol{F}} : \dot{\boldsymbol{F}} + \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial T}\dot{T} + \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \boldsymbol{G}} \cdot \dot{\boldsymbol{G}} + \mathscr{D}[\boldsymbol{F}^t, T^t, \boldsymbol{G}^t] \tag{5.3.19}$$

其中前3项可根据通常函数求导的链锁法则而得出，$\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \boldsymbol{F}}$、$\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial T}$、$\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \boldsymbol{G}}$等是$\hat{\psi}$对现时值$\boldsymbol{F}$、$T$、$\boldsymbol{G}$的导数，而最后一项$\mathscr{D}$称为泛函$\hat{\psi}$的Fre'chet导数，可由泛函分析中求导的链锁法则而得出，即它等于$\hat{\psi}$对各过去历史$\boldsymbol{F}_{\mathrm{p}}^t$、$T_{\mathrm{p}}^t$、$\boldsymbol{G}_{\mathrm{p}}^t$的Fre'chet导数与这些过去历史量对时间$t$的导数的乘积和。类似于前面对内变量表述的处理方法，将(5.3.19)式代入熵不等式(5.3.3)式之中，并利用宏观微过程中$\dot{\boldsymbol{F}}$、$\dot{T}$、$\dot{\boldsymbol{G}}$的任意性，可得

$$\boldsymbol{S} = \rho_0 \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \boldsymbol{F}} \tag{5.3.20}$$

$$s = -\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial T} \tag{5.3.21}$$

$$\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \boldsymbol{G}} = \boldsymbol{0} \tag{5.3.22}$$

以及单位瞬时体积介质熵不等式的简化形式：

$$-\rho\mathscr{D} - \frac{\boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{g}}{T} \geqslant 0 \tag{5.3.23}$$

将式(5.3.23)与式(5.3.13)对比，可见泛函表述中的$(-\mathscr{D})$恰是与内变量表述中单位质量的内变量耗散$\left(-\frac{\partial \psi}{\partial \xi_\beta}\dot{\xi}_\beta\right)$相对应的。

本书不能细讲泛函分析的有关知识，但在下面我们将通过一个简单的例子来说明泛函及其泛函Fre'chet导数的概念。这个例子就是线性黏弹性材料的一维应力条件下的积分型本构关系。

线性黏弹性材料积分型本构关系的思想是：材料在现时刻t的应力$\sigma(t)$是由t之前材料的整个应变历史$\varepsilon^t = \varepsilon(t-\tau) = \varepsilon(t')$所引起的，而整个过去的历史所引起的应力则等于$t$之前各个微小时间间隔$[t', t'+\mathrm{d}t']$上的应变增量$\mathrm{d}\varepsilon$对$t$时刻应力贡献$\mathrm{d}\sigma$的累积和($t'$是$t$之前的任一时刻，$\tau = t - t'$为流逝时间)。材料有记忆特性使得各微小时间间隔$[t', t'+\mathrm{d}t']$上的弹性模量是不同的，与从现时刻$t$向$t'$回溯的流逝时间$\tau$有关，记之为$E(\tau) = E(t-t')$。因有

$$\mathrm{d}\varepsilon = \dot{\varepsilon}(t')\mathrm{d}t', \quad \mathrm{d}\sigma = E(t-t')\mathrm{d}\varepsilon = E(t-t')\dot{\varepsilon}(t')\mathrm{d}t' \tag{5.3.24}$$

根据前面所述的线性黏弹性材料积分型本构关系的思想，我们有

$$\sigma(t)=\int_{-\infty}^{t}E(t-t')\dot{\varepsilon}(t')\mathrm{d}t'=\int_{0}^{\infty}E(\tau)\dot{\varepsilon}(t-\tau)\mathrm{d}\tau\equiv\hat{\sigma}[\varepsilon^{t}] \tag{5.3.25}$$

式(5.3.25)中的弹性模量 $E(\tau)$是材料本身的性质，根据记忆减退原理它会随着流逝时间的增加而松弛下降，并有 $E(\infty)=0$，故通常称之为松弛模量(relaxation modulus)。因为对于给定的材料(即对于给定的 $E(\tau)$)，$\sigma(t)$是由直至 t 为止的整个应变历史 $\varepsilon(t-\tau)=\varepsilon^{t}$ 按式(5.3.25)所决定的，所以式(5.3.25)就是泛函 $\sigma(t)=\hat{\sigma}[\varepsilon^{t}]$的一个具体例子。将式(5.3.25)进行分部积分，考虑到式中的 $\dot{\varepsilon}(t-\tau)$是对 $t'=t-\tau$ 的导数，与对积分变量 τ 的导数差一符号，故可有

$$\begin{aligned}\sigma(t)&=\int_{0}^{\infty}E(\tau)\dot{\varepsilon}(t-\tau)\mathrm{d}\tau=-E(\tau)\varepsilon(t-\tau)\Big|_{0}^{\infty}+\int_{0}^{\infty}\dot{E}(\tau)\varepsilon(t-\tau)\mathrm{d}\tau\\&=-E(\infty)\varepsilon(-\infty)+E(0)\varepsilon(t)+\int_{0}^{\infty}\dot{E}(\tau)\varepsilon(t-\tau)\mathrm{d}\tau\\&=E(0)\varepsilon(t)+\int_{0}^{\infty}\dot{E}(\tau)\varepsilon(t-\tau)\mathrm{d}\tau\end{aligned}$$

即

$$\sigma(t)=E(0)\varepsilon(t)+\int_{0}^{\infty}\dot{E}(\tau)\varepsilon(t-\tau)\mathrm{d}\tau \tag{5.3.26}$$

式(5.3.26)中的第一项表示 t 时刻应变 $\varepsilon(t)$按当时的瞬态弹性模量 $E(0)$所引起的应力，是材料瞬态响应的体现，由积分所表达的第二项即是 t 之前历史上的应变 $\varepsilon_{p}^{t}=\varepsilon(t-\tau)$对 t 时刻应力的贡献(t 时刻应变的值对积分结果没有影响)，(5.3.26)式就是(5.3.18)式的一个具体例子。

对式(5.3.26)求导，有

$$\dot{\sigma}(t)=E(0)\,\dot{\varepsilon}(t)+\int_{0}^{\infty}\dot{E}(\tau)\dot{\varepsilon}(t-\tau)\mathrm{d}\tau \tag{5.3.27}$$

式(5.3.27)就是前述式(5.3.19)的一个例子，其中的第一项与式(5.3.19)中的前 3 项相对应，而其中的第二项积分事实上就是泛函(5.3.25)式或(5.3.26)式的 Fre'chet 导数。

5.4 材料对称性原理对本构方程形式的限制

当材料本身具有某种构造上的对称性时，也会对其本构关系的形式提出某些

限制，我们将这称之为本构理论中的材料对称性原理。事实上，在线弹性小变形的经典弹性力学和复合材料力学中大家早就已经接触过这一原理了，我们可以将之用以下的语言简单地加以回顾。

设材料的线弹性本构关系为

$$\sigma_{ij} = M_{ijkl}\epsilon_{kl}$$

其中，4 阶张量 M_{ijkl} 为弹性模量张量，2 阶张量 σ_{ij} 和 ϵ_{kl} 分别为应力张量和应变张量。在复合材料力学中曾指出(或参见 6.1 节中的说明)：在最一般的情况下即对最一般的不存在任何对称性的线弹性各向异性材料(anisotropic or aeolotropic materials)，弹性模量张量 M_{ijkl} 将会有 21 个独立的弹性材料常数；如果材料存在着一个对称平面，则弹性模量张量 M_{ijkl} 将只有 13 个独立的弹性材料常数；如果材料存在着两个垂直的对称平面(可以证明这也等价于材料存在着 3 个两两互相垂直的对称平面)，则弹性模量张量 M_{ijkl} 将只有 9 个独立的弹性材料常数，这就是通常所称的正交各向异性材料(orthotropic materials)；如果材料存在着一个旋转对称轴，即材料对于包含这个对称轴的任何平面都是对称的，则弹性模量张量 M_{ijkl} 将只有 5 个独立的弹性材料常数，这就是所谓的横观各向同性材料(transversely isotropic materials)；而如果材料在一切方向上的性质都是相同的，则弹性模量张量 M_{ijkl} 将只有 2 个独立的弹性材料常数，这就是通常所说的各向同性材料(isotropic materials)。因为材料对称性越多独立弹性材料常数越少，实际上意味着材料本构方程的形式越简单，所以这种随着材料对称性的增加，独立弹性材料常数越来越少的结论，事实上就是材料对称性对材料本构关系形式的一种限制。对于非线性的以及有记忆能力的任何材料，当材料具有某种对称性时，这种材料的对称性也将对其本构关系的形式提出某种限制，我们将之称为本构理论中的材料对称性原理。但是为了容易理解起见，我们在下面的叙述中将首先以在同一构形中对 L 氏坐标进行正交坐标变换的方法介绍在工程材料中最重要的各向同性固体材料的本构关系，作为对材料对称性原理的一个例证，然后再在此基础上以对参考构形进行映射变换的方法简单介绍所谓的材料同格群的概念。

5.4.1 各向同性材料和各向同性张量泛函

我们把在某一参考构形中沿一切方向都具有相同性质的材料称为各向同性材料。用比较严格的语言来讲，即：如果材料存在着某一个构形，当我们以这一构形为参考构形时，不管我们对描述其变形的 Lagrange 坐标系做怎样的正交变换，描述材料性质的本构关系的数学形式都是相同的，则我们将称此种材料为(对于此参

考构形的初始)各向同性材料,并且称材料的这一参考构形为其无歪斜构形(undistorted configuration)。如果材料不存在无歪斜构形,则材料便是各向异性的。现在我们就以各向同性材料为例来阐述材料对称性原理。

设我们在各向同性材料的无歪斜构形中分别取了两个不同的 Lagrange 坐标系 $\boldsymbol{X}$ 和$\overline{\boldsymbol{X}}$,假设它们以坐标轴间的任意正交变换张量 $\boldsymbol{Q}$ 和原点间的任意平移矢量 $\overline{\boldsymbol{X}}_0$ 相联系:

$$\overline{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{X} + \overline{\boldsymbol{X}}_0 \tag{5.4.1a}$$

于是我们有

$$\frac{\partial \overline{\boldsymbol{X}}}{\partial \boldsymbol{X}} = \boldsymbol{Q}, \quad \frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial \overline{\boldsymbol{X}}} = \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}} \tag{5.4.1b}$$

如果以 $\boldsymbol{x}$ 表示粒子$\boldsymbol{X}$(即$\overline{\boldsymbol{X}}$)的瞬时位置矢量或 Euler 坐标,而以 $\boldsymbol{F}$ 和$\bar{\boldsymbol{F}}$分别表示粒子的变形梯度张量在两个不同 L 氏坐标系中的表象,则利用复合函数求导的链锁法则,我们显然有

$$\bar{\boldsymbol{F}} = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \overline{\boldsymbol{X}}} = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{X}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial \overline{\boldsymbol{X}}} = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}} \tag{5.4.2}$$

式(5.4.2)就是在 L 氏坐标变换下变形梯度张量 $\boldsymbol{F}$ 的变换法则。请注意,它和 2.10 节中所讲的变形梯度张量 $\boldsymbol{F}$ 的时空变换式(2.10.19)式的物理含义和数学形式都是完全不同的。

以式(5.4.2)为基础,我们容易证明如下各式(请读者作为练习证明之):

$$\begin{cases} \bar{\boldsymbol{C}} = \boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}, & \bar{\boldsymbol{U}} = \boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}, & \bar{\boldsymbol{E}} = \boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}} \\ \bar{\boldsymbol{T}} = \boldsymbol{T}, & \bar{\boldsymbol{G}} = \boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{G}, & \bar{\boldsymbol{H}} = \boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{H} \end{cases} \tag{5.4.3}$$

$$\begin{cases} \bar{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{B}, & \bar{\boldsymbol{V}} = \boldsymbol{V}, & \bar{\boldsymbol{e}} = \boldsymbol{e} \\ \bar{\boldsymbol{g}} = \boldsymbol{g}, & \bar{\boldsymbol{h}} = \boldsymbol{h}, & \bar{\boldsymbol{R}} = \boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}} \end{cases} \tag{5.4.4}$$

$$\bar{\boldsymbol{\Sigma}} = \boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{\Sigma} \cdot \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}, \quad \bar{\boldsymbol{S}} = \boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}, \quad \bar{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\sigma} \tag{5.4.5}$$

式(5.4.3)～式(5.4.5)中各量的含义我们以前都曾经讲过,这里不再加以叙述。下面我们将以 L 氏坐标变换下有关物理量的变换公式(5.4.3)式～(5.4.5)式为基础,以各向同性简单材料 Cauchy 应力张量的本构泛函为例,来说明材料对称性原理对其本构方程形式的限制。

根据材料对称性原理的含义,如果材料是各向同性的,则意味着在无歪斜构形中以式(5.4.1a)相联系的任意两个 L 氏坐标系 $\boldsymbol{X}$ 和$\overline{\boldsymbol{X}}$中,材料应该有同样的本构

关系形式，于是根据 5.2 节中简单材料 Cauchy 应力简化形式的公式(5.2.17b)式，我们即应该同时有如下二式成立：

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{X},t)=\boldsymbol{R}(t)\cdot\hat{\boldsymbol{\sigma}}[\boldsymbol{E}^t,T^t]\cdot\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}(t)\quad(\text{L 氏坐标 }\boldsymbol{X}\text{ 中})\tag{5.4.6}$$

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}(\bar{\boldsymbol{X}},t)=\bar{\boldsymbol{R}}(t)\cdot\hat{\boldsymbol{\sigma}}[\bar{\boldsymbol{E}}^t,\bar{T}^t]\cdot\bar{\boldsymbol{R}}^{\mathrm{T}}(t)\quad(\text{L 氏坐标 }\bar{\boldsymbol{X}}\text{ 中})\tag{5.4.7}$$

在式(5.4.6)和式(5.4.7)中，我们已经利用了构架无关原理，所以式中的纯变形量和温度是直至现时刻 t 为止的历史量 $\boldsymbol{E}^t$ 和 T^t，而式中的旋转张量却只有 t 时刻的现时值 $\boldsymbol{R}(t)$；而且，在式(5.4.6)和式(5.4.7)中，我们也已经利用了许可性原理，所以在本构泛函中并不出现温度梯度矢量的历史 $\boldsymbol{G}^t$。材料对称性原理的核心是：式(5.4.6)和式(5.4.7)不但具有同样的形式，而且两个式子中的泛函 $\hat{\boldsymbol{\sigma}}[\boldsymbol{E}^t,T^t]$ 和 $\hat{\boldsymbol{\sigma}}[\bar{\boldsymbol{E}}^t,\bar{T}^t]$ 具有完全相同的形式。根据式(5.4.3)～式(5.4.5)，在 L 氏坐标的正交变换之下，我们有各量的如下变换公式：

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}=\boldsymbol{\sigma},\quad\bar{\boldsymbol{R}}=\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}},\quad\bar{\boldsymbol{E}}=\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}},\quad\bar{T}=T\tag{5.4.8}$$

将式(5.4.8)代入式(5.4.7)中，并利用式(5.4.6)，我们有

$$\boldsymbol{R}(t)\cdot\hat{\boldsymbol{\sigma}}[\boldsymbol{E}^t,T^t]\cdot\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}(t)=\boldsymbol{R}(t)\cdot\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\cdot\hat{\boldsymbol{\sigma}}[\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{E}^t\cdot\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}},T^t]\cdot\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}(t)\tag{5.4.9}$$

将式(5.4.9)的两端同时左点乘以 $\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}(t)$、右点乘以 $\boldsymbol{R}(t)$，并利用 $\boldsymbol{R}(t)$ 的正交性，可有

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}[\boldsymbol{E}^t,T^t]=\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\cdot\hat{\boldsymbol{\sigma}}[\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{E}^t\cdot\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}},T^t]\cdot\boldsymbol{Q}$$

再将此式两端同时左点乘以 $\boldsymbol{Q}$、右点乘以 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}$，并利用 $\boldsymbol{Q}$ 的正交性，即得

$$\boldsymbol{Q}\cdot\hat{\boldsymbol{\sigma}}[\boldsymbol{E}^t,T^t]\cdot\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}=\hat{\boldsymbol{\sigma}}[\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{E}^t\cdot\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}},T^t]\tag{5.4.10}$$

式(5.4.10)即是材料对称性原理对式(5.4.6)中本构泛函 $\hat{\boldsymbol{\sigma}}[\boldsymbol{E}^t,T^t]$ 的形式的限制，由于材料是各向同性的，所以要求式(5.4.10)对任意的正交张量 $\boldsymbol{Q}$，即满足公式

$$\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{I}\tag{5.4.11}$$

的全体正交张量 $\boldsymbol{Q}$ 的集合都要成立。利用群论的知识，我们可以证明(见 5.4.3 节中的相关内容)：全体正交张量的集合组成一个所谓的群(group)，称之为正交张量群。我们称，对一切正交张量 $\boldsymbol{Q}$ 都要满足式(5.4.10)要求的泛函 $\hat{\boldsymbol{\sigma}}[\boldsymbol{E}^t,T^t]$ 为自变量张量历史 $\boldsymbol{E}^t$ 的一个各向同性张量泛函，所以以上的推理说明：各向同性材料 Cauchy 应力张量的本构关系(5.4.6)式中的泛函 $\hat{\boldsymbol{\sigma}}[\boldsymbol{E}^t,T^t]$ 必定为 $\boldsymbol{E}^t$ 的各向同性张量泛函，并且称正交张量群为各向同性材料的同格群(isotropic group)。

如果材料并不是各向同性的,而只是具有部分的对称性,则在数学上将表现为我们将不能要求式(5.4.10)对一切正交张量 $\boldsymbol{Q}$ 都成立,而是只对正交张量群中的某一个子群(subgroup)才成立,此时,我们将称这个子群为该种具有部分对称性材料的所谓的同格群(其英文名称仍为 isotropic group)。在群论和晶体物理中,人们会知道正交张量群最大的子群是其自身,而其最小的子群是所谓的三斜群,它只包含 2 个正交张量 $\pm \boldsymbol{I}$;同时,正交张量群也只是所谓的“幺模群”的一个子群(见 5.4.3 节中的相关内容)。

最后,我们再对各向同性材料第一类和第二类 P-K 应力本构关系的形式加以说明。根据前面已经讲过的内容,易知满足构架无关原理和许可性原理的简单材料的第一类 P-K 应力 $\boldsymbol{S}$ 和第二类 P-K 应力 $\boldsymbol{\Sigma}$ 的本构关系将分别具有如下形式:

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{R}(t) \cdot \hat{\boldsymbol{S}}[\boldsymbol{E}^t, T^t] \tag{5.4.12}$$

$$\boldsymbol{\Sigma} = \hat{\boldsymbol{\Sigma}}[\boldsymbol{E}^t, T^t] \tag{5.4.13}$$

经过与前面对 Cauchy 应力 $\boldsymbol{\sigma}$ 本构关系(5.4.6)式特性的类似的分析过程,容易证明:如果材料是各向同性的,则式(5.4.12)和式(5.4.13)中的泛函 $\hat{\boldsymbol{S}}[\boldsymbol{E}^t, T^t]$和$\hat{\boldsymbol{\Sigma}}[\boldsymbol{E}^t, T^t]$也必然是 L 氏应变张量历史$\boldsymbol{E}^t$ 的各向同性张量泛函,即对任意的正交张量 $\boldsymbol{Q}$,都有

$$\boldsymbol{Q} \cdot \hat{\boldsymbol{S}}[\boldsymbol{E}^t, T^t] \cdot \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}} = \hat{\boldsymbol{S}}[\boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{E}^t \cdot \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}, T^t] \tag{5.4.14}$$

$$\boldsymbol{Q} \cdot \hat{\boldsymbol{\Sigma}}[\boldsymbol{E}^t, T^t] \cdot \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}} = \hat{\boldsymbol{\Sigma}}[\boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{E}^t \cdot \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}, T^t] \tag{5.4.15}$$

这些结论读者可作为练习证明之。

5.4.2 材料各向同性和空间各向同性

在前面的推理中,我们是先利用构架无关原理(以及许可性原理),后利用材料对称性原理,但是这些原理都是相互独立的,所以我们也可以先利用材料对称性原理(以及许可性原理),后利用构架无关原理。现在我们仍以简单材料 Cauchy 应力本构泛函为例,看看能得到什么结论。

设简单材料 Cauchy 应力 $\boldsymbol{\sigma}$ 的本构泛函为

$$\boldsymbol{\sigma} = \hat{\boldsymbol{\sigma}}[\boldsymbol{F}^t, T^t] \quad (\text{在 L 氏坐标系 } \boldsymbol{X} \text{ 中}) \tag{5.4.16}$$

这里我们已经利用了许可性原理,所以泛函中不出现温度梯度的历史$\boldsymbol{G}^t$。如果材料是各向同性的,则在与L氏坐标系 $\boldsymbol{X}$ 以式(5.4.1a)相联系的L氏坐标系 $\bar{\boldsymbol{X}}$ 中,本构泛函 $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ 将具有同样的形式,即我们应同时有

$$\boldsymbol{\sigma} = \hat{\boldsymbol{\sigma}}[\boldsymbol{F}^t, T^t], \quad \bar{\boldsymbol{\sigma}} = \hat{\boldsymbol{\sigma}}[\bar{\boldsymbol{F}}^t, \bar{T}^t] \tag{5.4.17}$$

式(5.4.17)中尽管自变量和因变量都是在坐标系 $\bar{X}$ 中度量的因而带上了"-",但是它们之间的依赖关系即本构泛函 $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ 却仍与式(5.4.6)中的 $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ 完全相同。根据有关量在L氏坐标变换下的变换公式(5.4.2)式、(5.4.3)式、(5.4.5)式,我们有

$$\bar{\boldsymbol{F}}^t = \boldsymbol{F}^t \cdot \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}, \quad \bar{T}^t = T^t \tag{5.4.18}$$

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\sigma} \tag{5.4.19}$$

将(5.4.18)式、(5.4.19)式代入(5.4.17)式,并利用(5.4.16)式,我们有

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}[\boldsymbol{F}^t, T^t] = \hat{\boldsymbol{\sigma}}[\boldsymbol{F}^t \cdot \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}, T^t] \tag{5.4.20}$$

式(5.4.20)即是材料各向同性这一性质对其本构泛函 $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ 的形式所提出的限制,它必须对一切正交张量 $\boldsymbol{Q}$ 都要成立,我们可以将该式作为各向同性材料的数学定义。特别地,如果取 $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{R}^t$ 为粒子的旋转张量,则有

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}[\boldsymbol{F}^t, T^t] = \hat{\boldsymbol{\sigma}}[\boldsymbol{F}^t \cdot (\boldsymbol{R}^t)^{\mathrm{T}}, T^t] \tag{5.4.21}$$

利用变形梯度张量的左极分解式和旋转张量 $\boldsymbol{R}$ 的正交性,有

$$\boldsymbol{F}^t = \boldsymbol{V}^t \cdot \boldsymbol{R}^t, \quad \boldsymbol{V}^t = \boldsymbol{F}^t \cdot (\boldsymbol{R}^t)^{\mathrm{T}} \tag{5.4.22}$$

则式(5.4.21)成为

$$\boldsymbol{\sigma} = \hat{\boldsymbol{\sigma}}[\boldsymbol{F}^t, T^t] = \hat{\boldsymbol{\sigma}}[\boldsymbol{V}^t, T^t] = \widehat{\boldsymbol{\sigma}}[\boldsymbol{e}^t, T^t] \tag{5.4.23}$$

式(5.4.23)即是各向同性简单材料本构泛函 $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ 所必须具有的形式,即各向同性简单材料的Cauchy应力只能是左伸缩张量历史 $\boldsymbol{V}^t$(或E氏应变历史 $\boldsymbol{e}^t$)和温度历史 T^t 的任意泛函。这里我们强调指出式(5.4.23)是材料各向同性即材料对称性原理的体现。

下面我们再来应用构架无关原理。构架无关原理要求在相差任意正交变换 $\boldsymbol{Q}$ 的两个时空系 $\boldsymbol{x}$ 和 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 中本构泛函 $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ 应该有同样的形式,即我们应该同时有

$$\boldsymbol{\sigma} = \hat{\boldsymbol{\sigma}}[\boldsymbol{V}^t, T^t], \quad \bar{\boldsymbol{\sigma}} = \hat{\boldsymbol{\sigma}}[\bar{\boldsymbol{V}}^{\bar{t}}, \bar{T}^{\bar{t}}] \tag{5.4.24}$$

而在时空变换之下,我们有如下的各量间的时空变换关系:

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}, \quad \bar{\boldsymbol{V}}^{\bar{t}} = \boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{V}^t \cdot \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}, \quad \bar{T}^{\bar{t}} = T^t \tag{5.4.25}$$

由式(5.4.24)和式(5.4.25),可得

$$\boldsymbol{Q} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}[\boldsymbol{V}^t, T^t] \cdot \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}} = \hat{\boldsymbol{\sigma}}[\boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{V}^t \cdot \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}, T^t] \tag{5.4.26}$$

式(5.4.26)对一切正交张量 $\boldsymbol{Q}$ 都要成立,这表明泛函 $\hat{\boldsymbol{\sigma}}[\boldsymbol{V}^t, T^t]$ 必须是 $\boldsymbol{V}^t$ 的各向同性张量泛函。在这里我们强调指出:泛函 $\hat{\boldsymbol{\sigma}}[\boldsymbol{V}^t, T^t]$ 必须是 $\boldsymbol{V}^t$ 的各向同性张量泛函这一结论并不是材料各向同性所提出的要求,而是构架无关原理对本构泛函

所提出的要求，它是材料性能客观性的体现，但是它在数学形式上则和前面由材料各向同性所提出的对式(5.4.6)中泛函 $\hat{\boldsymbol{\sigma}}[\boldsymbol{E}^t, \boldsymbol{T}^t]$必须是各向同性张量泛函的要求(5.4.10)式是完全类似的。为了清楚起见，我们把式(5.4.10)所表达的事实称为"材料各向同性"，而把式(5.4.26)所表达的事实称为"空间各向同性"。

5.4.3　参考构形的变换和同格群

现在，我们再从参考构形变换的角度对材料对称性原理给出进一步的说明。在前面的讨论中我们以"在无歪斜构形中进行 L 式坐标的任意正交变换时材料的本构形式都不变"为出发点，定义和讨论了初始各向同性材料的本构关系，并将之作为材料对称性原理的重要例证。但是，需要指出的是，我们前面所讨论的这种材料对称性还并不是最一般意义上的材料对称性，我们所引出的初始各向同性材料实际上也并不是具有最多对称性的材料，这是因为，我们只讨论了在"某一个特定构形即无歪斜构形中"的 L 氏坐标变换，而且，还只是不涉及介质纯变形而在同一构形中的正交变换。事实上，材料的本构关系形式是与我们所取的参考构形紧密相关的，因此，一般意义上的材料对称性应是指"当对材料的参考构形进行某些特定的变换时其本构关系的形式不变的性质"。为了知识的相对完整性起见，下面我们对一般意义上的材料对称性原理和同格群的概念做一简要介绍。

我们知道，介质在历史上任意状态 b'(对应时刻 t')下相对于两个不同参考构形 b_1和 b_2(分别对应时刻 t_1和 t_2)的相对变形梯度$\boldsymbol{F}_{t_1}(t')$和$\boldsymbol{F}_{t_2}(t')$是通过参考构形 b_2对参考构形 b_1的相对变形梯度 $\boldsymbol{P}\equiv\boldsymbol{F}_{t_1}(t_2)$以及公式

$$\boldsymbol{F}_{t_1}(t') = \boldsymbol{F}_{t_2}(t')\cdot\boldsymbol{F}_{t_1}(t_2) = \boldsymbol{F}_{t_2}(t')\cdot\boldsymbol{P} \tag{5.4.27a}$$

相联系的，其中非奇异张量 $\boldsymbol{P}\equiv\boldsymbol{F}_{t_1}(t_2)$与历史上的时间无关。将 t'取为从 $-\infty$ 直至现时刻 t 的各个时刻，则式(5.4.27a)便可以写为材料对参考构形 b_1和 b_2的变形梯度历史$\boldsymbol{F}_{t_1}^t$和$\boldsymbol{F}_{t_2}^t$之间的关系，即

$$\boldsymbol{F}_{t_1}^t = \boldsymbol{F}_{t_2}^t\cdot\boldsymbol{F}_{t_1}(t_2) = \boldsymbol{F}_{t_2}^t\cdot\boldsymbol{P} \tag{5.4.27b}$$

假设以构形 b_1为参考构形时简单材料的本构关系为

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \hat{\boldsymbol{\sigma}}_1[\boldsymbol{F}_{t_1}^t] \tag{5.4.28a}$$

将式(5.4.27b)代入式(5.4.28a)，即有

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \hat{\boldsymbol{\sigma}}_1[\boldsymbol{F}_{t_2}^t\cdot\boldsymbol{P}]\equiv\hat{\boldsymbol{\sigma}}_2[\boldsymbol{F}_{t_2}^t] \tag{5.4.28b}$$

这里我们把泛函$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_1[\boldsymbol{F}_{t_2}^t\cdot\boldsymbol{P}]$记为了$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_2[\boldsymbol{F}_{t_2}^t]$，它表示当我们以 b_2为参考构形时材料的本构泛函。

式(5.4.28a)和式(5.4.28b)表明，如果以构形 b_1 为参考构形时材料为简单材料，则其以构形 b_2 为参考构形时材料仍然为简单材料，即简单材料的定义是与参考构形的选择无关的。但是，对于一般的材料而言，泛函 $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_2[\boldsymbol{F}_{t_2}^t]$ 的具体形式通常是和泛函 $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_1[\boldsymbol{F}_{t_1}^t]$ 的具体形式不同的。如果材料具有以下的性质，使得当以具有相同应力状态的两个构形 b_1 和 b_2 为参考构形时材料具有完全相同的本构形式 $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_2[\cdots]=\hat{\boldsymbol{\sigma}}_1[\cdots]$，即

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_1[\boldsymbol{F}_{t_1}^t]=\hat{\boldsymbol{\sigma}}_2[\boldsymbol{F}_{t_2}^t]=\hat{\boldsymbol{\sigma}}_1[\boldsymbol{F}_{t_2}^t] \tag{5.4.29}$$

时，我们就称这两个参考构形对这种材料是对称的或者说同格的(isotropic)；如果对于与参考构形 b_1 保持同样应力状态的任意参考构形 $b_2, b_3, \cdots$，材料的本构关系都具有同样的形式(5.4.29)式，即材料对这些具有相同应力状态的参考构形 b_1，$b_2, \cdots$ 来说并无优选构形的话，则我们将称此种材料为简单流体(simple fluid)。将式(5.4.27b)代入式(5.4.29)，即有

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_1[\boldsymbol{F}_{t_1}^t]=\hat{\boldsymbol{\sigma}}_1[\boldsymbol{F}_{t_2}^t]=\hat{\boldsymbol{\sigma}}_1[\boldsymbol{F}_{t_1}^t\cdot\boldsymbol{P}^{-1}]$$

即

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_1[\boldsymbol{F}_{t_1}^t]=\hat{\boldsymbol{\sigma}}_1[\boldsymbol{F}_{t_1}^t\cdot\boldsymbol{H}] \tag{5.4.30}$$

其中 $\boldsymbol{H}=\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{F}_{t_2}(t_1)$ 为 b_1 相对于 b_2 的相对变形梯度。式(5.4.30)就是无优选构形的简单流体材料的本构泛函 $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_1[\boldsymbol{F}_{t_1}^t]$ 所具有的性质，它在数学上的意义是：当将其自变量 $\boldsymbol{F}_{t_1}^t$ 点乘以任意的非奇异张量 $\boldsymbol{H}$ 时，其因变量的值都保持不变。可以证明：满足式(5.4.30)的所有非奇异张量 $\boldsymbol{H}$ 的集合组成一个“群”(group)，我们将之称为这种材料对应于参考构形 b_1 的同格群(isotropy group)，记为 $\mathscr{H}_1$。事实上，设 $\boldsymbol{H}_1$、$\boldsymbol{H}_2$、$\boldsymbol{H}_3$ 分别是满足式(5.4.30)的非奇异张量元素，则在交替利用式(5.4.30)和张量运算规则之后，我们有

(1) $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_1[\boldsymbol{F}_{t_1}^t]=\hat{\boldsymbol{\sigma}}_1[\boldsymbol{F}_{t_1}^t\cdot\boldsymbol{H}_1]=\hat{\boldsymbol{\sigma}}_1[(\boldsymbol{F}_{t_1}^t\cdot\boldsymbol{H}_1)\cdot\boldsymbol{H}_2]$

$$=\hat{\boldsymbol{\sigma}}_1[\boldsymbol{F}_{t_1}^t\cdot\boldsymbol{H}_1\cdot\boldsymbol{H}_2]=\hat{\boldsymbol{\sigma}}_1[\boldsymbol{F}_{t_1}^t\cdot(\boldsymbol{H}_1\cdot\boldsymbol{H}_2)]$$

这说明，如果 $\boldsymbol{H}_1$、$\boldsymbol{H}_2$ 是满足式(5.4.30)的张量集合 $\mathscr{H}_1$ 中的元素的话，则 $\boldsymbol{H}_1$、$\boldsymbol{H}_2$ 的点积 $\boldsymbol{H}_1\cdot\boldsymbol{H}_2$ 也是集合 $\mathscr{H}_1$ 中的元素，即集合 $\mathscr{H}_1$ 具有对元素点积运算的“自闭性”。

(2)

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_1[\boldsymbol{F}_{t_1}^t]=\hat{\boldsymbol{\sigma}}_1[\boldsymbol{F}_{t_1}^t\cdot\boldsymbol{H}_1\cdot(\boldsymbol{H}_2\cdot\boldsymbol{H}_3)]=\hat{\boldsymbol{\sigma}}_1[\boldsymbol{F}_{t_1}^t\cdot\boldsymbol{H}_1\cdot\boldsymbol{H}_2\cdot\boldsymbol{H}_3]$$

$$=\hat{\boldsymbol{\sigma}}_1[\boldsymbol{F}_{t_1}^t\cdot(\boldsymbol{H}_1\cdot\boldsymbol{H}_2)\cdot\boldsymbol{H}_3]$$

或者

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_1[\boldsymbol{F}_{t_1}^t]=\hat{\boldsymbol{\sigma}}_1[\boldsymbol{F}_{t_1}^t\cdot\boldsymbol{H}_1\cdot(\boldsymbol{H}_2\cdot\boldsymbol{H}_3)]$$
$$=\hat{\boldsymbol{\sigma}}_1[\boldsymbol{F}_{t_1}^t\cdot\boldsymbol{H}_1]=\hat{\boldsymbol{\sigma}}_1[\boldsymbol{F}_{t_1}^t\cdot\boldsymbol{H}_1\cdot\boldsymbol{H}_2]$$
$$=\hat{\boldsymbol{\sigma}}_1[\boldsymbol{F}_{t_1}^t\cdot\boldsymbol{H}_1\cdot\boldsymbol{H}_2\cdot\boldsymbol{H}_3]=\hat{\boldsymbol{\sigma}}_1[\boldsymbol{F}_{t_1}^t\cdot(\boldsymbol{H}_1\cdot\boldsymbol{H}_2)\cdot\boldsymbol{H}_3]$$

这二式都说明，如果$\boldsymbol{H}_1\cdot(\boldsymbol{H}_2\cdot\boldsymbol{H}_3)$是满足式(5.4.30)的张量集合 $\mathscr{H}_1$ 中的元素的话，则$(\boldsymbol{H}_1\cdot\boldsymbol{H}_2)\cdot\boldsymbol{H}_3$ 也是集合 $\mathscr{H}_1$ 中的元素，即集合 $\mathscr{H}_1$ 中的元素对点积运算满足"结合律"。

(3) 对任意的非奇异张量元素 $\boldsymbol{H}$，都有单位张量 $\boldsymbol{I}$ 使得$\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{I}=\boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{H}=\boldsymbol{H}$，而且单位张量 $\boldsymbol{I}$ 显然是满足式(5.4.30)的张量集合 $\mathscr{H}_2$ 中的一个元素，即张量集合 $\mathscr{H}_1$ 中存在一个单位张量元素 $\boldsymbol{I}$，这称之为"单元律"。

(4) 由于张量集合 $\mathscr{H}_1$ 中元素 $\boldsymbol{H}$ 是非奇异的，所以存在一个唯一的逆张量 $\boldsymbol{H}^{-1}$，使得 $\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{H}^{-1}=\boldsymbol{I}=\boldsymbol{H}^{-1}\cdot\boldsymbol{H}$，当将式(5.4.30)中的$\boldsymbol{F}_{t_1}^t$取为$\boldsymbol{F}_{t_1}^t\cdot\boldsymbol{H}^{-1}$时，我们将有

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_1[\boldsymbol{F}_{t_1}^t\cdot\boldsymbol{H}^{-1}]=\hat{\boldsymbol{\sigma}}_1[\boldsymbol{F}_{t_1}^t\cdot\boldsymbol{H}^{-1}\cdot\boldsymbol{H}]=\hat{\boldsymbol{\sigma}}_1[\boldsymbol{F}_{t_1}^t\cdot\boldsymbol{I}]=\hat{\boldsymbol{\sigma}}_1[\boldsymbol{F}_{t_1}^t]$$

这说明，对于满足式(5.4.30)的张量集合 $\mathscr{H}_1$ 中的任意一个元素 $\boldsymbol{H}$，其逆张量 $\boldsymbol{H}^{-1}$ 也必然是集合 $\mathscr{H}_1$ 中的元素，这称之为"逆元律"。

我们在(1)、(2)、(3)、(4)中所得出的四个结论说明集合 $\mathscr{H}_2$ 的元素对张量的点积运算具有"自闭性"、"结合律"、"单元律"、"逆元律"的性质，符合群的定义，这说明满足式(5.4.30)的全部张量的集合 $\mathscr{H}_1$ 确实组成了一个群。

同时，根据各同格参考构形 $b_1,b_2,\cdots$具有相同应力状态的前提，我们可以得出这些参考构形必然是等体积的结论，即有

$$|\det\boldsymbol{H}|=1\tag{5.4.31}$$

事实上，由于在 b_1中的变形梯度为$\boldsymbol{F}_{t_1}(t_1)=\boldsymbol{I}$，如果取变形历史为$\boldsymbol{F}_{t_1}^t=\boldsymbol{I}$，则经 n 次利用式(5.4.30)之后，我们便有

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_1[\boldsymbol{I}]=\hat{\boldsymbol{\sigma}}_1[\boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{H}]=\hat{\boldsymbol{\sigma}}_1[\boldsymbol{H}]=\hat{\boldsymbol{\sigma}}_1[\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{H}]=\cdots=\hat{\boldsymbol{\sigma}}_1[\boldsymbol{H}^n]$$

由于$|\det\boldsymbol{H}|$代表构形 b_1对 b_2的体积膨胀比，如果$|\det\boldsymbol{H}|\neq1$，则经 n 次变换后这些参考构形的体积将无限膨胀或无限缩小，而这显然是和这些参考构形中应力状态相同的前提相矛盾的，故我们必有(5.4.31)式成立，换言之即是(5.4.30)式的解和(5.4.31)式的解是等价的。式(5.4.31)在数学上的特征是$|\det\boldsymbol{H}|=1$，故我们将这个简单流体的同格群 $\mathscr{H}_1$ 称为"幺模群"u(uni-modular group)；而式(5.4.31)在力学上的含义则是这些同格的参考构形是保持等体积或等密度的构形，而且在与 b_1保持等体积的所有参考构形 b_2中，简单流体材料的本构关系都具有同样的形

式$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_1[\boldsymbol{F}_{t_1}^t]=\hat{\boldsymbol{\sigma}}_1[\boldsymbol{F}_{t_2}^t]$，因而简单流体对这些等体积的参考构形是无优选构形的。下面将会说明，简单流体不但是无优选构形的材料，而且是在任意构形中都为各向同性的材料。

同格群是与参考构形紧密相关的，这就是我们前面特别标注出同格群 $\mathscr{H}_1$ 中下标 1 的原因，它表示对应于参考构形 b_1的同格群。如果 b_2是另一个参考构形，由 b_1到 b_2的变形梯度为 $\boldsymbol{P}\equiv\boldsymbol{F}_{t_1}(t_2)$，$|\det\boldsymbol{P}|\neq0$，则利用式(5.4.29)、式(5.4.30)、式(5.4.27b)、式(5.4.28b)，我们将有

$$
\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{\sigma}}_2[\boldsymbol{F}_{t_2}^t] &= \hat{\boldsymbol{\sigma}}_1[\boldsymbol{F}_{t_1}^t] = \hat{\boldsymbol{\sigma}}_1[\boldsymbol{F}_{t_1}^t\cdot\boldsymbol{H}] = \hat{\boldsymbol{\sigma}}_1[\boldsymbol{F}_{t_2}^t\cdot\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{H}] \\
&= \hat{\boldsymbol{\sigma}}_1[\boldsymbol{F}_{t_2}^t\cdot\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{P}^{-1}\cdot\boldsymbol{P}] = \hat{\boldsymbol{\sigma}}_2[\boldsymbol{F}_{t_2}^t\cdot\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{P}^{-1}]
\end{aligned}
\tag{5.4.32}
$$

式(5.4.32)说明，如果 $\boldsymbol{H}$ 是对应于参考构形 b_1的同格群元素的话，则

$$
\widetilde{\boldsymbol{H}} = \boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{P}^{-1} \tag{5.4.33a}
$$

便是对应于参考构形 b_2的同格群元素，如果我们把对应于参考构形 b_2的同格群记为 $\mathscr{H}_2$ 的话，就可将式(5.4.33a)简记为

$$
\mathscr{H}_2 = \boldsymbol{P}\cdot\mathscr{H}_1\cdot\boldsymbol{P}^{-1} \tag{5.4.33b}
$$

由式(5.4.33a)易见，对任意的非奇异张量 $\boldsymbol{P}$，我们总有$|\det\widetilde{\boldsymbol{H}}|=|\det\boldsymbol{H}|=1$，即如果 $\mathscr{H}_1$ 是幺模群的话，则由式(5.4.33)所表达的同格群 $\mathscr{H}_2$ 也是幺模群。这在力学上的意义是：对简单流体，如果我们取不同的参考构形(可与 b_1具有不同的密度)为基础的话，则其相应的同格群(幺模群)的元素 $\boldsymbol{H}$ 将通过式(5.4.33a)“相似转移”到幺模群中的另一个元素 $\widetilde{\boldsymbol{H}}$，但其同格群仍是幺模群自身，因此简单流体在任何一类具有同密度的参考构形之中的本构关系都具有相同的形式。这在数学上的意义是：对任意的非奇异张量 $\boldsymbol{P}$，幺模群 u 是方程 $\mathscr{H}=\boldsymbol{P}\cdot\mathscr{H}\cdot\boldsymbol{P}^{-1}$的一个解。群论中证明了，除了幺模群自身 u 之外，方程 $\mathscr{H}=\boldsymbol{P}\cdot\mathscr{H}\cdot\boldsymbol{P}^{-1}$的另外的解只有“三斜群”$\mathscr{J}$ 和恒同群，前者只包含两个张量元素$[\boldsymbol{I},-\boldsymbol{I}]$，后者只包含一个张量元素 $\boldsymbol{I}$。

5.4.4　各向同性固体及其同格群的进一步说明

从参考构形变换的角度，各向同性材料可定义为：如果材料存在着一个参考构形 b_1，使得全部以正交张量 $\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{F}_{t_2}(t_1)$或$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{F}_{t_1}(t_2)$而与之相联系的构形 b_2之中材料的本构关系都具有相同形式的话，则我们就称该种材料是在参考构形 b_1 中为各向同性的材料，并且称该参考构形 b_1 为材料的无畸变构形。从前面

所介绍的同格群的概念出发，这在数学上可以表述为：如果正交张量 Q 是同格群(5.4.30)式的元素，即对任意的正交张量 Q 都有

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_1[\boldsymbol{F}_{t_1}^t] = \hat{\boldsymbol{\sigma}}_1[\boldsymbol{F}_{t_1}^t \cdot \boldsymbol{Q}] \tag{5.4.34}$$

的话，则称材料为在无歪斜参考构形 b_1 中各向同性的材料。式(5.4.34)可以称之为各向同性材料的数学定义。由于以正交张量 $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{F}_{t_2}(t_1)$ 或 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{F}_{t_1}(t_2)$ 相联系的两个参考构形之间没有纯变形而只有刚体旋转，我们可以将它们视为同一个参考构形 b_1 中由一个 L 氏坐标系 $\boldsymbol{X}$ 到另一个 L 氏坐标系 $\bar{\boldsymbol{X}}$ 之间的映射关系 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{F}_{t_1}(t_2)$，而由 $\boldsymbol{X}$ 到 $\bar{\boldsymbol{X}}$ 的 L 氏坐标变换的过渡矩阵则为 $\boldsymbol{Q}$(参见 1.16 节中的有关定理)，同时材料在这两个 L 氏坐标系 $\boldsymbol{X}$、$\bar{\boldsymbol{X}}$ 之中的本构关系具有相同的形式，这就回到了我们前面以正交坐标变换所给出的各向同性材料的定义，所以我们给出的各向同性材料的两种定义是等价的。事实上，式(5.4.20)和式(5.4.34)的数学形式也是完全类似的。

根据前面所述的群元素所必须满足的四条要求——“自闭性”、“结合律”、“单元律”、“逆元律”，容易证明满足(5.4.34)式的全体正交张量 $\boldsymbol{Q}$ 的集合也组成一个群，称为“正交群”O(orthogonal group)，它是各向同性材料的同格群。由于任何一个正交张量 $\boldsymbol{Q}$ 都具有性质(5.4.31)式，所以它们也是幺模群的元素；但是，具有性质(5.4.31)式的张量却未必都是正交张量，故“正交群”O 只是“幺模群”u 的一个子群。由于以幺模群为同格群的简单材料对保持等体积的所有参考构形而言是没有所谓的优选构形的，而且由于正交群是它的子群，故这种材料在任意的参考构形中都必然是各向同性的，即材料可以在保持等体积的条件下任意“自由流动”，这在工程上就是我们通常所说的简单流体材料。关于各向同性材料的同格群我们可给出如下的定理：

定理 正交张量 $\boldsymbol{Q}$ 是以某一构形 b_1 为基础的同格群 $\mathscr{H}_1$ 的元素($\boldsymbol{Q} \in \mathscr{H}_1$)，即 $\boldsymbol{Q}$ 是(5.4.30)式的解而满足

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_1[\boldsymbol{F}_{t_1}^t] = \hat{\boldsymbol{\sigma}}_1[\boldsymbol{F}_{t_1}^t \cdot \boldsymbol{Q}] \tag{5.4.34}$$

的充要条件是

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_1[\boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{F}_{t_1}^t \cdot \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}] = \boldsymbol{Q} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}_1[\boldsymbol{F}_{t_1}^t] \cdot \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}} \tag{5.4.35}$$

证明 必要性。如果 $\boldsymbol{Q} \in \mathscr{H}_1$，则 $\boldsymbol{Q}^{-1} = \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}} \in \mathscr{H}_1$，于是，在(5.4.30)式中令 $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}$ 并以 $\boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{F}_{t_1}^t$ 代替 $\boldsymbol{F}_{t_1}^t$，则有

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_1[\boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{F}_{t_1}^t] = \hat{\boldsymbol{\sigma}}_1[\boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{F}_{t_1}^t \cdot \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}] \tag{5.4.36}$$

而构架无关原理要求对任意的时空旋转历史 $\boldsymbol{Q}^t$，式(5.2.14)都成立，故我们有

下式：

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_1[\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{F}_{t_1}^t]=\boldsymbol{Q}\cdot\hat{\boldsymbol{\sigma}}_1[\boldsymbol{F}_{t_1}^t]\cdot\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}} \tag{5.4.37}$$

对比式(5.4.36)和式(5.4.37)即可得到式(5.4.35)，这就证明了定理的必要性。

充分性。设条件(5.4.35)式成立。在构架无关原理所给出的方程(5.4.37)式中以$\boldsymbol{F}_{t_1}^t\cdot\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}$代替$\boldsymbol{F}_{t_1}^t$，有

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_1[\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{F}_{t_1}^t\cdot\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}]=\boldsymbol{Q}\cdot\hat{\boldsymbol{\sigma}}_1[\boldsymbol{F}_{t_1}^t\cdot\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}]\cdot\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}} \tag{5.4.38}$$

对比式(5.4.35)和式(5.4.38)，可得

$$\boldsymbol{Q}\cdot\hat{\boldsymbol{\sigma}}_1[\boldsymbol{F}_{t_1}^t\cdot\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}]\cdot\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{Q}\cdot\hat{\boldsymbol{\sigma}}_1[\boldsymbol{F}_{t_1}^t]\cdot\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}$$

将此式两端左点乘以$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}$、右点乘以$\boldsymbol{Q}$，即得

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_1[\boldsymbol{F}_{t_1}^t\cdot\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}]=\hat{\boldsymbol{\sigma}}_1[\boldsymbol{F}_{t_1}^t]$$

这说明$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{Q}^{-1}\in\mathscr{H}_1$，故也有$\boldsymbol{Q}\in\mathscr{H}_1$，即(5.4.34)式，充分性证毕。

这个定理说明，(5.4.34)式和(5.4.35)式都可以视为是各向同性材料的数学定义。

设材料在参考构形b_1中为各向同性的，而$\boldsymbol{Q}$是对应于参考构形b_1的同格群的元，则由式(5.4.34a)知$\tilde{\boldsymbol{Q}}=\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{P}^{-1}$将是对应于参考构形$b_2$的元，如果$\boldsymbol{P}$也是正交张量的话，则易证$\tilde{\boldsymbol{Q}}=\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{P}^{-1}$也将是正交张量，即在由正交变换相联系的两个参考构形b_1和b_2之中，正交群的元由一个正交张量$\boldsymbol{Q}$“正交转移”为另一个正交张量$\tilde{\boldsymbol{Q}}$，但材料的同格群仍然是正交群O，即正交群O是各向同性固体材料的同格群。但是，如果$\boldsymbol{P}$不是正交张量的话，则一般而言$\tilde{\boldsymbol{Q}}$将未必是正交张量$\boldsymbol{Q}$了，或者反过来说正交张量$\boldsymbol{Q}$不再是对应于构形b_2的同格群的元素了，这表明材料在参考构形b_2中将未必是各向同性的了。这就是各向同性固体和各向同性流体的区别。

“幺模群”的全体张量即“幺模群”自身u是它最大的子群，它是简单流体材料的同格群，以“幺模群”为同格群的简单流体材料是具有最多对称性的材料；正交群O是“幺模群”u的一个子群，它是各向同性固体材料的同格群；各种不同的各向异性固体材料是以正交群的某些不同子群为同格群的材料，例如具有一个旋转对称轴而且对通过该轴的所有平面都对称的横观各向同性材料，其同格群是正交张量的一个子群，我们将记作O'，具有两个互相垂直(等价于三个两两互相垂直)的对称平面的正交各向异性材料，其同格群是正交张量的另一个子群，我们将记作O_2，具有一个对称平面的各向异性材料，其同格群是正交张量的另一个子群，我们将记

作 O_1;"幺模群"和正交群的最小子群是所谓的"三斜群"(triclinic group)J,后者只包括两个张量元素$[\boldsymbol{I}, -\boldsymbol{I}]$,以"三斜群"为同格群的材料是具有最少对称性的材料。即我们有

$$J \subset O_1 \subset O_2 \subset O' \subset O \subset u$$

材料的对称性越多,其同格群越大,材料本构关系受到的限制也就越多,而其本构形式也就越简单。此外,还有一类材料,其同格群 C 既不是被正交群所包含的正交子群,同时也不能包含正交群,即该同格群 C 包含了部分正交张量以及部分 $|\det \boldsymbol{H}| = 1$ 的非正交张量,这种材料称为简单流晶(simple liquid crystal),它是各向异性的但却具有一定的可流动性。

5.5 具有内部约束材料的本构关系

在前面几节中我们已经讨论了本构理论的各个重要基本原理对材料本构关系形式的限制,其中的每一个基本原理对本构形式的限制都大大简化了本构关系的形式,从而减小了我们寻求材料本构关系具体形式的难度。现在我们转向另外一个不同的问题,即具有内部约束材料的本构关系(constitutive equations of materials with internal constrains)。当材料具有某种所谓的内部约束时,其宏观变形将受到某种特定的限制,其在数学上的表现就是材料的各个变形分量具有某种相互的关联从而减少了独立变形分量的个数。例如,当在材料中的某一个方向 X_1 嵌有刚度比其他方向大得多的纤维时,则可以近似认为材料的变形具有约束条件 $F_{11} = C_{11} = U_{11} = 1$ 或 $E_{11} = 0 = D_{11}$;当材料的密度很大而所受的压力又不是太大时,则人们常常可以将材料近似看做是不可压缩材料,此时的变形约束条件可以写为 $\| \boldsymbol{F} \| = 1$ 或 $D_{kk} = 0$,等等。

在一般情况下,材料的内部约束可以由一个或几个自变量为变形梯度张量而其取值为标量值的函数方程来表达:

$$\gamma(\boldsymbol{F}) = 0 \tag{5.5.1}$$

此式称之为材料的内部约束方程。

构架无关原理要求,对相差任意正交旋转 $\boldsymbol{Q}$ 的 E 氏坐标变换,(5.5.1)式都要成立,故我们必有

$$\gamma(\boldsymbol{F}) = \gamma(\boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{F}) = 0 \tag{5.5.2}$$

由正交旋转 $\boldsymbol{Q}$ 的任意性，特别地，我们可取 $\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}$，其中 $\boldsymbol{R}$ 是介质运动的旋转张量。将 $\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}$ 代入式(5.5.2)，并利用变形梯度张量的右极分解式 $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{U}$，即可将(5.5.2)式化为

$$\gamma(\boldsymbol{U})=\gamma(\sqrt{\boldsymbol{C}})\equiv\lambda(\boldsymbol{C})=0 \tag{5.5.3}$$

式(5.5.3)就是构架无关形式的材料内部约束方程，它在任何时刻都要成立，故有

$$\dot{\lambda}(\boldsymbol{C})=\frac{\partial\lambda}{\partial\boldsymbol{C}}:\dot{\boldsymbol{C}}=\frac{\partial\lambda}{\partial C_{IJ}}\dot{C}_{IJ}=0 \tag{5.5.4a}$$

式(5.5.4a)也可写为如下等价的形式：

$$\mathrm{tr}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial\boldsymbol{C}}\cdot\dot{\boldsymbol{C}}\right)=0 \tag{5.5.4b}$$

利用式(2.6.2)，可有

$$\dot{\boldsymbol{C}}=2\dot{\boldsymbol{E}}=2\,\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{F} \tag{5.5.5}$$

故式(5.5.4b)也可写为如下的形式：

$$\mathrm{tr}\left(\frac{1}{2}\,\frac{\partial\lambda}{\partial\boldsymbol{C}}\cdot\dot{\boldsymbol{C}}\right)=\mathrm{tr}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial\boldsymbol{C}}\cdot\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{F}\right)=0 \tag{5.5.6a}$$

或

$$\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{F}\cdot\frac{\partial\lambda}{\partial\boldsymbol{C}}\cdot\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{D}\right)=0 \tag{5.5.6b}$$

式(5.5.6)就是构架无关形式的材料内部约束方程的另外一种形式。由于单位瞬时体积介质的变形功率为

$$\rho\,\dot{w}=\boldsymbol{\sigma}:\boldsymbol{D}=\mathrm{tr}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{D}) \tag{5.5.7}$$

所以如果假设材料中存在着不确定的应力$\boldsymbol{\sigma}^{*}$：

$$\boldsymbol{\sigma}^{*}=q\boldsymbol{F}\cdot\frac{\partial\lambda}{\partial\boldsymbol{C}}\cdot\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}} \tag{5.5.8}$$

其中 q 为不确定的标量因子，则这种不确定的应力的变形功率为 0，即

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{\sigma}^{*}\cdot\boldsymbol{D})=0 \tag{5.5.9}$$

因此，我们在构架无关形式 Cauchy 应力的本构泛函

$$\boldsymbol{\sigma}(t)=\boldsymbol{R}(t)\cdot\hat{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{U}^{t})\cdot\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}(t)$$

的基础上加上任意的不确定应力$\boldsymbol{\sigma}^{*}$，都不会改变变形功率，因此也不会影响能量方程、熵的均衡方程和熵不等式，故具有形如(5.5.1)式或(5.5.3)式的内部约束材料的 Cauchy 应力的本构泛函可以写为

$$\boldsymbol{\sigma}(t)=\boldsymbol{R}(t)\cdot\hat{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{U}^{t})\cdot\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}(t)+\boldsymbol{\sigma}^{*}=\boldsymbol{R}(t)\cdot\hat{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{U}^{t})\cdot\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}(t)+q\boldsymbol{F}\cdot\frac{\partial\lambda}{\partial\boldsymbol{C}}\cdot\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}} \tag{5.5.10}$$

我们以上的推理说明：当材料存在一个形如(5.5.1)式或(5.5.3)式的内部约束时，由于描写材料变形的独立分量减少了一个，在材料中就必然存在一个由单标量参数 q 所确定的形如(5.5.8)式的不确定应力。类似地，如果材料中存在 m 个形如(5.5.1)式或(5.5.3)式的内部约束时，则描写材料变形的独立分量就减少了 m 个，而在材料中就必然存在 m 个由单标量参数 q_i 所确定的形如(5.5.8)式的不确定应力 $\boldsymbol{\sigma}_i^*$，即材料 Cauchy 应力的本构泛函将具有如下形式：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}(t) &= \boldsymbol{R}(t)\cdot\hat{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{U}^t)\cdot\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}(t)+\sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{\sigma}_i^* \\ &= \boldsymbol{R}(t)\cdot\hat{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{U}^t)\cdot\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}(t)+\sum_{i=1}^{m}q_i\boldsymbol{F}\cdot\frac{\partial\lambda_i}{\partial\boldsymbol{C}}\cdot\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\end{aligned}\qquad(5.5.11)$$

这些不确定的应力 $\boldsymbol{\sigma}_i^*$ 是无法由本构方程本身给出的，它们必须由整个问题的场方程组和初值及边界条件来共同确定之。

关于有内部约束材料的第一类和第二类 P-K 应力 $\boldsymbol{S}$ 和 $\boldsymbol{\Sigma}$ 的本构泛函的具体形式，读者可作为练习尝试之。

习　　题

5.1　设 α 为常数，$\boldsymbol{M}$ 为 4 阶张量，试说明 Cauchy 应力张量的本构函数：

(1) $\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{M}:(\boldsymbol{F}-\boldsymbol{I})$；　(2) $\boldsymbol{\sigma}=\alpha(\boldsymbol{F}-\boldsymbol{I})$；

(3) $\boldsymbol{\sigma}=\alpha\,(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{I})^2$；　(4) $\boldsymbol{\sigma}=\alpha\,(\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{F}-\boldsymbol{I})^2$

是否满足构架无关原理的要求？其中满足构架无关原理要求的本构函数是否满足对各向同性材料本构关系的要求？

5.2　设 $\boldsymbol{m}$ 为单位张量、a 为常数，试证明本构关系 $\boldsymbol{\sigma}=\hat{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{F})=a(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{m})(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{m})$满足构架无关原理的要求。

5.3　设热弹性材料比内能的本构函数为 $u=u(\boldsymbol{F},T,\boldsymbol{G})$，试导出其满足构架无关原理要求的简化形式。

5.4　设热弹性材料 E 氏热流矢量 $\boldsymbol{h}$ 和 L 氏热流矢量 $\boldsymbol{H}$ 的本构函数分别为 $\boldsymbol{h}=\boldsymbol{h}(\boldsymbol{F},T,\boldsymbol{G})$和 $\boldsymbol{H}=\boldsymbol{H}(\boldsymbol{F},T,\boldsymbol{G})$，试分别导出其满足构架无关原理要求的简化形式。

5.5　试由 Cauchy 应力张量 $\boldsymbol{\sigma}$ 构架无关形式的本构泛函的表达式(5.2.17b)式和 Cauchy 应力张量 $\boldsymbol{\sigma}$ 与 P-K 应力张量 $\boldsymbol{S}$ 及 $\boldsymbol{\Sigma}$ 间的关系，导出 P-K 应力张量 $\boldsymbol{S}$ 及 $\boldsymbol{\Sigma}$ 的构架无关形式的本构泛函(5.2.18)式及(5.2.19)式。

5.6　参照本书 5.2 节中对 Cauchy 应力张量 $\boldsymbol{\sigma}$ 本构方程简化形式(5.2.17)式的推导过程，以类似的方法独立地导出第一类和第二类 P-K 应力张量 $\boldsymbol{S}$ 及 $\boldsymbol{\Sigma}$ 本构方程的简化形式(5.2.18)式及(5.2.19)式。

5.7　试由第一类 P-K 应力 $\boldsymbol{S}$ 由比自由能 ψ 求导的微分关系(5.3.12)式出发，通过 $\boldsymbol{S}$ 与 Cauchy 应力张量 $\boldsymbol{\sigma}$ 及第二类 P-K 应力张量 $\boldsymbol{\Sigma}$ 之间的关系证明微分关系(5.3.16)式和(5.3.17)式，即

$$\boldsymbol{\sigma} = \rho \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \boldsymbol{F}} \cdot \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{\Sigma} = \rho_0 \boldsymbol{F}^{-1} \cdot \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \boldsymbol{F}}$$

并进一步证明：

$$\boldsymbol{F}^{-1} \cdot \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \boldsymbol{F}} = \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \boldsymbol{E}}$$

5.8　试直接从 $\boldsymbol{\sigma}$ 和 $\boldsymbol{\Sigma}$ 含内变量本构函数的一般形式出发，用与书中 5.3 节导出微分关系(5.3.12)式类似的方法导出其微分关系(5.3.16)式和(5.3.17)式。

5.9　试证明在 L 氏坐标正交变换之下有关量 $\boldsymbol{C}$、$\boldsymbol{U}$、$\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{G}$、$\boldsymbol{H}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{V}$、$\boldsymbol{e}$、$\boldsymbol{g}$、$\boldsymbol{h}$、$\boldsymbol{R}$、$\boldsymbol{\Sigma}$、$\boldsymbol{S}$、$\boldsymbol{\sigma}$ 的变换公式(5.4.3)式、(5.4.4)式、(5.4.5)式。

5.10　利用与书中 5.4 节对 Cauchy 应力所做推导的类似方法，证明简单材料满足构架无关原理和许可性原理的第一类 P-K 应力 $\boldsymbol{S}$ 与第二类 P-K 应力 $\boldsymbol{\Sigma}$ 的本构关系必分别具有(5.4.12)式和(5.4.13)式的形式，即

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{R}(t) \cdot \hat{\boldsymbol{S}}[\boldsymbol{E}^t, \boldsymbol{T}^t], \quad \boldsymbol{\Sigma} = \hat{\boldsymbol{\Sigma}}[\boldsymbol{E}^t, \boldsymbol{T}^t]$$

且对各向同性材料，其中的 $\hat{\boldsymbol{S}}[\boldsymbol{E}^t, \boldsymbol{T}^t]$ 和 $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}[\boldsymbol{E}^t, \boldsymbol{T}^t]$ 必是 $\boldsymbol{E}^t$ 的各向同性张量泛函。

5.11　设介质比熵、比内能、Cauchy 应力和 E 氏热流矢量的本构关系分别具有形式：

$$s = s(T, \boldsymbol{G}, \boldsymbol{F}, \dot{\boldsymbol{F}}), \quad u = u(T, \boldsymbol{G}, \boldsymbol{F}, \dot{\boldsymbol{F}})$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(T, \boldsymbol{G}, \boldsymbol{F}, \dot{\boldsymbol{F}}), \quad \boldsymbol{h} = \boldsymbol{h}(T, \boldsymbol{G}, \boldsymbol{F}, \dot{\boldsymbol{F}})$$

试由熵不等式出发证明：必有 $s = s(u, \boldsymbol{F})$ 或 $u = u(s, \boldsymbol{F})$，且 $\dfrac{\partial s}{\partial u} = \dfrac{1}{T}$，$\dfrac{\partial s}{\partial \boldsymbol{G}} = \boldsymbol{0}$，$\dfrac{\partial s}{\partial \dot{\boldsymbol{F}}} = \boldsymbol{0}$；写出简化的熵不等式。

5.12 设 $\boldsymbol{m}$ 为单位张量，试证明满足张量方程 $\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{m}=\pm\boldsymbol{m}$，$|\det\boldsymbol{H}|=1$ 的全部张量 $\boldsymbol{H}$ 组成一个群，并证明该群是同格群 $\hat{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{F})=\hat{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{H})$ 的子群。

5.13 设材料的内部约束方程为 $\gamma(\boldsymbol{F})=0$，试导出其第一类和第二类 P-K 应力的本构方程。

5.14 设 $\boldsymbol{e}_1$ 和 $\boldsymbol{e}_2$ 是初始构形中任意的两个单位矢量，介质的变形具有如下特征：在 $\boldsymbol{e}_1$ 方向上的 L 氏伸长比永远是 $\boldsymbol{e}_2$ 方向 L 氏伸长比的 2 倍。试导出介质本构关系的约束方程 $\lambda(\boldsymbol{C})=0$，导出具有此种约束变形特性介质的 Cauchy 应力本构方程。

第 6 章　热弹性材料

6.1　纯力学情况下的弹性固体

所谓热弹性材料，是指对变形历史和温度历史没有记忆能力的材料，其本构响应完全由现时刻的变形和温度所决定，故各种响应量的本构关系都不需要用泛函或内变量形式来表述而只需要用本构函数来表达。本节只讨论不考虑温度效应的纯力学情况，此时简单弹性材料第二类 P-K 应力本构方程的简化形式为

$$\boldsymbol{\Sigma} = \hat{\boldsymbol{\Sigma}}(\boldsymbol{E}) \tag{6.1.1}$$

其中 $\boldsymbol{\Sigma}$ 为第二类 P-K 应力，$\boldsymbol{E}$ 为 Lagrange 应变，$\hat{\boldsymbol{\Sigma}}$ 为 $\boldsymbol{E}$ 的任意函数。4 阶张量

$$\boldsymbol{M} = \frac{\partial \boldsymbol{\Sigma}}{\partial \boldsymbol{E}}, \quad M_{IJKL} = \frac{\partial \Sigma_{IJ}}{\partial E_{KL}} \tag{6.1.2}$$

称为弹性(模量)张量(elastic modulus tensor)，是一个由材料性质决定的量，在材料是非线性弹性材料的一般情况下，它也是应变 $\boldsymbol{E}$(或应力 $\boldsymbol{\Sigma}$)的函数。由 $\boldsymbol{\Sigma}$ 和 $\boldsymbol{E}$ 的对称性，显然弹性张量 $\boldsymbol{M}$ 具有如下的对称性：

$$M_{IJKL} = M_{JIKL}, \quad M_{IJKL} = M_{IJLK} \tag{6.1.3}$$

因此张量 $\boldsymbol{M}$ 只有 36 个独立的分量，此种弹性材料称为 Cauchy 弹性材料。如果利用能量守恒定律，则根据 3.5 节所述，在纯力学的情况下材料的内能即等于应力的变形功所转化成的应变能。如以 u 和 ρ_0 分别表示材料的比内能和初始质量密度，则有

$$u = \int_0^t \frac{1}{\rho_0} \boldsymbol{\Sigma} : \dot{\boldsymbol{E}} \mathrm{d}t = \int_0^E \frac{1}{\rho_0} \boldsymbol{\Sigma} : \mathrm{d}\boldsymbol{E} \tag{6.1.4}$$

$$\boldsymbol{\Sigma} = \rho_0 \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{E}}, \quad \Sigma_{IJ} = \rho_0 \frac{\partial u}{\partial E_{IJ}} \tag{6.1.5}$$

式(6.1.4)和式(6.1.5)说明第二类 P-K 应力 $\boldsymbol{\Sigma}$ 可由应变能或内能 u 作为势函数对 L 氏应变 $\boldsymbol{E}$ 求导而得出，我们称这种存在着应变的势函数的材料为超弹性(hyperelastic)材料或 Green 弹性材料。取式(6.1.5)的第二式，两端对 E_{KL} 求导，利用弹性模量张量的定义(6.1.2)式以及 u 的二阶混合导数的可交换性，可以得到超弹性材料弹性张量另一附加的对称性质：

$$M_{IJKL} = M_{KLIJ} \tag{6.1.6}$$

我们把同时具有对称性质(6.1.3)式和(6.1.6)式的张量 $\boldsymbol{M}$ 称为完全对称的 4 阶张量，它只有 21 个独立的分量。

对非线性弹性材料，弹性模量张量的各分量一般来说将并非为常数，而是材料的应变状态或应力状态的函数；如果材料是线弹性的材料，则弹性模量张量的各分量将都是常数，即弹性张量 $\boldsymbol{M}$ 为常张量。所以线弹性材料的本构方程可以写为

$$\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{M} : \boldsymbol{E}, \quad \Sigma_{IJ} = M_{IJKL} E_{KL} \tag{6.1.7}$$

而对 Cauchy 线弹性和 Green 线弹性材料而言，本构方程(6.1.7)式中将各有 36 个和 21 个独立的弹性常数。

6.2 各向同性弹性材料

6.2.1 各向同性材料第二类 P-K 应力的本构方程

在 5.4 节中我们已经对任意有记忆能力的简单材料讲过材料对称性原理的表述以及一般各向同性材料应力本构泛函的形式(5.4.6)式、(5.4.12)式、(5.4.13)式，其主要结果就是引出了各向同性张量泛函的概念，即这些公式中的泛函 $\hat{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{E}',T')$、$\hat{\boldsymbol{S}}(\boldsymbol{E}',T')$、$\hat{\boldsymbol{\Sigma}}(\boldsymbol{E}',T')$ 都必然是 $\boldsymbol{E}'$ 的各向同性张量泛函，其特性分别由式(5.4.10)、式(5.4.14)、式(5.4.15)所表达。各向同性弹性材料只是一种没有记忆的特殊各向同性材料，我们只需将上述这些公式中的泛函改为函数并将其中自变量的历史改为其瞬态值即可，而对纯力学情况则本构函数中又不出现温度。但是为了加深读者的理解，在本节中我们将结合对第二类 P-K 应力本构关系的讨论，专

门地以各向同性弹性材料为例来再重复说明一下材料对称性原理对本构方程形式的限制。

按前所述，所谓各向同性材料就是指在所有方向上具有相同性质的材料。用数学语言表达就是：如果以某一构形为参考构形时，不管物质坐标系（即 L 氏坐标系）做怎样的正交变换，材料的本构函数都具有相同的形式，则材料称为是在此参考构形中的各向同性材料，而此参考构形则称为材料的无歪斜构形（undistorted configuration）；如果材料不存在无歪斜构形，则称其为各向异性材料。设在无歪斜构形中 L 氏坐标系 $\overline{\boldsymbol{X}}$ 和 $\boldsymbol{X}$ 以正交张量 $\boldsymbol{Q}$ 相联系：

$$\overline{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{X} + \overline{\boldsymbol{X}}_0, \quad \boldsymbol{X} = \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\cdot\overline{\boldsymbol{X}} - \overline{\boldsymbol{X}}_0 \tag{6.2.1}$$

则如 5.4 节中所指出的，我们将有如下各量在 L 氏坐标变化下的变换关系：

$$\overline{\boldsymbol{F}} = \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}, \quad \overline{\boldsymbol{E}} = \boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}, \quad \overline{\boldsymbol{\Sigma}} = \boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{\Sigma}\cdot\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}} \tag{6.2.2}$$

根据 5.4 节中的式(5.4.13)，易见满足构架无关原理要求的第二类 P-K 应力的本构简化形式必为 $\boldsymbol{\Sigma}=\hat{\boldsymbol{\Sigma}}(\boldsymbol{E})$。再由各向同性材料的定义知，如果在物质坐标系 $\boldsymbol{X}$ 中材料的满足构架无关原理要求的本构关系为

$$\boldsymbol{\Sigma} = \hat{\boldsymbol{\Sigma}}(\boldsymbol{E}) \tag{6.2.3a}$$

则在另一个由正交张量 $\boldsymbol{Q}$ 由(6.2.1)式与之相联系的物质坐标系 $\overline{\boldsymbol{X}}$ 中，本构关系将有同样的形式，即有

$$\overline{\boldsymbol{\Sigma}} = \hat{\boldsymbol{\Sigma}}(\overline{\boldsymbol{E}}) \tag{6.2.3b}$$

但由于物质坐标系变换时，张量 $\boldsymbol{\Sigma}$ 和 $\boldsymbol{E}$ 的变换关系为(6.2.2)式，所以易证

$$\boldsymbol{Q}\cdot\hat{\boldsymbol{\Sigma}}(\boldsymbol{E})\cdot\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}} = \hat{\boldsymbol{\Sigma}}(\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}) \tag{6.2.4a}$$

这就是各向同性弹性材料第二类 P-K 应力的本构函数 $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}$ 所应具有的性质，其中 $\boldsymbol{Q}$ 为任意的正交张量。我们称具有性质(6.2.4a)式的张量函数 $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}(\boldsymbol{E})$ 为各向同性张量函数（isotropic tensor function），因此，各向同性材料的第二类 P-K 应力张量本构关系(6.2.3a)式中的本构函数 $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}(\boldsymbol{E})$ 必是应变张量 $\boldsymbol{E}$ 的各向同性张量函数。

对 Cauchy 应力和第一类 P-K 应力可以有类似的结论：它们各自的满足构架无关原理要求的本构关系为

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{R}\cdot\hat{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{E})\cdot\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{S} = \boldsymbol{R}\cdot\hat{\boldsymbol{S}}(\boldsymbol{E}) \tag{6.2.3c}$$

而如果材料又是各向同性的，则其中的本构函数 $\hat{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{E})$ 和 $\hat{\boldsymbol{S}}(\boldsymbol{E})$ 也都必然是各向同性张量函数，即对任意的正交张量 $\boldsymbol{Q}$，都有

$$\boldsymbol{Q}\cdot\hat{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{E})\cdot\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}=\hat{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}),\quad \boldsymbol{Q}\cdot\hat{\boldsymbol{S}}(\boldsymbol{E})\cdot\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}=\hat{\boldsymbol{S}}(\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}) \tag{6.2.4b}$$

此点读者可作为练习证明之。

由下面的“6.2.2 各向同性张量函数的表示定理”,可写出各向同性弹性材料本构方程的一般形式为

$$\boldsymbol{\Sigma}=\hat{\boldsymbol{\Sigma}}(\boldsymbol{E})=\Phi_0\boldsymbol{I}+\Phi_1\boldsymbol{E}+\Phi_2\boldsymbol{E}^2 \tag{6.2.5}$$

其中

$$\Phi_i=\Phi_i(I_1,I_2,I_3)\quad(i=0,1,2) \tag{6.2.6}$$

是 $\boldsymbol{E}$ 的 3 个主不变量 I_1、I_2、I_3的任意函数。因此在一般情况下,各向同性弹性材料的本构方程由 3 个任意的三元函数所确定。

在 $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}(\boldsymbol{E})$为 $\boldsymbol{E}$ 的线性函数的时候,即得线弹性各向同性材料的本构关系。如果注意到

$$I_1=\mathrm{tr}\boldsymbol{E}=E_{11}+E_{22}+E_{33}$$

$$I_2=\begin{Vmatrix}E_{22} & E_{23}\\ E_{32} & E_{33}\end{Vmatrix}+\begin{Vmatrix}E_{11} & E_{12}\\ E_{21} & E_{22}\end{Vmatrix}+\begin{Vmatrix}E_{11} & E_{13}\\ E_{31} & E_{33}\end{Vmatrix}$$

$$I_3=\|\boldsymbol{E}\|$$

则知对线弹性材料必有 $\Phi_2=0,\Phi_1=2\mu,\Phi_0=\lambda\,\mathrm{tr}\boldsymbol{E}=\lambda E_{KK}$($\lambda,\mu$ 为常数)。于是本构方程(6.2.5)式可写为

$$\boldsymbol{\Sigma}=\lambda(\mathrm{tr}\boldsymbol{E})\boldsymbol{I}+2\mu\boldsymbol{E},\quad \Sigma_{LM}=\lambda E_{KK}\delta_{LM}+2\mu E_{LM} \tag{6.2.7}$$

式(6.2.7)正是通常所说的线弹性材料的 Lame 形式的胡克定律(Hooke's law)。

6.2.2 各向同性张量函数的表示定理

各向同性张量函数的表示定理 自变量和因变量都是 2 阶实对称张量的任意各向同性张量函数 $\boldsymbol{\Sigma}=\hat{\boldsymbol{\Sigma}}(\boldsymbol{E})$都可表达为(6.2.5)式的形式。

证明 我们分三步来证明以上定理。

(1) $\boldsymbol{E}$ 的特征矢量必为$\boldsymbol{\Sigma}$ 的特征矢量。

以 $\boldsymbol{e}_r$表示实对称张量 $\boldsymbol{E}$ 的三个互相正交的单位特征矢量,相应的特征值为 λ_r。按矩阵的记法,可写为(见 1.16 节中的式(1.16.13a))

$$\boldsymbol{E}=[\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3]\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{e}_2^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{e}_3^{\mathrm{T}}\end{bmatrix} \tag{a}$$

设正交张量 $\boldsymbol{Q}_1$ 是关于 $\boldsymbol{e}_1$ 的反射张量，即

$$\boldsymbol{Q}_1 \cdot \boldsymbol{e}_1 = -\boldsymbol{e}_1, \quad \boldsymbol{Q}_1 \cdot \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_2, \quad \boldsymbol{Q}_1 \cdot \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_3 \tag{b}$$

由于(b)中的三个矢量仍为 $\boldsymbol{E}$ 的幺正特征矢量组，所以类似于(a)，有

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E} &= [-\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3]\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{e}_2^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{e}_3^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\\
&= [\boldsymbol{Q}_1 \cdot \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{Q}_1 \cdot \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{Q}_1 \cdot \boldsymbol{e}_3]\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}(\boldsymbol{Q}_1 \cdot \boldsymbol{e}_1)^{\mathrm{T}}\\ (\boldsymbol{Q}_1 \cdot \boldsymbol{e}_2)^{\mathrm{T}}\\ (\boldsymbol{Q}_1 \cdot \boldsymbol{e}_3)^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\\
&= [\boldsymbol{Q}_1][\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3]\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{e}_2^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{e}_3^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}[(\boldsymbol{Q}_1)^{\mathrm{T}}]\\
&= \boldsymbol{Q}_1 \cdot \boldsymbol{E} \cdot (\boldsymbol{Q}_1)^{\mathrm{T}}
\end{aligned}$$

即

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{Q}_1 \cdot \boldsymbol{E} \cdot (\boldsymbol{Q}_1)^{\mathrm{T}} \tag{c}$$

又有(6.2.4a)式对任意的正交张量 $\boldsymbol{Q}$ 都成立，取 $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}_1$，即有

$$\boldsymbol{Q}_1 \cdot \hat{\boldsymbol{\Sigma}}(\boldsymbol{E}) \cdot \boldsymbol{Q}_1^{\mathrm{T}} = \hat{\boldsymbol{\Sigma}}(\boldsymbol{Q}_1 \cdot \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{Q}_1^{\mathrm{T}}) = \hat{\boldsymbol{\Sigma}}(\boldsymbol{E})$$

即

$$\boldsymbol{Q}_1 \cdot \boldsymbol{\Sigma} = \hat{\boldsymbol{\Sigma}}(\boldsymbol{E}) \cdot \boldsymbol{Q}_1 = \boldsymbol{\Sigma} \cdot \boldsymbol{Q}_1 \tag{d}$$

所以，我们有

$$\boldsymbol{Q}_1 \cdot (\boldsymbol{\Sigma} \cdot \boldsymbol{e}_1) = (\boldsymbol{Q}_1 \cdot \boldsymbol{\Sigma}) \cdot \boldsymbol{e}_1 = (\boldsymbol{\Sigma} \cdot \boldsymbol{Q}_1) \cdot \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{\Sigma} \cdot (\boldsymbol{Q}_1 \cdot \boldsymbol{e}_1) = -\boldsymbol{\Sigma} \cdot \boldsymbol{e}_1 \tag{e}$$

式(e)说明，$\boldsymbol{Q}_1$ 也是矢量 $\boldsymbol{\Sigma} \cdot \boldsymbol{e}_1$ 的反射张量。由于 $\boldsymbol{Q}_1$ 也是矢量 $\boldsymbol{e}_1$ 的反射张量，所以必有

$$\boldsymbol{\Sigma} \cdot \boldsymbol{e}_1 = \beta_1 \boldsymbol{e}_1 \tag{f}$$

其中 β_1 为某个标量因子。式(f)恰恰说明：$\boldsymbol{e}_1$ 也是张量 $\boldsymbol{\Sigma}$ 的特征矢量，其相应的特征值为 β_1。同样可证 $\boldsymbol{E}$ 的特征矢量 $\boldsymbol{e}_2$、$\boldsymbol{e}_3$ 也必是 $\boldsymbol{\Sigma}$ 的特征矢量。这就证明了 $\boldsymbol{E}$ 的特征矢量必为 $\boldsymbol{\Sigma}$ 的特征矢量。

(2) 若 $\lambda_1 = \lambda_2$，则必有 $\beta_1 = \beta_2$；若 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$，则必有 $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3$。

设 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ 为 $\boldsymbol{E}$ 的二重特征值，相应的两个线性无关的特征矢量为 $\boldsymbol{e}_1$ 和 $\boldsymbol{e}_2$，则根据前面的证明可知，$\boldsymbol{e}_1$ 和 $\boldsymbol{e}_2$ 也必为 $\boldsymbol{\Sigma}$ 的特征矢量，设其相应的特征值分别为 β_1 和 β_2。于是我们有 $\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{e}_1 = \lambda \boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{e}_2 = \lambda \boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{\Sigma} \cdot \boldsymbol{e}_1 = \beta_1 \boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{\Sigma} \cdot \boldsymbol{e}_2 = \beta_2 \boldsymbol{e}_2$。

因为对于任意的数 a 和 b，我们都有

$$\boldsymbol{E}\cdot(a\boldsymbol{e}_1+b\boldsymbol{e}_2)=a\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{e}_1+b\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{e}_2=a\lambda\boldsymbol{e}_1+b\lambda\boldsymbol{e}_2=\lambda(a\boldsymbol{e}_1+b\boldsymbol{e}_2)$$

即二重特征值 λ 所对应的线性无关特征矢量 $\boldsymbol{e}_1$ 和 $\boldsymbol{e}_2$ 所生成的子空间中的任意矢量 $a\boldsymbol{e}_1+b\boldsymbol{e}_2$ 也必是 $\boldsymbol{E}$ 的与二重特征值 λ 相对应的特征矢量，故根据前面的证明，它也必是 $\boldsymbol{\Sigma}$ 的特征矢量，设其相应的特征值为 β，则有

$$\boldsymbol{\Sigma}\cdot(a\boldsymbol{e}_1+b\boldsymbol{e}_2)=\beta(a\boldsymbol{e}_1+b\boldsymbol{e}_2)$$

但我们又有

$$\Sigma\cdot(a\boldsymbol{e}_1+b\boldsymbol{e}_2)=a\boldsymbol{\Sigma}\cdot\boldsymbol{e}_1+b\boldsymbol{\Sigma}\cdot\boldsymbol{e}_2=a\beta_1\boldsymbol{e}_1+b\beta_2\boldsymbol{e}_2$$

于是我们有

$$\beta(a\boldsymbol{e}_1+b\boldsymbol{e}_2)=a\beta_1\boldsymbol{e}_1+b\beta_2\boldsymbol{e}_2$$

即

$$(\beta-\beta_1)a\boldsymbol{e}_1+(\beta-\beta_2)b\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{0}$$

由于 $\boldsymbol{e}_1$ 和 $\boldsymbol{e}_2$ 是线性无关的，而 a 和 b 是任意的，所以必有

$$\beta_1=\beta_2=\beta$$

这就证明了如果 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$，则必有 $\beta_1=\beta_2=\beta$。类似地可以证明：如果 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3$，则必有 $\beta_1=\beta_2=\beta_3$。

(3) 证明式(6.2.5)。

以 λ_r 和 β_r 分别表示与 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{\Sigma}$ 的幺正特征矢量组 $\boldsymbol{e}_r(r=1,2,3)$ 相对应的各自的特征值，则由式(a)可知，当以 $\boldsymbol{e}_r$ 为基时，$\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{\Sigma}$ 将同时成为对角元素为特征值的对角矩阵，故 $\boldsymbol{\Sigma}=\boldsymbol{\Sigma}(\hat{\boldsymbol{E}})$ 成为

$$\begin{bmatrix}\beta_1&0&0\\0&\beta_2&0\\0&0&\beta_3\end{bmatrix}=\hat{\boldsymbol{\Sigma}}\left(\begin{bmatrix}\lambda_1&0&0\\0&\lambda_2&0\\0&0&\lambda_3\end{bmatrix}\right)$$

故 β_r 是 λ_r 的函数：$\beta_r=\beta_r(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$。考虑 Φ_i 的线性代数方程组

$$\begin{cases}\Phi_0+\lambda_1\Phi_1+\lambda_1^2\Phi_2=\beta_1(\lambda_r)\\\Phi_0+\lambda_2\Phi_1+\lambda_2^2\Phi_2=\beta_2(\lambda_r)\\\Phi_0+\lambda_3\Phi_1+\lambda_3^2\Phi_2=\beta_3(\lambda_r)\end{cases}\tag{g}$$

当 $\lambda_1\neq\lambda_2\neq\lambda_3$ 时，有 $\Delta=\begin{Vmatrix}1&\lambda_1&\lambda_1^2\\1&\lambda_2&\lambda_2^2\\1&\lambda_3&\lambda_3^2\end{Vmatrix}=(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_3-\lambda_1)\neq0$，故 (g)式对 Φ_i 有解；当 $\lambda_1=\lambda_2\neq\lambda_3$ 时，已证 $\beta_1=\beta_2$，(g)式只有后两式是独立的，而

$\Delta_1=\begin{Vmatrix}1 & \lambda_2\\ 1 & \lambda_3\end{Vmatrix}=\lambda_3-\lambda_2\neq 0$,故对任意给定的 Φ_2,(g)式对 Φ_0、Φ_1 都有解;当 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3$ 时,已证 $\beta_1=\beta_2=\beta_3$,(g)式只有一个独立的方程,即 $\Phi_0+\lambda_3\Phi_1+\lambda_3^2\Phi_2=\beta_3$,故对任意给定的 Φ_1 和 Φ_2,(g)式对 Φ_0 有解。总之任何情况下(g)式都有解,记之为

$$\Phi_\alpha=\hat{\Phi}_\alpha(\lambda_r)=\Phi_\alpha(I_1,I_2,I_3) \tag{h}$$

即 Φ_α 是 $\boldsymbol{E}$ 的三个主不变量 I_r 的函数。将(g)式之各式分别乘以 $\boldsymbol{e}_r$,有

$$\Phi_0\boldsymbol{e}_r+\Phi_1\lambda_r\boldsymbol{e}_r+\Phi_2\lambda_r^2\boldsymbol{e}_r=\beta_r\boldsymbol{e}_r\quad(r=1,2,3,\text{不求和})$$

即

$$(\Phi_0\boldsymbol{I}+\Phi_1\boldsymbol{E}+\Phi_2\boldsymbol{E}^2)\cdot\boldsymbol{e}_r=\boldsymbol{\Sigma}\cdot\boldsymbol{e}_r\quad(r=1,2,3)$$

写为矩阵记法,即

$$[\Phi_0\boldsymbol{I}+\Phi_1\boldsymbol{E}+\Phi_2\boldsymbol{E}^2][\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3]=[\boldsymbol{\Sigma}][\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3] \tag{i}$$

因为 $\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$、$\boldsymbol{e}_3$组成幺正基,以它们为列矢量的矩阵为正交矩阵(当然是可逆的),将(i)式两端同乘以矩阵$[\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3]$的逆矩阵(即转置矩阵),即得

$$\boldsymbol{\Sigma}=\hat{\boldsymbol{\Sigma}}(\boldsymbol{E})=\Phi_0\boldsymbol{I}+\Phi_1\boldsymbol{E}+\Phi_2\boldsymbol{E}^2 \tag{6.2.5}$$

这就是我们前面要证的式(6.2.5)。定理证毕。

至于形如(6.2.5)式的张量函数 $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}(\boldsymbol{E})$是否确为 $\boldsymbol{E}$ 的各向同性张量函数,这是很容易证明的,读者可尝试证明之。因此,各向同性张量函数的表示定理可以更确切地表述为:张量函数 $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}(\boldsymbol{E})$是各向同性张量函数的充要条件是它可以表述为(6.2.5)式的形式。

各向同性张量函数的表示定理(6.2.5)式的证明方法有很多,我们上面只是给出了其中的一种证明方法。显然,我们很容易将前面的证明方法推广到 n 维空间中自变量和因变量都是2阶对称张量的各向同性张量函数的表示定理。另一个常用的证明方法是:首先将张量函数 $\boldsymbol{\Sigma}=\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{E})$展开为 $\boldsymbol{E}$ 的幂级数,然后再利用1.16节中的凯来-哈密尔顿(Cauley-Hamilton)定理进行证明,读者可作为练习证明之(参见第6章中的相关习题)。

6.2.3 各向同性材料 Cauchy 应力张量 $\boldsymbol{\sigma}$ 的本构函数

在6.2.1节的讨论中,我们所用的方法是:先由构架无关原理导出了各类应力本构方程的简化形式,然后再由材料对称性原理证明了对各向同性材料各类应力的本构函数都必为各向同性张量函数。然而,由于本构理论中的各个原理是相互独立的,所以我们也可以采用先由材料对称性原理然后再用构架无关原理进行讨

论的思路。在 5.4 节中我们已结合有记忆材料的 Cauchy 应力的本构泛函说明了这一方法，由于其重要性，也为了加深印象，现在我们再对弹性材料的特殊情况重复加以说明。

设简单弹性材料 Cauchy 应力的本构关系为 $\boldsymbol{\sigma}=\hat{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{F})$。根据材料对称性原理，如果材料是各向同性材料，则在相差一正交张量 $\boldsymbol{Q}$ 的两个 L 氏坐标系 $\boldsymbol{X}$ 和 $\overline{\boldsymbol{X}}$ 中，本构函数形式必须相同，即我们同时有

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \hat{\boldsymbol{\sigma}}(\overline{\boldsymbol{F}}), \quad \boldsymbol{\sigma} = \hat{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{F}) \tag{6.2.8}$$

但是在 L 氏坐标变换之下我们有

$$\overline{\boldsymbol{F}} = \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}, \quad \bar{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\sigma} \tag{6.2.9}$$

所以易得

$$\boldsymbol{\sigma} = \hat{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}) \tag{6.2.10}$$

(6.2.10)式对任意的正交张量 $\boldsymbol{Q}$ 都应成立。取 $\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{R}$，并利用 $\boldsymbol{F}$ 的左极分解公式，则(6.2.10)式成为

$$\boldsymbol{\sigma} = \hat{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{V}) \tag{6.2.11a}$$

式(6.2.11a)即是材料各向同性对材料本构关系形式的限制，它说明：对各向同性材料，其 Cauchy 应力 $\boldsymbol{\sigma}$ 必可以表达为左伸缩张量 $\boldsymbol{V}$ 任意函数的形式。

其次，构架无关原理要求在任意由正交张量 $\boldsymbol{Q}$ 所表达的时空系的变换

$$\bar{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{x} + \bar{\boldsymbol{x}}_0$$

之下，式(6.2.11a)中的本构函数 $\hat{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{V})$ 形式不变，即我们应同时有

$$\boldsymbol{\sigma} = \hat{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{V}), \quad \bar{\boldsymbol{\sigma}} = \hat{\boldsymbol{\sigma}}(\overline{\boldsymbol{V}}) \tag{6.2.12}$$

但在时空变换之下我们有

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}, \quad \overline{\boldsymbol{V}} = \boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}} \tag{6.2.13}$$

所以必有

$$\boldsymbol{Q}\cdot\hat{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{V})\cdot\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}} = \hat{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}) \tag{6.2.14a}$$

这说明各向同性弹性材料 Cauchy 应力的本构函数不但一定可以表达为 $\boldsymbol{\sigma}=\hat{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{V})$ 的形式(而与旋转张量 $\boldsymbol{R}$ 无关)，而且构架无关性原理还要求 $\boldsymbol{\sigma}=\hat{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{V})$ 必是 $\boldsymbol{V}$ 的各向同性张量函数，同样它也可表达为 $\boldsymbol{B}$ 或 $\boldsymbol{e}$ 的各向同性张量函数。

类似地，对各向同性弹性材料，我们也可以首先由材料对称性原理证明第一类和第二类 P-K 应力满足材料各向同性要求的本构关系分别为

$$\boldsymbol{S} = \hat{\boldsymbol{S}}(\boldsymbol{V})\cdot\boldsymbol{R}, \quad \boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\cdot\hat{\boldsymbol{\Sigma}}(\boldsymbol{V})\cdot\boldsymbol{R} \tag{6.2.11b}$$

即材料的各向同性特征要求 $\boldsymbol{S}$ 和 $\boldsymbol{\Sigma}$ 必须以 (6.2.11b)式的方式依赖于旋转张量 $\boldsymbol{R}$ 和左伸缩张量 $\boldsymbol{V}$,而且其中的本构函数 $\hat{\boldsymbol{S}}(\boldsymbol{V})$ 和 $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}(\boldsymbol{V})$ 都必须是左伸缩张量 $\boldsymbol{V}$ 的任意函数;而再由构架无关原理则可以证明式(6.2.11b) 中的本构函数 $\hat{\boldsymbol{S}}(\boldsymbol{V})$ 和 $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}(\boldsymbol{V})$ 也必然是 $\boldsymbol{V}$ 的各向同性张量函数,即对任意的正交张量 $\boldsymbol{Q}$,都必须有

$$\boldsymbol{Q}\cdot\hat{\boldsymbol{S}}(\boldsymbol{V})\cdot\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}=\hat{\boldsymbol{S}}(\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}),\quad \boldsymbol{Q}\cdot\hat{\boldsymbol{\Sigma}}(\boldsymbol{V})\cdot\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}=\hat{\boldsymbol{\Sigma}}(\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}) \tag{6.2.14b}$$

作为练习,读者可以参照前面的方法证明式(6.2.11b) 和式(6.2.14b)。

在这里我们强调指出,$\boldsymbol{\sigma}=\hat{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{V})$ 是 $\boldsymbol{V}$ 的各向同性张量函数的结论(6.2.14a)式和(6.2.14b)式是由材料本构关系的客观性原理或构架无关原理而推出的,而不是由材料各向同性所推出的,但它在数学形式上却是和各向同性材料 Cauchy 应力及第一、二类 P-K 应力的本构函数 $\boldsymbol{\sigma}=\hat{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{E})$、$\boldsymbol{S}=\hat{\boldsymbol{S}}(\boldsymbol{E})$、$\boldsymbol{\Sigma}=\hat{\boldsymbol{\Sigma}}(\boldsymbol{E})$ 为各向同性张量函数的式(6.2.4a)和式(6.2.4b)是完全类似的,而式(6.2.4a)和式(6.2.4b)所包含的 3 个公式则是由材料为各向同性所得出的,因此人们也常常把式(6.2.4a)和式(6.2.4b)所表达的性质称为“材料各向同性”,它们是材料各向同性性质的体现;而将式(6.2.14a)和式(6.2.14b)所表达的性质称为“空间各向同性”,它们是材料性质客观性的体现。

最后我们再强调一下材料的各向同性与其无歪斜构形之间的关系。尽管 Cauchy 应力 $\boldsymbol{\sigma}$ 的度量是完全不依赖于参考构形的,但是两类 P-K 应力的度量,特别是出现在本构关系中的描写介质纯变形的量 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{e})$ 以及 $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{E})$ 却是与参考构形有关的,所以我们前面所述的各向同性的概念以及结论只有在材料的无歪斜构形中才是成立的。换言之,我们只能说各向同性材料只是在其无歪斜构形中才表现出其各向同性,并且其本构关系的形式才具有以上所述的那些性质。

6.3 热弹性流体

6.3.1 热弹性流体及其非完全状态方程

在 5.4 节中我们曾经对一般的简单流体材料做了简要介绍,并指出简单流体

是一种对保持同体积的各参考构形无优选构形而且在任意参考构形中都是各向同性的材料。热弹性流体作为无记忆能力和无黏性的流体只是简单流体的特例，我们是可以直接以5.4节中所得出的结论为基础而对热弹性流体的本构关系来进行讨论的，具体内容可参见后面8.1节最后的说明即式(8.1.29)。但是为了更直观起见，我们在此再以工程上更易接受的形式来对热弹性流体的本构关系给予简单讨论。

根据6.2节中的式(6.2.11a)和式(6.2.14a)，我们已经知道了各向同性弹性材料Cauchy应力$\boldsymbol{\sigma}$的本构关系与旋转张量$\boldsymbol{R}$无关而只是左伸缩张量$\boldsymbol{V}$的函数，而且此函数还必须是$\boldsymbol{V}$的各向同性张量函数。如果我们将纯力学的情况推广到存在热效应的一般情况，则我们可以得出结论，各向同性热弹性材料Cauchy应力$\boldsymbol{\sigma}$的本构关系可以表达为

$$\boldsymbol{\sigma} = \hat{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{V}, T)$$

而且$\hat{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{V}, T)$是$\boldsymbol{V}$的各向同性张量函数，即对任意的正交张量$\boldsymbol{Q}$，都必须满足

$$\boldsymbol{Q} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{V}, T) \cdot \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}} = \hat{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}, T)$$

如我们在6.2节中曾指出的，尽管Cauchy应力$\boldsymbol{\sigma}$的度量是完全不依赖于参考构形的，但是左伸缩张量$\boldsymbol{V}$的度量却是与参考构形的选取有关的，所以我们只能说各向同性弹性材料只是在其无歪斜构形中才是各向同性的，即对一般的各向同性弹性固体而言，上述结论只是在以材料的无歪斜构形为参考构形时才是成立的。现在我们考虑一种特殊的热弹性材料，它具有如下的特殊性质：一方面它只能承受各向等值的压力p即$\boldsymbol{\sigma} = -p\boldsymbol{I}$，另一方面该种应力还只与$\boldsymbol{V} = \frac{1}{3}\theta\boldsymbol{I} + \boldsymbol{V}'$中的纯胀缩部分$\frac{1}{3}\theta\boldsymbol{I}$有关而与畸变部分无关。对此种材料，本构关系将成为

$$-p\boldsymbol{I} = \hat{\boldsymbol{\sigma}}\left(\frac{1}{3}\theta\boldsymbol{I}, T\right)$$

此种函数对任意的正交张量$\boldsymbol{Q}$都能满足各向同性张量函数的要求。而这种各向同性张量函数又将表现为标量p和θ以及T之间的任意函数关系，而初始构形的不同选择虽然会影响θ的度量，但它们也总是与介质的质量密度ρ和比容$\nu = 1/\rho$相联系的，故其本构关系可表达为

$$p = \hat{p}(\nu, T) \tag{6.3.1}$$

我们把这种特殊的热弹性材料称之为热弹性流体。换言之，在保持体积或密度相同的各构形中，热弹性流体是一种不存在优选构形的材料，而且在这些等密度的每

个构形中都是各向同性的，但是此种材料不论静止还是流动都完全不能承受切应力。热弹性流体与我们在第8章中所要讲的黏性流体是不同的，后者虽然在静止时不能承受切应力，但其在流动时却可以承受有限的黏性切应力。

对常规条件下的固体，可以将其应力分解为流体动力学压力部分 $-p\boldsymbol{I}$（平均压力）和应力偏量 $\boldsymbol{\sigma}'$ 之和：

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\boldsymbol{I} + \boldsymbol{\sigma}'$$

在第7章讲述弹塑性材料的有关内容时，我们将指出应力偏量 $\boldsymbol{\sigma}'$ 受到材料屈服条件的限制，即使考虑到材料的所谓塑性硬化效应时，其值也是不会太高的，故在压力 p 远高于应力偏量 $\boldsymbol{\sigma}'$ 各分量的数值时，材料中的应力状态将可近似地视作流体动力学压力状态。因此在高压下的固体也常可作为流体来近似处理，这就是对高压下固体的流体动力学近似。因此，当不考虑介质中的内摩擦效应时，流体和高压下的固体都可以作为热弹性流体来看待。热弹性流体本构方程的一种形式就是刚才所指出的式(6.3.1)。由于式(6.3.1)中因变量是压力 p，自变量除了比容 v 之外，另一个是温度 T，故我们将式(6.3.1)称为温度型的状态方程(equation of state)，根据下面(本小节最后一段)要讲的理由我们又将之称为一种所谓的“非完全状态方程”。与此相平行，根据另一个自变量的不同，人们又引入了另外三种形式的非完全状态方程，将这四种非完全状态方程分别写出来，即

$$p = \hat{p}(v, T) \tag{6.3.1}$$

$$p = \tilde{p}(v, s) \tag{6.3.2}$$

$$p = p'(v, u) \tag{6.3.3}$$

$$p = p(v, H) \tag{6.3.4}$$

它们中的每一个都是以压力 p 为其因变量，且都以比容 v 作为其一个自变量，而另一个自变量则分别为温度 T、比熵 s、比内能 u 和比焓 H，故我们分别称(6.3.1)式、(6.3.2)式、(6.3.3)式、(6.3.4)式为温度型、熵型、内能型、焓型状态方程。比焓 H 的定义见下面的公式：

$$H = u + pv$$

温度型状态方程(6.3.1)式可以从准静态的等温实验得出，典型的例子如普通物理中所讲过的理想气体状态方程以及实际气体的范德瓦尔斯(Van der Waals)方程

$$pv = RT, \quad \left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = RT \tag{6.3.5}$$

熵型状态方程可以由等熵波动实验得出并在求解连续波的问题中广泛应用，

因为连续波的波速是由其等熵弹性模量决定的。这里介绍几种常见的熵型状态方程。根据熵型状态方程(6.3.2)式定义等熵弹性模量(或称等熵体积压缩模量)k 为

$$k = -v\frac{\partial \tilde{p}(v,s)}{\partial v} \tag{a}$$

莫纳汉(Murnagham)假设材料的等熵弹性模量是其压力的线性函数,即

$$k = k_0 + np \tag{b}$$

其中 k_0 和 n 为常数。将式(b)代入式(a)之中,并以起始条件

$$p\mid_{v=v_0} = p_0(s) \tag{c}$$

进行积分,可得

$$p = \frac{k_0}{n}\left[\left(\frac{v_0}{v}\right)^n\left(1+n\frac{p_0(s)}{k_0}\right)-1\right] \quad (k_0\neq 0, n\neq 0) \tag{6.3.6a}$$

$$p = p_0(s) + k_0\ln\left(\frac{v_0}{v}\right) \quad (k_0\neq 0, n=0) \tag{6.3.6b}$$

$$p = p_0(s)\left(\frac{v_0}{v}\right)^n \quad (k_0 = 0, n\neq 0) \tag{6.3.6c}$$

式(b)称为 Murnagham 假设,式(6.3.6a)称为 Murnagham 状态方程,式(6.3.6b)称为对数流体状态方程,式(6.3.6c)称为多方型状态方程,它们分别是高压下固体的状态方程、液体的状态方程和气体的状态方程。式(6.3.6)的三个公式是最典型的熵型状态方程。

内能型和焓型状态方程可以通过冲击波实验得出并在求解冲击波的问题中应用,因为冲击波阵面上的能量守恒条件中含有内能和焓。基于统计物理学的考虑得出的一个固体在高压下的内能型状态方程是所谓的格吕内森(Grüneisen)状态方程:

$$p = p_k(v) + \frac{\gamma(v)}{v}[u - u_k(v)] \tag{6.3.7}$$

其中的 $p_k(v)$ 和 $u_k(v)$ 分别称为冷压和冷能,即绝对零度时的压力和内能。如果我们按照内能型状态方程定义所谓的 Grüneisen 系数:

$$\gamma(v,u) = v\frac{\partial p'(v,u)}{\partial u} \tag{d}$$

在一般情况下显然它是 v 和 u 的二元函数,Grüneisen 假定它只是比容 v 的函数,即

$$v\frac{\partial p'(v,u)}{\partial u} = \gamma(v) \tag{6.3.8}$$

以绝对零度下的初始条件

$$p\,|_{T=0} = p_k(v), \quad u\,|_{T=0} = u_k(v) \tag{e}$$

积分方程(6.3.8)式即得 Grüneisen 状态方程(6.3.7)式。可见 Grüneisen 状态方程 (6.3.7)式包含 3 个比容 v 的任意函数 $p_k(v)$、$u_k(v)$和 $\gamma(v)$，人们通常是通过以下的三个方程来确定它们：

$$p_k = -\frac{\mathrm{d}u_k}{\mathrm{d}v} \tag{6.3.9a}$$

$$p_H - p_k = \frac{\gamma}{v}(u_H - u_k) \tag{6.3.9b}$$

$$\gamma = -\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{d}^2 p_k}{\mathrm{d}v^2}\bigg/\frac{\mathrm{d}p_k}{\mathrm{d}v} \tag{6.3.9c}$$

式(6.3.9a)是能量守恒定律 $T\mathrm{d}s = \mathrm{d}u + p\mathrm{d}v$ 在绝对零度下的体现，或者说是热力学第三定律的结果(绝对零度时熵为常数)；式(6.3.9b)中的 $p_H(v)$、$u_H(v)$是由平板撞击实验数据所得出的 $p \sim v$、$u \sim v$ 的冲击波 Hugniot 关系；式(6.3.9c)称为斯莱特(Slater)公式，是 Slater 根据统计力学和量子力学的一些假定提出的，详细的说明可见有关文献。当然也有用其他的一些假定来代替 Slater 公式而连同式(6.3.9a)和式(6.3.9b)来确定函数 $p_k(v)$、$u_k(v)$和 $\gamma(v)$的。

Grüneisen 状态方程是在爆炸力学和穿破甲等高速冲击力学问题中常用的一种固体高压状态方程。

我们把式(6.3.1)～式(6.3.4)所表达的以上四类状态方程都称为非完全的状态方程(imperfect equation of state)，这是因为它们都不是所谓的热力学势函数，即单由这样的状态方程并不能简单地通过微分和代数运算的方法而确定系统的全部热力学量。为了由非完全状态方程之一确定系统所有的热力学函数，还必须辅以额外的热力学数据和信息。说明这一点的一个例子就是，由温度型状态方程 $p = \hat{p}(v, T)$(即 $v = \check{v}(p, T)$)出发，我们还需加上实验测量所得的某一固定压力 p_0 下的定压比热 C_{p_0} 为初始条件而对有关的方程进行积分才可求得一个热力学势，然后再通过微分和代数运算的方法而求得其他全部热力学量。对其他非完全状态方程也有类似情况，只不过所需要的附加信息即积分初始条件各不相同而已。但 Massien 证明了，在独立变数的适当选择下，只要有一个热力学函数确定之后，即可通过对它求导而得出全部的热力学状态变量。我们称这样的热力学函数为热力学势(thermodynamics potential)或特性函数(characteristic function)，而由热力学势所表达的状态方程称为完全的状态方程。在第 4 章中我们曾由许可性原理导出过微分关系 $\boldsymbol{\Sigma} = \rho_0 \dfrac{\partial \hat{\psi}}{\partial \boldsymbol{E}}$、$s = -\dfrac{\partial \hat{\psi}}{\partial T}$，这说明当把 L 氏应变 $\boldsymbol{E}$ 和温度 T 选为自变

量时，比自由能 ψ 是一个热力学势，$\psi=\hat{\psi}(\boldsymbol{E},T)$就是一种完全的状态方程，在热弹性流体的情况中这将表现为 $\psi=\hat{\psi}(v,T)$。

6.3.2 完全状态方程

以单位质量的介质为研究对象时最重要的热力学势有比自由能(free energy)ψ、比内能(internal energy)u、比焓(enthalpy)H 和比自由焓(free enthalpy)G(即 Gibbs 函数)，它们之间的关系由下式给出：

$$\psi = u - Ts,\quad H = u + pv,\quad G = H - Ts = u + pv - Ts \tag{6.3.10}$$

而且我们容易证明，以下各式左端的量作为其右端自变量的函数时都是热力学势，因此它们分别给出完全的状态方程：

$$u = \tilde{u}(v,s) \tag{6.3.11}$$

$$\psi = \hat{\psi}(v,T) \tag{6.3.12}$$

$$H = \bar{H}(p,s) \tag{6.3.13}$$

$$G = \check{G}(p,T) \tag{6.3.14}$$

事实上，由热力学第一定律和平衡态可逆过程的热力学第二定律以及式(6.3.10)，容易得到如下的微分关系：

$$\mathrm{d}u = -p\mathrm{d}v + T\mathrm{d}s \tag{6.3.15a}$$

$$\mathrm{d}\psi = -s\mathrm{d}T - p\mathrm{d}v \tag{6.3.15b}$$

$$\mathrm{d}H = v\mathrm{d}p + T\mathrm{d}s \tag{6.3.15c}$$

$$\mathrm{d}G = v\mathrm{d}p - s\mathrm{d}T \tag{6.3.15d}$$

将式(6.3.11)～式(6.3.14)中四个函数的全微分关系分别与式(6.3.15a)～式(6.3.15d)进行对比，并由右端自变量微分的任意性，即可得到如下的关系：

$$T = \left(\frac{\partial\tilde{u}}{\partial s}\right)_v,\quad p = -\left(\frac{\partial\tilde{u}}{\partial v}\right)_s \tag{6.3.16}$$

$$s = -\left(\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial T}\right)_v,\quad p = -\left(\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial v}\right)_T \tag{6.3.17}$$

$$T = \left(\frac{\partial\bar{H}}{\partial s}\right)_p,\quad v = \left(\frac{\partial\bar{H}}{\partial p}\right)_s \tag{6.3.18}$$

$$s = -\left(\frac{\partial\check{G}}{\partial T}\right)_p,\quad v = \left(\frac{\partial\check{G}}{\partial p}\right)_T \tag{6.3.19}$$

由式(6.3.16)可见：T 和 p 可分别作为“热力学力”由函数 $\tilde{u}(s,v)$分别对“热

力学距离”s 和 v 求导而得出，即当选择 s 和 v 为自变量时函数 $\tilde{u}(s,v)$ 为热力学势，而式(6.3.16)为一种完全的状态方程。对式(6.3.17)和式(6.3.19)也可有类似的结论。

由以上讨论可知，与非完全状态方程相比，完全状态方程有其优点。但是热力学势函数的概念比较抽象，而且它们大都是难以直接测量的量，而为了得到它们，我们还是需要由一些比较容易测量的量通过积分而导出它们。这些容易测量的量是如下一些表征介质热力学特性的物理量：

$$\begin{cases} C_v = T\left(\dfrac{\partial \hat{s}}{\partial T}\right)_v, \quad C_p = T\left(\dfrac{\partial \check{s}}{\partial T}\right)_p \\ k_T = -v\left(\dfrac{\partial \hat{p}}{\partial v}\right)_T, \quad k_s = -v\left(\dfrac{\partial \tilde{p}}{\partial v}\right)_s \\ K_T = -\dfrac{1}{v}\left(\dfrac{\partial \check{v}}{\partial p}\right)_T, \quad K_s = -\dfrac{1}{v}\left(\dfrac{\partial \bar{v}}{\partial p}\right)_s \\ \varphi_{(T)} = \left(\dfrac{\partial \hat{p}}{\partial T}\right)_v, \quad \varphi_{(s)} = \left(\dfrac{\partial \tilde{p}}{\partial s}\right)_v \\ \alpha_{(T)} = \dfrac{1}{v}\left(\dfrac{\partial \check{v}}{\partial T}\right)_p, \quad \alpha_{(s)} = \dfrac{1}{v}\left(\dfrac{\partial \bar{v}}{\partial s}\right)_p \\ \gamma = v\left(\dfrac{\partial p'}{\partial u}\right)_v \end{cases} \tag{6.3.20}$$

其中最后一式中的压力是作为比容和比内能的函数 $p = p'(v,u)$ 而求导的。如果将式(6.2.30)中右端各微分量写成为相应过程中的两个微分量之比，则容易看出它们各自的物理意义是：$C_v = \left(T\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}T}\right)_v$ 表示单位质量介质的等容热容量即等容比热；$C_p = T\left(\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}T}\right)_p$ 表示单位质量介质的等压热容量即等压比热；$k_T = \left(\dfrac{\mathrm{d}p}{-\mathrm{d}v/v}\right)_T$ 表示介质的等温体积压缩模量；$k_s = \left(\dfrac{\mathrm{d}p}{-\mathrm{d}v/v}\right)_s$ 表示介质的等熵体积压缩模量；$K_T = \left(\dfrac{-\mathrm{d}v/v}{\mathrm{d}p}\right)_T$ 表示介质的等温体积压缩柔度；$K_s = \left(\dfrac{-\mathrm{d}v/v}{\mathrm{d}p}\right)_s$ 表示介质的等熵体积压缩柔度；$\varphi_{(T)} = \left(\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}T}\right)_v$ 表示介质的(等容)温度压力系数；$\varphi_{(s)} = \left(\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}s}\right)_v$ 表示介质的(等容)熵压力系数；$\alpha_{(T)} = \left(\dfrac{\mathrm{d}v/v}{\mathrm{d}T}\right)_p$ 表示介质的(等压)温度体胀系数；

$\alpha_{(s)} = \left(\frac{\mathrm{d}v/v}{\mathrm{d}s}\right)_p$ 表示介质的(等压)熵体胀系数；$\gamma = \left(\frac{\mathrm{d}p}{\rho\mathrm{d}u}\right)_v$ 表示单位体积介质的(等容)热压力系数，即单位体积介质在等容条件下吸收单位热量引起的压力增加，简称为单位体积介质的 Grüneisen 系数。通过直接代入法容易证明它们是与各特性函数的 2 阶导数相联系的：

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial s^2} = \frac{T}{C_v} \\
&\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial v \partial s} = -\varphi_{(s)} \\
&\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial v^2} = \frac{k_s}{v} \\
&\frac{\partial^2 \hat{\psi}}{\partial T^2} = -\frac{C_v}{T} \\
&\frac{\partial^2 \hat{\psi}}{\partial v \partial T} = -\varphi_{(T)} \\
&\frac{\partial^2 \hat{\psi}}{\partial v^2} = \frac{k_T}{v} \\
&\frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial s^2} = \frac{T}{C_p} \\
&\frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial p \partial s} = v\alpha_{(s)} \\
&\frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial p^2} = -vK_s \\
&\frac{\partial^2 \check{G}}{\partial T^2} = -\frac{C_p}{T} \\
&\frac{\partial^2 \check{G}}{\partial p \partial T} = v\alpha_{(T)} \\
&\frac{\partial^2 \check{G}}{\partial p^2} = -vK_T \\
&\gamma = -\frac{v}{T}\frac{\partial^2 \hat{\psi}}{\partial v \partial T}\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial s^2}
\end{aligned}
\right.
\tag{6.3.21}
$$

式(6.3.21)的前 12 个公式很容易通过将式(6.3.20)直接代入式(6.3.10)～式(6.3.13)的各式而证明，而其中的最后一个公式则可以由 γ 的定义以及对函数 p

$= p'(v,u)$求导并利用复合函数求导的链锁法则和式(6.3.16)、式(6.3.17)而得出。式(6.3.20)中共包含11个热力学特性量，它们中的大多数量都是可以以某种方式测量的。但是事实上我们并不需要分别独立地测量它们，因为我们不难证明它们之间存在着如下的一些关系：

$$\begin{cases} k_T = \dfrac{1}{K_T} \\ k_s = \dfrac{1}{K_s} \\ \dfrac{\alpha_{(T)}}{\alpha_{(s)}} = \dfrac{C_p}{T} \\ \dfrac{\varphi_{(T)}}{\varphi_{(s)}} = \dfrac{C_v}{T} \\ \varphi_{(T)} = k_T\alpha_{(T)} \\ \varphi_{(s)} = k_s\alpha_{(s)} \\ \dfrac{\gamma}{v} = \dfrac{\varphi_{(T)}}{C_v} \\ C_p - C_v = Tv\varphi_{(T)}K_T\varphi_T \\ k_s - k_T = \dfrac{vT}{C_v}\varphi_{(T)}\varphi_{(T)}, \dfrac{C_v}{C_p} = \dfrac{k_T}{k_s} \end{cases} \tag{6.3.22}$$

这些公式是容易证明的，读者可自行完成之。由于式(6.3.22)中有8个关系(如前8个关系)是独立的，故式(6.3.20)所定义的11个热力学特性量中只有3个是独立的，所以我们只需要测量出其中的3个即可。

在这里我们指出，如果从本构关系理论的许可性原理即熵不等式出发，同样可以得到热力学势函数式(6.3.11)～式(6.3.14)的一阶微分关系式(6.3.16)～式(6.3.19)，读者可自行证明之。

最后我们对前面所讲的四个热力学势的物理意义以及它们在不可逆过程中的演变趋势做一简单说明。

内能 u 的物理意义是比较容易理解的，根据热力学第一定律，内能 u 表示介质所储藏的可以用来对外做功和放出热量的全部能量，或者反过来说内能等于介质接受外功和外热而将之储藏起来的能量：

$$du = dw + dQ = -pdv + Tds \tag{6.3.23}$$

在习惯上人们常把 Ts 称为热约束能，而自由能 $\psi = u - Ts$ 是内能 u 扣除热约束能 Ts 之后剩下的“自由”的一部分，所以称之为自由能。由于

$$d\psi = du - Tds - sdT \tag{6.3.24a}$$

而对于等温过程，有

$$d\psi = du - Tds = du - dQ = dW \quad (\text{等温过程}) \qquad (6.3.24b)$$

所以作为内能一部分的自由能是在等温过程中由外部的变形功储藏起来的那部分能量。

根据焓的定义，我们有

$$dH = du + pdv + vdp \qquad (6.3.25a)$$

而对于等压过程，有

$$dH = du + pdv = dQ \quad (\text{等压过程}) \qquad (6.3.25b)$$

所以焓表示介质在等压条件下吸收外热而储藏起来的能量，故焓也常称为热焓。类似于自由能与内能的关系，我们也可以把自由焓 $G = H - Ts$ 视之为焓中扣除热约束能 Ts 之后所剩余的能量，但这个解释显然只是一种形式上的解释而已。

在不可逆过程中，我们有

$$du = dw + dQ \leqslant - pdv + Tds \qquad (6.3.26a)$$

$$d\psi = du - Tds - sdT = - pdv + dQ - Tds - sdT \leqslant - pdv - sdT \qquad (6.3.26b)$$

$$\begin{aligned} dH &= du + pdv + vdp = - pdv + dQ + pdv + vdp \\ &\leqslant Tds + vdp \end{aligned} \qquad (6.3.26c)$$

$$\begin{aligned} dG &= du + pdv + vdp - Tds - sdT \\ &= - pdv + dQ + pdv + vdp - Tds - sdT \\ &\leqslant vdp - sdT \end{aligned} \qquad (6.3.26d)$$

由以上四式可见：对于初终态比容和熵都相等的不可逆过程必有 $du \leqslant 0$，即在保持初终态比容和熵都不变的不可逆过程中，内能必然减小，所以在比容和熵都保持不变的情况下平衡态的内能最小；对于初终态比容和温度都相等的不可逆过程必有 $d\psi \leqslant 0$，即在保持初终态比容和温度都不变的不可逆过程中，自由能必然减小，所以在比容和温度都保持不变的情况下平衡态的自由能最小；对于初终态压力和熵都相等的不可逆过程必有 $dH \leqslant 0$，即在保持初终态压力和熵都不变的不可逆过程中，焓必然减小，所以在压力和熵都保持不变的情况下平衡态的焓最小；对于初终态压力和温度都相等的不可逆过程必有 $dG \leqslant 0$，即在保持初终态压力和温度都不变的不可逆过程中，自由焓必然减小，所以在压力和温度都保持不变的情况下平衡态的自由焓最小。这样我们就找到了保持 v、s、P、T 中的两个力热对偶量不变的四种特殊类型的不可逆过程，在这些不可逆过程中相应的某个热力学势必然只能减小而不能增加。这就是由热力学势的演化特征所给出的对自发热力学过程不可逆性的方向性描述。值得注意的是，这里所说的力热对偶量和相应热力学势之间

的对应关系恰恰是与式(6.3.11)～式(6.3.14) 的配套关系相一致的。

6.4 热弹性固体

6.4.1 非完全状态方程

与热弹性流体的非完全状态方程相类似,以第二类 P-K 应力的本构关系为例,人们通常所用的热弹性固体的非完全状态方程如式(6.4.1)～式(6.4.4)所示:

$$\boldsymbol{\Sigma} = \hat{\boldsymbol{\Sigma}}(\boldsymbol{E}, T) \tag{6.4.1}$$

$$\boldsymbol{\Sigma} = \widetilde{\boldsymbol{\Sigma}}(\boldsymbol{E}, s) \tag{6.4.2}$$

$$\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\Sigma}'(\boldsymbol{E}, u) \tag{6.4.3}$$

$$\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{E}, H) \tag{6.4.4}$$

它们是将式(6.3.1)～式(6.3.4)中的比容 v 改为 L 氏应变 $\boldsymbol{E}$、将压力 p 改为第二类 P-K 应力 $\boldsymbol{\Sigma}$ 而得出的。式(6.4.1)～式(6.4.4)分别称之为温度型、熵型、内能型、焓型的非完全状态方程。

对热弹性固体可以进行和热弹性流体平行的讨论。对热弹性固体,比自由能 ψ、比焓 H 和比自由焓 G 由下式定义:

$$\psi = u - Ts, \quad H = u - \boldsymbol{\Sigma} : \boldsymbol{E}/\rho_0, \quad G = H - Ts \tag{6.4.5}$$

它们类似于热弹性流体中各量的定义,只不过由于在固体中通常以拉应力为正,故比焓 H 和比内能 u 关系中的第二项增加了一个负号。

6.4.2 完全状态方程

如果我们引入 u、ψ、H、G 的如下本构函数:

$$u = \tilde{u}(\boldsymbol{E}, s) \tag{6.4.6}$$

$$\psi = \hat{\psi}(\boldsymbol{E}, T) \tag{6.4.7}$$

$$H = \bar{H}(\boldsymbol{\Sigma}, s) \tag{6.4.8}$$

$$G = \check{G}(\boldsymbol{\Sigma}, T) \tag{6.4.9}$$

则与热弹性流体的情况相类似,由平衡态热力学基本原理的热力学第一和第二定

律，容易证明如下的一阶微分关系：

$$T = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial s}, \quad \boldsymbol{\Sigma} = \rho_0 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \boldsymbol{E}} \tag{6.4.10}$$

$$s = -\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial T}, \quad \boldsymbol{\Sigma} = \rho_0 \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \boldsymbol{E}} \tag{6.4.11}$$

$$T = \frac{\partial \bar{H}}{\partial s}, \quad \boldsymbol{E} = -\rho_0 \frac{\partial \bar{H}}{\partial \boldsymbol{\Sigma}} \tag{6.4.12}$$

$$s = -\frac{\partial \check{G}}{\partial T}, \quad \boldsymbol{E} = -\rho_0 \frac{\partial \check{G}}{\partial \boldsymbol{\Sigma}} \tag{6.4.13}$$

事实上，例如我们有

$$\mathrm{d}u = \mathrm{d}Q + \mathrm{d}W = T\mathrm{d}s + \boldsymbol{\Sigma} : \mathrm{d}\boldsymbol{E}/\rho_0 \tag{a}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\psi &= \mathrm{d}u - T\mathrm{d}s - s\mathrm{d}T \\ &= T\mathrm{d}s + \boldsymbol{\Sigma} : \mathrm{d}\boldsymbol{E}/\rho_0 - T\mathrm{d}s - s\mathrm{d}T = \boldsymbol{\Sigma} : \mathrm{d}\boldsymbol{E}/\rho_0 - s\mathrm{d}T \end{aligned} \tag{b}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{d}H &= \mathrm{d}u - \boldsymbol{\Sigma} : \mathrm{d}\boldsymbol{E}/\rho_0 - \boldsymbol{E} : \mathrm{d}\boldsymbol{\Sigma}/\rho_0 \\ &= T\mathrm{d}s + \boldsymbol{\Sigma} : \mathrm{d}\boldsymbol{E}/\rho_0 - \boldsymbol{\Sigma} : \mathrm{d}\boldsymbol{E}/\rho_0 - \boldsymbol{E} : \mathrm{d}\boldsymbol{\Sigma}/\rho_0 = T\mathrm{d}s - \boldsymbol{E} : \mathrm{d}\boldsymbol{\Sigma}/\rho_0 \end{aligned} \tag{c}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{d}G &= \mathrm{d}H - T\mathrm{d}s - s\mathrm{d}T = T\mathrm{d}s - \boldsymbol{E} : \mathrm{d}\boldsymbol{\Sigma}/\rho_0 - T\mathrm{d}s - s\mathrm{d}T \\ &= -\boldsymbol{E} : \mathrm{d}\boldsymbol{\Sigma}/\rho_0 - s\mathrm{d}T \end{aligned} \tag{d}$$

而对本构关系(6.4.6)式～(6.4.9)式求微分，则可得到：

$$\mathrm{d}u = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial s}\mathrm{d}s + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \boldsymbol{E}} : \mathrm{d}\boldsymbol{E} \tag{a$'$}$$

$$\mathrm{d}\psi = \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \boldsymbol{E}} : \mathrm{d}\boldsymbol{E} + \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial T}\mathrm{d}T \tag{b$'$}$$

$$\mathrm{d}H = \frac{\partial \bar{H}}{\partial s}\mathrm{d}s + \frac{\partial \bar{H}}{\partial \boldsymbol{E}} : \mathrm{d}\boldsymbol{E} \tag{c$'$}$$

$$\mathrm{d}G = \frac{\partial \check{G}}{\partial \boldsymbol{\Sigma}} : \mathrm{d}\boldsymbol{\Sigma} + \frac{\partial \check{G}}{\partial T}\mathrm{d}T \tag{d$'$}$$

对比式(a)′～式(d)′和式(a)～式(d)，并利用微过程的任意性，我们立即可以得到一阶微分关系(6.4.10)式～(6.4.13)式。而式(6.4.10)～式(6.4.13)即说明了由本构函数式(6.4.6)～式(6.4.9)通过求导即可确定其他的一切热力学状态函数，这就说明了 $\hat{\psi}$、$\tilde{u}$、$\bar{H}$、$\check{G}$ 确是热力学势函数，而式(6.4.6)、式(6.4.7)、式(6.4.8)、式(6.4.9)都是完全的状态方程。与热弹性流体情况类似，可引入热弹性固体的如下热力学特性量：

$$\left\{\begin{aligned}
&C_E = T\left(\frac{\partial \hat{s}}{\partial T}\right)_E, \quad C_\Sigma = T\left(\frac{\partial \check{s}}{\partial T}\right)_\Sigma \\
&\boldsymbol{k}_T = \left(\frac{\partial \hat{\boldsymbol{\Sigma}}}{\partial \boldsymbol{E}}\right)_T, \quad \boldsymbol{k}_S = \left(\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\Sigma}}}{\partial \boldsymbol{E}}\right)_s \\
&\boldsymbol{K}_T = \left(\frac{\partial \check{\boldsymbol{E}}}{\partial \boldsymbol{\Sigma}}\right)_T, \quad \boldsymbol{K}_S = \left(\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{E}}}{\partial \boldsymbol{\Sigma}}\right)_s \\
&\boldsymbol{\varphi}_{(T)} = \left(\frac{\partial \hat{\boldsymbol{\Sigma}}}{\partial T}\right)_E, \quad \boldsymbol{\varphi}_{(S)} = \left(\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\Sigma}}}{\partial s}\right)_E \\
&\boldsymbol{\alpha}_{(T)} = \left(\frac{\partial \check{\boldsymbol{E}}}{\partial T}\right)_\Sigma, \quad \boldsymbol{\alpha}_{(S)} = \left(\frac{\partial \bar{\boldsymbol{E}}}{\partial s}\right)_\Sigma \\
&\boldsymbol{\gamma} = \frac{1}{\rho_0}\left(\frac{\partial \boldsymbol{\Sigma}'}{\partial u}\right)_E
\end{aligned}\right. \tag{6.4.14}$$

与流体情况类似,易证它们也是与热力学势的2阶导数相联系的:

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial s^2} = \frac{T}{C_E} \\
&\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \boldsymbol{E}\partial s} = \boldsymbol{\varphi}_{(S)}/\rho_0 \\
&\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \boldsymbol{E}\partial \boldsymbol{E}} = \frac{1}{\rho_0}\boldsymbol{k}_S \\
&\frac{\partial^2 \hat{\psi}}{\partial T^2} = -\frac{C_E}{T} \\
&\frac{\partial^2 \hat{\psi}}{\partial \boldsymbol{E}\partial T} = \frac{1}{\rho_0}\boldsymbol{\varphi}_{(T)} \\
&\frac{\partial^2 \hat{\psi}}{\partial \boldsymbol{E}\partial \boldsymbol{E}} = \frac{1}{\rho_0}\boldsymbol{k}_T \\
&\frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial s^2} = \frac{T}{C_\Sigma} \\
&\frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial \boldsymbol{\Sigma}\partial s} = -\frac{1}{\rho_0}\boldsymbol{\alpha}_{(S)} \\
&\frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial \boldsymbol{\Sigma}\partial \boldsymbol{\Sigma}} = -\frac{1}{\rho_0}\boldsymbol{K}_S
\end{aligned}\right. \tag{6.4.15}$$

$$\left\{\begin{aligned}&\frac{\partial^2 \check{G}}{\partial T^2}=-\frac{C_\Sigma}{T}\\&\frac{\partial^2 \check{G}}{\partial \boldsymbol{\Sigma}\partial T}=-\frac{1}{\rho_0}\boldsymbol{\alpha}_{(T)}\\&\frac{\partial^2 \check{G}}{\partial \boldsymbol{\Sigma}\partial \boldsymbol{\Sigma}}=-\frac{1}{\rho_0}\boldsymbol{K}_T\\&\boldsymbol{\gamma}=\frac{\partial^2 \hat{\psi}}{\partial \boldsymbol{E}\partial T}\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial s^2}/T\end{aligned}\right. \tag{6.4.15}$$

式(6.4.14)和式(6.4.15)中的 C_E 和 C_Σ 分别是定应变和定应力比热(为标量),$\boldsymbol{k}_T$ 和 $\boldsymbol{k}_S$ 分别是等温弹性模量张量和等熵弹性模量张量(为 4 阶完全对称张量),$\boldsymbol{K}_T$ 和 $\boldsymbol{K}_S$ 分别是等温柔度张量和等熵柔度张量(为 4 阶完全对称张量),$\boldsymbol{\varphi}_{(T)}$ 和 $\boldsymbol{\varphi}_{(S)}$ 分别是(等应变)温度应力张量和(等应变)熵应力张量(为 2 阶对称张量),$\boldsymbol{\alpha}_{(T)}$ 和 $\boldsymbol{\alpha}_{(S)}$ 分别是(等应力)温度应变张量和(等应力)熵应变张量(为 2 阶对称张量),$\boldsymbol{\gamma}$ 是 Grüneisen 张量(为 2 阶对称张量)。可以证明,这 11 个热力学量之间也存在着与热弹性流体情况中式(6.3.22)相类似的关系。为了简化书写方式,人们常常采用张量的 Voigt 记法,即把三维空间中的 2 阶对称张量看做六维空间中的矢量,把三维空间中的 4 阶完全对称张量看做六维空间中的 2 阶对称张量(为了保证变形功共轭表达式的不变性,取对应关系为 $\Sigma_{11}\sim\Sigma_1$、$\Sigma_{22}\sim\Sigma_2$、$\Sigma_{33}\sim\Sigma_3$、$\Sigma_{23}\sim\Sigma_4$、$\Sigma_{31}\sim\Sigma_5$、$\Sigma_{12}\sim\Sigma_6$、$E_{11}\sim E_1$、$E_{22}\sim E_2$、$E_{33}\sim E_3$、$2E_{23}\sim E_4$、$2E_{31}\sim E_5$、$2E_{12}\sim E_6$)。以 Voigt 记法来表达时,式(6.4.14)所定义的这 11 个热力学量间的关系可由以下方程表示:

$$\left\{\begin{aligned}&\boldsymbol{k}_T\cdot\boldsymbol{K}_T=\boldsymbol{I}\\&\boldsymbol{k}_S\cdot\boldsymbol{K}_S=\boldsymbol{I}\\&\boldsymbol{\alpha}_{(T)}=\frac{C_\Sigma}{T}\boldsymbol{\alpha}_{(S)}\\&\boldsymbol{\varphi}_{(T)}=\frac{C_\Sigma}{T}\boldsymbol{\varphi}_{(S)}\\&\boldsymbol{\varphi}_T=\boldsymbol{k}_T\cdot\boldsymbol{\alpha}_{(T)}\\&\boldsymbol{\varphi}_S=\boldsymbol{k}_S\cdot\boldsymbol{\alpha}_{(S)}\\&\rho_0\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\varphi}_{(T)}/C_E\\&C_\Sigma-C_E=\frac{T}{\rho_0}\boldsymbol{\varphi}_{(T)}\cdot\boldsymbol{K}_T\cdot\boldsymbol{\varphi}_{(T)}\end{aligned}\right. \tag{6.4.16}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{k}_S - \boldsymbol{k}_T = \dfrac{T}{\rho_0 C_E}\boldsymbol{\varphi}_{(T)}\boldsymbol{\varphi}_{(T)} \\ \dfrac{C_E}{C_\Sigma} = \dfrac{\det(\boldsymbol{k}_T)}{\det(\boldsymbol{k}_S)} \end{cases} \tag{6.4.16}$$

对比6.4节和6.3节中有关的公式可见，除了弹性流体中有关标量改成为弹性固体中的相应2阶对称张量和4阶完全对称张量以外，它们的相应公式是可以进行类比的，只需将流体中的压力 p 改为固体中的应力$\boldsymbol{\Sigma}$，将流体中的比容 v 改为固体中的 $\boldsymbol{E}/\rho_0$ 即可。

最后我们指出一个特殊的情况。当(等应力)温度应变张量 $\boldsymbol{\alpha}_{(T)}=\boldsymbol{0}$ 时，由式(6.4.16)各式，易证有

$$\boldsymbol{\alpha}_{(T)} = \boldsymbol{\alpha}_{(S)} = \boldsymbol{\varphi}_{(T)} = \boldsymbol{\varphi}_{(S)} = \boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{0},\quad C_\Sigma = C_E,\quad \boldsymbol{k}_S = \boldsymbol{k}_T,\quad \boldsymbol{K}_S = \boldsymbol{K}_T \tag{6.4.17}$$

故

$$\boldsymbol{\alpha}_{(T)} = \left(\frac{\partial \check{\boldsymbol{E}}}{\partial T}\right)_\Sigma = -\rho_0 \frac{\partial^2 \check{G}}{\partial \boldsymbol{\Sigma}\partial T} = \rho_0 \left(\frac{\partial \check{s}}{\partial \boldsymbol{\Sigma}}\right)_T = \boldsymbol{0}$$

因此，我们必有

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{\Sigma}) \quad (\text{或 } \boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{E})) \tag{6.4.18}$$

$$s = s(T) \quad (\text{或 } T = T(s)) \tag{6.4.19}$$

即力学效应与热效应完全互不耦合，我们称此种材料为力性的(piezotropic)材料。此时，对方程 $\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{E})=\rho_0\left(\dfrac{\partial \tilde{u}}{\partial \boldsymbol{E}}\right)_s$ 进行积分，可得

$$\begin{cases} u = u_k(\boldsymbol{E}) + u_T(s) \\ \boldsymbol{\Sigma} = \rho_0 \dfrac{\mathrm{d}u_k}{\mathrm{d}\boldsymbol{E}} \\ T = \dfrac{\mathrm{d}u_T}{\mathrm{d}s} \end{cases} \tag{6.4.20}$$

即力性材料的内能可分解为冷能 $u_k(\boldsymbol{E})$与热能 $u_T(s)$之和，冷能只与变形有关，热能只与熵(或温度)有关。

6.4.3 熵不等式、热流矢量的本构关系和热传导张量

如果从本构理论的许可性原理即熵不等式出发，同样可以证明一阶微分关系(6.4.10)式、(6.4.11)式、(6.4.12)式、(6.4.13)式。以自由能 ψ 为例，设简单材料自由能本构关系为 $\psi=\hat{\psi}(\boldsymbol{F},T,\boldsymbol{G})$，易证其满足构架无关原理要求的本构方程的

最一般形式必为(请读者证之)

$$\psi = \hat{\psi}(\boldsymbol{E}, T, \boldsymbol{G})$$

对此式求随体导数,并将之代入以自由能表达的熵不等式(见 4.3 节式(4.3.26))

$$\rho_0 \delta = \rho_0 T \dot{s}^i = -\rho_0(\dot{\psi} + \dot{T}s) + \boldsymbol{\Sigma} : \dot{\boldsymbol{E}} - \frac{1}{T}\boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{G} \geqslant 0$$

之中,可得

$$\rho_0 \delta \equiv -\rho_0\left(\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \boldsymbol{E}} - \frac{\boldsymbol{\Sigma}}{\rho_0}\right) : \dot{\boldsymbol{E}} - \rho_0\left(\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial T} + s\right)\dot{T} - \rho_0 \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \boldsymbol{G}} \cdot \dot{\boldsymbol{G}} - \frac{1}{T}\boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{G} \geqslant 0 \tag{6.4.21}$$

此式对任意的宏观微过程都成立,即对任意的 $\dot{\boldsymbol{E}}$、$\dot{T}$、$\dot{\boldsymbol{G}}$ 都成立,故可得

$$\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \boldsymbol{G}} = \boldsymbol{0}, \quad s = -\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial T}, \quad \boldsymbol{\Sigma} = \rho_0 \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \boldsymbol{E}} \tag{6.4.11$'$}$$

其中的第一式说明自由能 $\hat{\psi}$ 与温度梯度 $\boldsymbol{G}$ 无关,而后两式正是式(6.4.11),这说明了 $\hat{\psi} = \hat{\psi}(\boldsymbol{E}, T)$ 确为热力学势。对其他的热力学势 u、H、G,也可进行类似的推理并得出与式(6.4.10)、式(6.4.12)、式(6.4.13)相同的一阶微分关系。这说明引入热力学势可以有两种不同的途径,一是通过平衡态可逆过程热力学的第一和第二定律,一是通过不可逆过程热力学的熵不等式即许可性原理,这两种方法殊途同归,所得出的结果是完全相同的。

将式(6.4.11)$'$代入式(6.4.21),可得简化的熵不等式如下:

$$\rho_0 \delta \equiv -\frac{1}{T}\boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{G} \geqslant 0, \quad T\rho_0 \delta \equiv -\boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{G} \geqslant 0 \tag{6.4.22}$$

式(6.4.22)即是热传导不可逆性的体现:热量自发地向温度梯度相反的半空间传递。

需要说明的是,由以上的推理,我们只能得出比自由能 $\hat{\psi}$、比熵 s 和应力 $\boldsymbol{\Sigma}$ 与温度梯度 $\boldsymbol{G}$ 无关的结论,但是我们并不能得出热流矢量 $\boldsymbol{H}$ 与温度梯度无关的结论,简化的熵不等式将是对热流矢量 $\boldsymbol{H}$ 与温度梯度 $\boldsymbol{G}$ 之间关系的一个限制性条件。下面我们来对此做一简要说明。设热流矢量构架无关的本构关系为 $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}(\boldsymbol{E}, T, \boldsymbol{G})$,由于 $\boldsymbol{G} = \boldsymbol{0}$ 时 $\rho_0 T\delta = -\boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{G} = 0$,所以式(6.4.21)说明对一定的变形 $\boldsymbol{E}$ 和温度 T,$\rho_0 T\delta$ 在 $\boldsymbol{G} = \boldsymbol{0}$ 时有一极小值,故必有

$$\left.\frac{\partial(\rho_0 T\delta)}{\partial \boldsymbol{G}}\right|_{\boldsymbol{G}=\boldsymbol{0}} = \boldsymbol{0} \tag{6.4.22a}$$

$$\boldsymbol{N} \cdot \left(\left.\frac{\partial^2(\rho_0 T\delta)}{\partial \boldsymbol{G}^2}\right|_{\boldsymbol{G}=\boldsymbol{0}}\right) \cdot \boldsymbol{N} \geqslant 0 \quad (\text{对任意矢量 } \boldsymbol{N}) \tag{6.4.22b}$$

式(6.4.22b)说明$\left.\frac{\partial^2(\rho_0 T\delta)}{\partial \boldsymbol{G}^2}\right|_{\boldsymbol{G}=0}$为半正定的2阶张量。由于

$$\rho_0 T\delta = -\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{G} = -H_I G_I$$

$$\frac{\partial(\rho_0 T\delta)}{\partial G_K} = -H_I\delta_{IK} - \frac{\partial H_I}{\partial G_K}G_I = -H_K - G_I\frac{\partial H_I}{\partial G_K}$$

$$\frac{\partial^2(\rho_0 T\delta)}{\partial G_L \partial G_K} = -\frac{\partial H_K}{\partial G_L} - \frac{\partial H_I}{\partial G_K}\delta_{IL} - \frac{\partial^2 H_I}{\partial G_L \partial G_K}G_I = -\frac{\partial H_K}{\partial G_L} - \frac{\partial G_L}{\partial G_K} - \frac{\partial^2 H_I}{\partial G_L \partial G_K}G_I$$

即

$$\frac{\partial(\rho_0 T\delta)}{\partial \boldsymbol{G}} = -\boldsymbol{H} - \boldsymbol{G}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial \boldsymbol{G}}$$

$$\frac{\partial^2(\rho_0 T\delta)}{\partial \boldsymbol{G}^2} = -\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial \boldsymbol{G}} - \left(\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial \boldsymbol{G}}\right)^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{G}\cdot\frac{\partial^2 \boldsymbol{H}}{\partial \boldsymbol{G}^2}$$

所以式(6.4.22a)和式(6.4.22b)分别给出

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{E},T,\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0} \tag{6.4.23a}$$

$$\boldsymbol{N}\cdot\left.\left[-\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial \boldsymbol{G}} - \left(\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial \boldsymbol{G}}\right)^{\mathrm{T}}\right]\right|_{\boldsymbol{G}=0}\cdot\boldsymbol{N} \geqslant 0 \quad (\text{对任意矢量 } \boldsymbol{N}) \tag{6.4.23b}$$

定义下列对称张量为热传导张量(thermal conductivity tensor)：

$$\boldsymbol{k} = \hat{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{E},T,\boldsymbol{G}) \equiv -\frac{1}{2}\left[\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial \boldsymbol{G}} + \left(\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial \boldsymbol{G}}\right)^{\mathrm{T}}\right] \tag{6.4.24a}$$

它是介质的热力学性质，则(6.4.23)式说明，$\boldsymbol{k}$ 在 $\boldsymbol{G}=\boldsymbol{0}$ 处是半正定的，式(6.4.23)可写为

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{E},T,\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0} \tag{6.4.25a}$$

$$\boldsymbol{N}\cdot\hat{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{E},T,\boldsymbol{0})\cdot\boldsymbol{N} \geqslant 0 \quad (\text{对任意矢量 } \boldsymbol{N}) \tag{6.4.25b}$$

式(6.4.25a)说明：在温度梯度等于**0**时热流矢量为**0**。式(6.4.25b)则说明：在温度梯度矢量等于**0**的地方热传导张量必须是半正定的，这是热力学第二定律在热弹性固体情况下的体现。物理上通常有$\left(\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial \boldsymbol{G}}\right)^{\mathrm{T}} = \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial \boldsymbol{G}}$对称，此时有

$$\boldsymbol{k} = -\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial \boldsymbol{G}} \tag{6.4.24b}$$

我们指出两种特别的情况：当介质的 $\boldsymbol{k}(\boldsymbol{E},T,\boldsymbol{G})=\boldsymbol{0}$恒为零张量时，我们恒有 $\boldsymbol{H}=\boldsymbol{0}$(积分式(6.4.24b)并利用初始条件式(6.4.23a)即可得 $\boldsymbol{H}=\boldsymbol{0}$)，这说明不管 $\boldsymbol{G}$ 是否为**0**介质都不传热，此种介质称为非导体或绝缘体(nonconductor)；当 $\boldsymbol{k}(\boldsymbol{E},T,\boldsymbol{G})$为正定对称张量时，热传导耗散恒正，此种介质称为定导体(definite conductor)。

6.4.4 关于热力学势的进一步说明

前面在6.3节中我们主要从热力学的角度对热力学势的物理意义进行了说明,为了加深理解,现在我们再就纯力学的情况对它们的意义和之间的关系做一些解释。在纯力学的情况下 Ts 为常数,在忽略这一常数的情况下,比自由能即等于比内能,比自由焓即等于比焓。根据各热力学势间的关系(6.4.5)式以及纯力学情况下的能量守恒,我们有

$$\psi + Ts = u = \int_0^{\boldsymbol{E}} \frac{1}{\rho_0}\boldsymbol{\Sigma} : \mathrm{d}\boldsymbol{E} \tag{6.4.26a}$$

$$-H = -G - Ts = \frac{1}{\rho_0}\boldsymbol{\Sigma} : \boldsymbol{E} - u = \frac{1}{\rho_0}\boldsymbol{\Sigma} : \boldsymbol{E} - \int_0^{\boldsymbol{E}} \frac{1}{\rho_0}\boldsymbol{\Sigma} : \mathrm{d}\boldsymbol{E} = \int_0^{\boldsymbol{\Sigma}} \frac{1}{\rho_0}\boldsymbol{E} : \mathrm{d}\boldsymbol{\Sigma} \tag{6.4.26b}$$

式(6.4.26)说明,在纯力学的情况下,比自由能和比内能即是比应变能(strain energy),如图6.1中曲线三角形OBD的面积所示,比焓的负值和比自由焓的负值即是力学中所谓的比余能(complementary energy),如图6.1中曲线三角形OCD的面积所示。

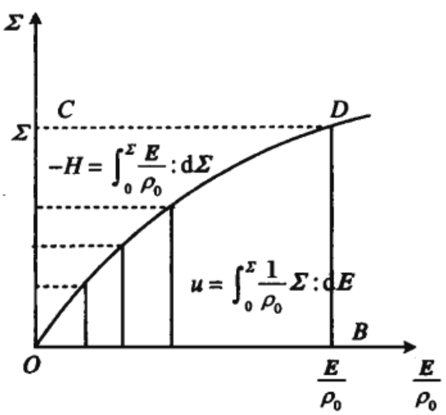


图6.1 比应变能和比余能

习　题

6.1　设 $\boldsymbol{E}$ 为 L 氏应变张量，试证明：$\boldsymbol{E}^2$、$\boldsymbol{E}^3$ 都是 $\boldsymbol{E}$ 的各向同性张量函数。

6.2　试利用凯来-哈密尔顿定理导出各向同性张量函数的表达式(6.2.5)式。

6.3　试将书中对各向同性张量函数表达定理的证明由三维空间推广到 n 维空间。

6.4　设简单弹性材料 Cauchy 应力本构关系为 $\boldsymbol{\sigma}=\hat{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{F})$，试由构架无关原理证明：必有 $\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{R}\cdot\hat{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{U})\cdot\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}$。设材料又是各向同性的，试证明：$\hat{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{U})$必为 $\boldsymbol{U}$ 的各向同性张量函数。

6.5　设各向同性简单弹性材料 Cauchy 应力本构关系为 $\boldsymbol{\sigma}=\hat{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{F})$，试由材料对称性原理证明：必有 $\boldsymbol{\sigma}=\hat{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{V})$。再由构架无关原理，证明：$\hat{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{V})$必为 $\boldsymbol{V}$ 的各向同性张量函数。

6.6　设简单弹性材料第一类 P-K 应力本构关系为 $\boldsymbol{S}=\hat{\boldsymbol{S}}(\boldsymbol{F})$，试由构架无关原理证明：必有 $\boldsymbol{S}=\boldsymbol{R}\cdot\hat{\boldsymbol{S}}(\boldsymbol{U})$。设材料又是各向同性的，试证明：$\hat{\boldsymbol{S}}(\boldsymbol{U})$必为 $\boldsymbol{U}$ 的各向同性张量函数。

6.7　设各向同性简单弹性材料第一类 P-K 应力本构关系为 $\boldsymbol{S}=\hat{\boldsymbol{S}}(\boldsymbol{F})$，试由材料对称性原理证明：必有 $\boldsymbol{S}=\hat{\boldsymbol{S}}(\boldsymbol{V})\cdot\boldsymbol{R}$。再由构架无关原理，证明：$\hat{\boldsymbol{S}}(\boldsymbol{V})$必为 $\boldsymbol{V}$ 的各向同性张量函数。

6.8　设简单弹性材料第二类 P-K 应力本构关系为 $\boldsymbol{\Sigma}=\hat{\boldsymbol{\Sigma}}(\boldsymbol{F})$，试由构架无关原理证明：必有 $\boldsymbol{\Sigma}=\hat{\boldsymbol{\Sigma}}(\boldsymbol{U})$。设材料又是各向同性的，试证明：$\hat{\boldsymbol{\Sigma}}(\boldsymbol{U})$必为 $\boldsymbol{U}$ 的各向同性张量函数。

6.9　设各向同性简单弹性材料第二类 P-K 应力本构关系为 $\boldsymbol{\Sigma}=\hat{\boldsymbol{\Sigma}}(\boldsymbol{F})$，试由材料对称性原理证明：必有 $\boldsymbol{\Sigma}=\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\cdot\hat{\boldsymbol{\Sigma}}(\boldsymbol{V})\cdot\boldsymbol{R}$。再由构架无关原理，证明：$\hat{\boldsymbol{\Sigma}}(\boldsymbol{V})$必为 $\boldsymbol{V}$ 的各向同性张量函数。

6.10　设热弹性材料自由能的本构关系为 $\Psi=\hat{\Psi}(\boldsymbol{E},T,\boldsymbol{G})$。

(1) 试由平衡态可逆过程热力学第一定律和第二定律证明：必有 $\Psi=\hat{\Psi}(\boldsymbol{E},$

T)，且为热力学势，即$\dfrac{\partial\hat{\Psi}}{\partial\boldsymbol{G}}=\boldsymbol{0}, s=-\dfrac{\partial\hat{\Psi}}{\partial T}, \boldsymbol{\Sigma}=\rho_0\dfrac{\partial\breve{G}}{\partial\boldsymbol{E}}$；

(2) 试由不可逆过程热力学第二定律的熵不等式，证明同样的结论。

6.11　设热弹性材料比内能的本构关系为 $u=\tilde{u}(\boldsymbol{E},s,\boldsymbol{G})$。

(1) 试由平衡态可逆过程热力学第一定律和第二定律证明：必有 $u=\tilde{u}(\boldsymbol{E},s)$，且为热力学势，即$\dfrac{\partial\tilde{u}}{\partial\boldsymbol{G}}=\boldsymbol{0}, T=\dfrac{\partial\tilde{u}}{\partial s}, \boldsymbol{\Sigma}=\rho_0\dfrac{\partial\tilde{u}}{\partial\boldsymbol{E}}$；

(2) 试由不可逆过程热力学第二定律的熵不等式，证明同样的结论。

6.12　设热弹性材料焓的本构关系为 $H=\bar{H}(\boldsymbol{\Sigma},s,\boldsymbol{G})$。

(1) 试由平衡态可逆过程热力学第一定律和第二定律证明：必有 $H=\bar{H}(\boldsymbol{\Sigma},s)$，且为热力学势，即$\dfrac{\partial\bar{H}}{\partial\boldsymbol{G}}=\boldsymbol{0}, T=\dfrac{\partial\bar{H}}{\partial s}, \boldsymbol{E}=-\rho_0\dfrac{\partial\bar{H}}{\partial\boldsymbol{\Sigma}}$；

(2) 试由不可逆过程热力学第二定律的熵不等式，证明同样的结论。

6.13　设热弹性材料自由焓的本构关系为 $G=\check{G}(\boldsymbol{\Sigma},T,\boldsymbol{G})$。

(1) 试由平衡态可逆过程热力学第一定律和第二定律证明：必定有 $G=\check{G}(\boldsymbol{\Sigma},T)$，且为热力学势，即$\dfrac{\partial\check{G}}{\partial\boldsymbol{G}}=\boldsymbol{0}, s=-\dfrac{\partial\check{G}}{\partial T}, \boldsymbol{E}=-\rho_0\dfrac{\partial\check{G}}{\partial\boldsymbol{\Sigma}}$；

(2) 试由不可逆过程热力学第二定律的熵不等式，证明同样的结论。

6.14　设自变量 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 和因变量 $\boldsymbol{F}$、$\boldsymbol{G}$ 都是 2 阶张量，而 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{A})$ 和 $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{B})$ 都是各向同性张量函数，试证明 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{G}(\boldsymbol{B})$ 也必为各向同性张量函数。

6.15　设超弹性材料 Cauchy 应力的本构方程具有形式 $\boldsymbol{\sigma}=\rho\boldsymbol{B}f(I_1,I_2,I_3)$，其中 I_1、I_2、I_3 为左伸缩张量 $\boldsymbol{B}$ 的 3 个主不变量，函数 $f(I_1,I_2,I_3)$ 称为内能函数。定义张量$\boldsymbol{B}^*=\boldsymbol{B}-\boldsymbol{I}$，则有 $f(I_1,I_2,I_3)=f^*(I_1^*,I_2^*,I_3^*)$，其中 I_1^*、I_2^*、I_3^* 为$\boldsymbol{B}^*$ 的 3 个主不变量。试将方程 $\boldsymbol{\sigma}=\rho\boldsymbol{B}f(I_1,I_2,I_3)$ 展开至张量$\boldsymbol{B}^*$ 的 2 阶项。

第7章　弹塑性材料

当外载移去后材料中仍保持有残余变形的性质称为塑性(plasticity),具有此种塑性的材料称为塑性体。由于各种材料只有当应力较小时才会表现出变形可完全恢复的纯弹性性质,而当应力超过一定数值后都会表现出以上所说的这种可塑性,所以从实用的角度上说,研究材料的弹塑性本构关系具有非常重要的意义。但是由于理论上的困难,在塑性本构关系理论的领域内仍有许多问题尚在争论之中,这里我们只对小变形假定下的经典弹塑性理论给以简要介绍。这里,我们先对材料在简单拉压条件下应力-应变曲线的特征做一概括性的说明,并引入一些塑性理论中的基本概念,以作为在复杂应力状态下将之进行推广和引申的基础。

大多数材料的简单拉压应力-应变曲线如图7.1所示。根据其变形的特征可将之划分为如下的四个阶段:

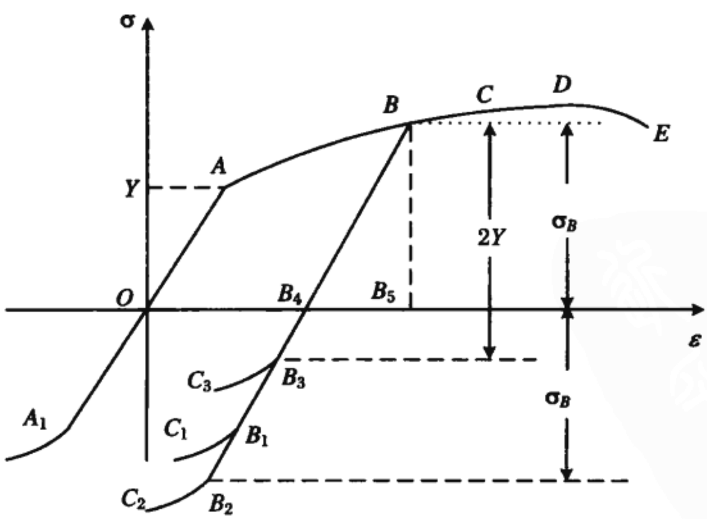


图7.1　典型的简单拉压应力-应变曲线

(1) 弹性加载(elastic loading)阶段 OA

在忽略弹性极限和比例极限区别的情况下,此阶段的应力-应变曲线可由如下的线性关系来表达,而且材料只发生可逆的弹性变形:

$$\sigma = E\varepsilon \quad (\sigma \leqslant Y) \tag{7.0.1}$$

其中 E 是材料在简单拉压条件下的弹性模量,习惯上称之为杨氏模量(Young's modulus);Y 称为材料在简单拉压条件即一维应力条件下的屈服极限或初始屈服应力(original yielding stress)。

(2) 塑性加载(plastic loading)阶段 $ABCDE$

当应力超过初始屈服极限 Y 时,材料发生不可逆的塑性变形,其应力-应变曲线可由实验测得的下述方程所表达:

$$\sigma = \sigma(\varepsilon) \quad (\sigma \geqslant Y) \tag{7.0.2}$$

$\dfrac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}\varepsilon^2}<0$ 对应递减硬化材料,$\dfrac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}\varepsilon^2}>0$ 对应递增硬化材料,$\dfrac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}\varepsilon^2}=0$ 对应线性硬化材料。在 $ABCD$ 段由于变形的发展需要应力的提高,故称为硬化阶段(hardening stage),而在 DE 段中虽然应力下降了但材料的变形仍可继续发展,故称为软化阶段(softening stage)或失稳阶段(instable stage)。对某些材料,当可以将曲线 $ABCD$ 近似为平台时,则称此种材料为理想塑性材料(ideal plastic materials)。

(3) 弹性卸载(elastic unloading)阶段 BB_1

从任一塑性状态 B 卸载时,进入弹性卸载阶段 BB_1,一般而言其斜率与 E 相同,可见 B 对应的应变等于可恢复的弹性应变 $\varepsilon^e = B_4B_5$ 和残余的塑性应变 $\varepsilon^p = OB_4$ 之和。当卸载斜率与此前已产生的塑性应变有关时称为弹塑性耦合材料,否则称为弹塑性非耦合材料。当从直线 B_1B 上任一中间状态重新加载时将沿弹性加载线 B_1B 返回(忽略迴滞效应),而至 B 才进入新的塑性硬化,故历史上的最大塑性应力 σ_B 称为后继屈服应力。弹塑性非耦合材料在弹性卸载阶段的应力-应变曲线可表达为

$$\sigma - \sigma_* = E(\varepsilon - \varepsilon_*) \quad (\sigma_1 \leqslant \sigma \leqslant \sigma_*) \tag{7.0.3}$$

其中 σ_*、σ_1、ε_* 分别是 B 点的应力、B_1 点的应力、B 点的应变。

(4) 反向屈服(backward yielding)阶段 B_1C_1

从 B 点的弹性卸载过程达至某一状态 B_1 时,材料便进入反向屈服阶段。对大多数的材料而言,通常有 $|\sigma_{B1}|$ 小于正向后继屈服应力 $\sigma_B = \sigma_*$,这称为包辛格(Baushinger)效应。作为对实际问题的近似和简化,人们在理论上有时完全忽略这一效应,而假定卸载至 B_2 时($\sigma_{B2} = -\sigma_B = -\sigma_*$)材料才进入反向屈服,且设 B_2C_2 与 BC 形状相同,这称为各向同性硬化(isotropic hardening)模型或等向硬化

模型；有时人们则夸大这一效应而假定卸载至 B_3时($\sigma_B - \sigma_{B3} = 2Y$)材料才进入反向屈服，且设 B_3C_3与 AB 形状相同，这称为随动硬化(kinematic hardening)模型。实际的情况 B_1在 B_2和 B_3之间。但为了简化问题，人们通常总是采用模型化的方法，即采用等向硬化或随动硬化模型，它们的主要区别是：等向硬化模型中材料弹性变载的最大范围是 $2\sigma_*$，而随动硬化模型中材料弹性变载的最大范围是 $2Y$。

由以上我们对典型的简单拉压应力-应变曲线的分析可见，塑性应力应变关系不同于弹性应力应变关系的最大特点是不存在应力和应变间的单值对应关系，因此应力不单依赖于应变而且依赖变形历史。这是塑性变形不可逆性的结果。在塑性理论中，人们计及材料变形历史影响的方法即是引入对历史有记忆作用的内变量。常用的内变量是塑性应变和塑性功，我们将在 7.3 节中加以介绍。

将以上对简单拉压情况的分析推广到复杂应力状态之下，经典的弹塑性本构理论向人们提出如下的任务：(1) 给出在复杂应力状态之下判定和描述材料进入初始屈服的条件，这称之为屈服准则(yielding criterion)；(2) 给出反映材料塑性硬化特性的准则，即给出材料的后继屈服面随其塑性变形发展而演化的描述方法，这称之为后继屈服准则；(3) 给出在每一微小过程中增量应力和增量应变间的关系，即增量型弹塑性应力应变关系。由于在一般情况下，发生塑性变形的材料中并不存在应力和应变间的单一对应关系，所以弹塑性本构关系从本质上讲应该是增量型的本构关系，我们必须针对给定的变形过程将各微过程中的增量本构关系进行积分才能得到对应最终应变的应力。只有对某些特殊类型的加载过程，或者人们对加载过程做出某些特定的近似之后，我们才能得出应力和应变间的单一对应关系，这就是塑性力学中的所谓全量理论。在本书中我们将只介绍在理论上和应用上都更加重要的增量型弹塑性本构关系。

7.1 屈服准则

7.1.1 概述

在复杂应力状态下，最一般的屈服准则可写为

$$f(\boldsymbol{\sigma}) = f(\sigma_{ij}) = 0 \tag{7.1.1}$$

在数学上式(7.1.1)表示应力空间(σ_{ij})中的一个超曲面，它将应力空间分为两部

分，其内部 $f<0$ 表示弹性状态，外部 $f>0$ 代表塑性硬化后的可能应力状态。如果材料是初始各向同性的，则函数 $f(\boldsymbol{\sigma})$ 应是自变量 $\boldsymbol{\sigma}$ 的各向同性张量函数，因此容易证明，它应只依赖于 $\boldsymbol{\sigma}$ 的主不变量或主应力 σ_i，即可有

$$f(\boldsymbol{\sigma}) = f(\sigma_i) = 0 \tag{7.1.2}$$

这里 $\boldsymbol{\sigma}$ 表示主应力空间中点的矢径，$\boldsymbol{\sigma}=\sigma_i\boldsymbol{e}_i$，$\boldsymbol{e}_i$ 表示主应力轴方向的单位矢量。将主应力 σ_i 分解为静水压力 p 和应力偏量 $\sigma_i{}'$ 之和：

$$\begin{cases}\sigma_i = -p + \sigma_i{}' \\ p = -\dfrac{1}{3}(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3) \\ \sigma_1{}' + \sigma_2{}' + \sigma_3{}' = 0\end{cases} \tag{7.1.3}$$

并记

$$\boldsymbol{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3),\quad \boldsymbol{\sigma}' = \sigma_i{}'\boldsymbol{e}_i \tag{7.1.4}$$

则有

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_i\boldsymbol{e}_i = (-p+\sigma'_1)\boldsymbol{e}_1 + (-p+\sigma'_2)\boldsymbol{e}_2 + (-p+\sigma'_3)\boldsymbol{e}_3 = -\sqrt{3}p\boldsymbol{n} + \boldsymbol{\sigma}'$$

$$\boldsymbol{\sigma}'\cdot\boldsymbol{n} = (\sigma'_1\boldsymbol{e}_1+\sigma'_2\boldsymbol{e}_2+\sigma'_3\boldsymbol{e}_3)\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}(\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3) = \frac{1}{\sqrt{3}}(\sigma'_1+\sigma'_2+\sigma'_3) = 0$$

即

$$\boldsymbol{\sigma} = -\sqrt{3}p\boldsymbol{n} + \boldsymbol{\sigma}' \tag{7.1.5a}$$

$$\boldsymbol{\sigma}'\cdot\boldsymbol{n} = 0 \tag{7.1.5b}$$

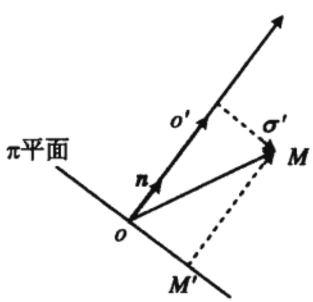


图 7.2　式(7.1.5)的图示

矢量 $\boldsymbol{n}$ 与三个主应力轴成等倾角，恰是通过原点表示静压为零的如下平面：

$$p = -\frac{1}{3}(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3) = 0 \tag{7.1.6}$$

的单位法矢量，此平面称为 π 平面。式(7.1.5b)说明，偏应力矢量 $\boldsymbol{\sigma}'$ 垂直于 π 平面的法矢量 $\boldsymbol{n}$ 而与 π 平面平行；而式(7.1.5a)则说明，主应力矢量 $\boldsymbol{\sigma}$ 可分解为平行于 π 平面的偏应力矢量 $\boldsymbol{\sigma}'$ 和沿 π 平面法线 $\boldsymbol{n}$ 的静压部分 $-\sqrt{3}p\boldsymbol{n}$。这可以由图 7.2 来表达，即

$$\boldsymbol{\sigma} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M} = -\sqrt{3}p\boldsymbol{n} + \boldsymbol{\sigma}' \tag{7.1.5c}$$

$$\overrightarrow{OO'} = -\sqrt{3}p\boldsymbol{n},\quad \overrightarrow{O'M} = \boldsymbol{\sigma}' \tag{7.1.5d}$$

如将表示应力状态的点 M 的矢径 $\boldsymbol{\sigma}$ 在 π 平面内的投影的长度即偏应力矢量

$\boldsymbol{\sigma}'$的长度记为ρ,则如下面7.1.2节所指出的,它恰恰是与应力偏量第二主不变量J_2和应力强度$\bar{\sigma}$以如下形式相联系的:

$$\rho \equiv |\boldsymbol{\sigma}'| = \sqrt{\sigma_1'^2 + \sigma_2'^2 + \sigma_3'^2} = \sqrt{2J_2} = \sqrt{\frac{2}{3}}\bar{\sigma} \tag{7.1.7}$$

J_2和$\bar{\sigma}$分别由下式定义(参见下面的7.1.2节):

$$\begin{cases} J_2 = \dfrac{1}{2}(\sigma_1'^2 + \sigma_2'^2 + \sigma_3'^2) = \dfrac{1}{6}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] \\ \quad = \dfrac{1}{3}[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1] \\ \bar{\sigma} = \sqrt{3J_2} \end{cases} \tag{7.1.8}$$

在利用(7.1.5)式之后,屈服准则(7.1.2)式可写为

$$f(\boldsymbol{\sigma}) = f(\boldsymbol{\sigma}' - \sqrt{3}p\boldsymbol{n}) = 0 \tag{7.1.9}$$

实验证明,对大多数金属材料,在压力不太高时,静水压力p只产生纯弹性的体积变形而并不产生塑性变形,故可以认为静压p不影响屈服。在塑性理论中广泛采用这一假定,此时屈服准则(7.1.9)式将简化为

$$f(\boldsymbol{\sigma}') = 0 \tag{7.1.10a}$$

考虑到材料的各向同性性质以及应力偏量$\boldsymbol{\sigma}'$的第一主不变量$J_1 = \sigma_1' + \sigma_2' + \sigma_3' = 0$,则屈服准则(7.1.10a)式又可写为

$$f(J_2, J_3) = 0 \tag{7.1.10b}$$

对于满足屈服准则(7.1.10)式的材料,如果应力点$\boldsymbol{\sigma}^0$在屈服面上,则叠加任意一静水压力p的点也必然在屈服面上,即点:

$$\sigma_1 = \sigma_1^0 - p, \quad \sigma_2 = \sigma_2^0 - p, \quad \sigma_3 = \sigma_3^0 - p \quad (\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^0 - \sqrt{3}p\boldsymbol{n})$$

也必然在屈服面上。这表示一个经过点$\boldsymbol{\sigma}^0$而方向沿$\boldsymbol{n}$的直线,所以屈服面(7.1.10)式必是一个母线沿π平面法线$\boldsymbol{n}$的柱面。因此,为了讨论屈服面(7.1.10)式的性质,我们只需讨论该屈服柱面与静压为零的π平面的交线的形状就可以了。为此,我们来研究任意应力点$M(\boldsymbol{\sigma})$与其沿着π平面的法线$\boldsymbol{n}$在π平面内的投影点M'之间的关系。

容易证明,表示简单拉伸状态的主应力点沿方向$\boldsymbol{n}$投影到π平面上之后,其尺度将收缩为原长度的$\sqrt{\frac{2}{3}}$倍。事实上,由于矢量$\boldsymbol{n}$与三个主应力轴成等倾角,其三个方向余弦皆为$\sqrt{\frac{1}{3}}$,所以表示简单拉伸的主应力状态σ_1轴与矢量$\boldsymbol{n}$夹角的余弦

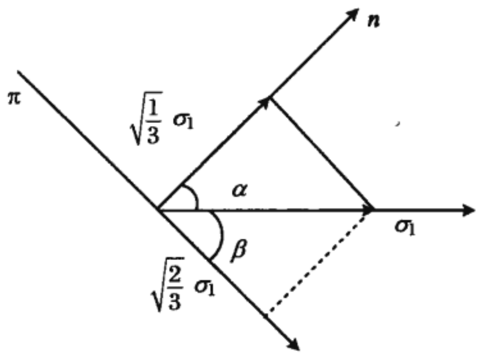


图 7.3　主应力点在 π 平面内的投影

为 $\cos\alpha=\sqrt{\frac{1}{3}}$，故 σ_1 轴与它在 π 平面内的投影线夹角的余弦为 $\cos\beta=\sqrt{\frac{2}{3}}$，这就证明了我们的论断。这一论断如图 7.3 所示。以 01、02、03 分别表示 3 个主应力坐标轴在 π 平面上的投影线（由对称性知它们必互成 120°的夹角），建立如图 7.4 所示的平面直角笛卡尔坐标系（x,y）和极坐标系（ρ,φ），其中 x 轴取为与主应力轴 σ_1 的投影线 01 间的夹角为 30°，与主应力轴 σ_2 的投影线 02 间的夹角为 90°，与主应力轴 σ_3 的投影线 03 间的夹角为 150°。由于每个应力状态点的矢径 $\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{\sigma}$ 等于 3 个主应力矢径之和，而每个主应力矢径分别投影到 π 平面上的 01、02、03 方向并都收缩为原长度的 $\sqrt{\frac{2}{3}}$ 倍，故矢径 $\overrightarrow{OM}$ 在 π 平面上的投影矢径 $\overrightarrow{OM}'$ 为

$$\overrightarrow{OM}'=\sqrt{\frac{2}{3}}[\sigma_1(\boldsymbol{i}\cos30^\circ+\boldsymbol{j}\cos120^\circ)+\sigma_2(\boldsymbol{i}\cos90^\circ+\boldsymbol{j}\cos0^\circ)$$
$$+\sigma_3(\boldsymbol{i}\cos150^\circ+\boldsymbol{j}\cos120^\circ)]$$

其中 $\boldsymbol{i}$ 和 $\boldsymbol{j}$ 分别表示 x 轴和 y 轴方向的单位矢量。于是，矢径 $\overrightarrow{OM}$ 在 π 平面上的投影矢径 $\overrightarrow{OM}'$ 的坐标将为

$$x=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sigma_1-\sigma_3) \tag{7.1.11a}$$

$$y=\frac{1}{\sqrt{6}}(2\sigma_2-\sigma_1-\sigma_3) \tag{7.1.11b}$$

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{2J_2}=\sqrt{\frac{2}{3}}\bar{\sigma} \tag{7.1.11a$'$}$$

$$\mathrm{tg}\varphi=\frac{y}{x}=\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{(2\sigma_2-\sigma_1-\sigma_3)}{(\sigma_1-\sigma_3)}=\frac{\mu_\sigma}{\sqrt{3}} \tag{7.1.11b$'$}$$

其中

$$\mu_\sigma=(2\sigma_2-\sigma_1-\sigma_3)/(\sigma_1-\sigma_3)$$

称为 Lode 参数，显然它只与 2 个主应力之比 $\frac{\sigma_1}{\sigma_3}$ 和 $\frac{\sigma_2}{\sigma_3}$ 有关。当 $\sigma_1\geqslant\sigma_2\geqslant\sigma_3$ 时，有 0

$\geq\mu_\sigma\geq-1$，$-30^\circ\leq\varphi\leq30^\circ$。容易说明，图 7.4 中其他几个张角为 60°的扇形区域将对应 σ_1、σ_2、σ_3 的其他排序情况（最大和最小主应力的轴线离应力点分别为最近和最远）。

我们再次强调说明：图 7.4 中的射线 01、02、03 上的点对应一维拉伸状态，而相反方向射线上的点则对应一维压缩状态。例如在 01 线上有 $\sigma_1=\sigma_1,\sigma_2=\sigma_3=0$，所以由(7.1.11)式可给出 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}\sigma_1,y=-\frac{1}{\sqrt{6}}\sigma_1,\rho=\sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_1,\tan\varphi=-\frac{1}{\sqrt{3}}\Rightarrow\varphi=-30^\circ$，这就是射线 01，而 $\sigma_1=Y$（一维应力屈服应力）时即对应图中的 A 点；x 轴以及其他 5 条按 60°而在原点平分 π 平面的射线上的点，则对应纯剪切状态，例如其中一个纯剪切状态为 $\sigma_1=\tau,\sigma_2=0,\sigma_3=-\tau$，由(7.1.11)式可给出 $x=\sqrt{2}\tau,y=0,\rho=\sqrt{2}\tau,\varphi=0^\circ$，这就是 x 轴，当 τ 恰为纯剪切屈服应力时即对应图中的 B 点。

7.1.2 应力偏量的主不变量和应力强度

由于在理论和应用上的重要性，我们再特别对与应力偏量张量相关的某些物理量加以特别说明，其中特别重要的就是应力偏量张量第二主不变量 J_2 和应力强度 $\bar{\sigma}$。

对应力张量 $\boldsymbol{\sigma}$ 进行如下的所谓球形压力和偏量分解：

$$\boldsymbol{\sigma}=-p\boldsymbol{I}+\boldsymbol{\sigma}',\quad \sigma_{ij}=-p\delta_{ij}+\sigma'_{ij}\tag{7.1.12}$$

其中

$$p=-\frac{\sigma_{ii}}{3}=-\frac{\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33}}{3}=-\frac{\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3}{3}=-\frac{I_1}{3}\tag{7.1.13}$$

I_1 是应力张量的第一主不变量。在固体力学中人们通常将 p 简单地称为静水压力(hydrostatic pressure)，而在黏性流体中为了避免混乱则通常将之称为球形压力或流体动压(hydrodynamic pressure)，因为它不仅包含了黏性流体静止不流动时的纯粹的所谓静压，而且也包含了其运动时的黏性球形摩擦压力。σ'_{ij}称为应力偏量(deviatoric stress)。由球形压力的定义(7.1.13)式及应力张量的分解公式(7.1.12)式，显然有应力偏量的如下性质：

$$J_1\equiv\sigma'_{ii}=0,\quad \sigma'_{ij}=\sigma_{ij}\quad(i\neq j)\tag{7.1.14}$$

即应力偏量张量 $\boldsymbol{\sigma}'$的第一主不变量 J_1 为 0，而其非对角元素与应力张量的非对角元素相等。

容易证明（请读者证明之），应力偏量张量 $\boldsymbol{\sigma}'$与应力张量 $\boldsymbol{\sigma}$ 有相同的主方向，而其特征值（也称为主偏量）σ'则恰恰等于应力张量的特征值 σ 加上 p，即 $\sigma'=\sigma+p$。

当然，应力偏量张量 $\boldsymbol{\sigma}'$ 的特征值即主偏量 σ' 及其相应的主方向 $\boldsymbol{n}$ 也可由特征值问题的一般方法求出。主偏量 σ' 由 $\boldsymbol{\sigma}'$ 的如下特征方程给出：

$$\| \boldsymbol{\sigma}' - \sigma' \boldsymbol{I} \| = \| \sigma'_{ij} - \sigma' \delta_{ij} \| = 0 \tag{7.1.15}$$

将之展开即有如下形式：

$$-\sigma'^3 + J_1 \sigma'^2 + J_2 \sigma' + J_3 = 0, \quad \sigma'^3 - J_1 \sigma'^2 - J_2 \sigma' - J_3 = 0 \tag{7.1.16}$$

注意，应力偏量 $\boldsymbol{\sigma}'$ 的第二主不变量 J_2 与以前关于应力张量 $\boldsymbol{\sigma}$ 第二主不变量 I_2 的记法差一符号。

应力偏量 $\boldsymbol{\sigma}'$ 的第一主不变量如(7.1.14)式所述为 0，而应力偏量 $\boldsymbol{\sigma}'$ 的第二主不变量则为

$$\begin{aligned} J_2 &= -(\sigma'_1 \sigma'_2 + \sigma'_2 \sigma'_3 + \sigma'_3 \sigma'_1) \\ &= -(\sigma_1 + p)(\sigma_2 + p) - (\sigma_2 + p)(\sigma_3 + p) - (\sigma_3 + p)(\sigma_1 + p) \\ &= -(\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1) - 2p(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) - 3p^2 \\ &= -I_2 + 3p^2 \end{aligned}$$

即

$$J_2 = 3p^2 - I_2 \tag{7.1.17}$$

类似可有应力偏量 $\boldsymbol{\sigma}'$ 的第三主不变量为

$$\begin{aligned} J_3 &= \sigma'_1 \sigma'_2 \sigma'_3 = (\sigma_1 + p)(\sigma_2 + p)(\sigma_3 + p) \\ &= \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 + p(\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1) + p^2(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) + p^3 \\ &= I_3 + pI_2 - 3p^3 + p^3 = I_3 + pI_2 - 2p^3 = I_3 + pJ_2 + p^3 \end{aligned}$$

即

$$J_3 = I_3 + pI_2 - 2p^3 = I_3 + pJ_2 + p^3 \tag{7.1.18}$$

其中 I_2、I_3 分别为 $\boldsymbol{\sigma}$ 的第二和第三主不变量。

利用应力偏量 $\boldsymbol{\sigma}'$ 第一主不变量为 0 的公式 (7.1.14)式，可通过恒等变换证明以下一些在一般坐标系中对 J_2 的各种形式的表达式：

$$\begin{aligned} J_2 &= -\begin{Vmatrix} \sigma'_{11} & \sigma'_{12} \\ \sigma'_{21} & \sigma'_{22} \end{Vmatrix} - \begin{Vmatrix} \sigma'_{22} & \sigma'_{23} \\ \sigma'_{32} & \sigma'_{33} \end{Vmatrix} - \begin{Vmatrix} \sigma'_{33} & \sigma'_{31} \\ \sigma'_{13} & \sigma'_{11} \end{Vmatrix} \\ &= -(\sigma'_{11} \sigma'_{22} + \sigma'_{22} \sigma'_{33} + \sigma'_{33} \sigma'_{11}) + \sigma'^2_{12} + \sigma'^2_{23} + \sigma'^2_{31} \end{aligned} \tag{7.1.19a}$$

将(7.1.19a)式的右端加上 $\frac{1}{2}(\sigma'_{11} + \sigma'_{22} + \sigma'_{33})^2 = 0$，可得

$$J_2 = \frac{1}{2}(\sigma'^2_{11} + \sigma'^2_{22} + \sigma'^2_{33}) + \sigma'^2_{12} + \sigma'^2_{23} + \sigma'^2_{31} \tag{7.1.19b}$$

将(7.1.19a)式的右端加上 $\frac{1}{6}(\sigma'_{11} + \sigma'_{22} + \sigma'_{33})^2 = 0$，可得

$$J_2 = \frac{1}{6}[(\sigma'_{11} - \sigma'_{22})^2 + (\sigma'_{22} - \sigma'_{33})^2 + (\sigma'_{33} - \sigma'_{11})^2] + \sigma'^2_{12} + \sigma'^2_{23} + \sigma'^2_{31} \tag{7.1.19c}$$

或

$$J_2 = \frac{1}{6}[(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2] + \sigma^2_{12} + \sigma^2_{23} + \sigma^2_{31} \tag{7.1.19d}$$

式(7.1.19b)显然可由约定求和写为

$$J_2 = \frac{1}{2}\sigma'_{ij}\sigma'_{ij} \tag{7.1.20}$$

式(7.1.19)的各式以及式(7.1.20)在塑性力学中有极为重要的应用。此外，在塑性力学中，人们还常常引入一个具有应力量纲的量 $\bar{\sigma}$，称之为应力强度(stress intensity)或所谓的 Mises 等效应力(Mises effective stress)，它与 J_2 以下式相联系：

$$\bar{\sigma} = \sqrt{3J_2} = \sqrt{\frac{3}{2}\sigma'_{ij}\sigma'_{ij}} \tag{7.1.21}$$

容易说明，在单轴简单拉压状态之下它恰恰就等于受载方向的轴向应力 σ_{11}，而由于这一点，人们常常把简单拉压状态之下实验应力应变关系中的 σ_{11} 推广为复杂应力状态之下的 $\bar{\sigma}$，而这也正是将之称为 Mises 等效应力的理由。

式(7.1.19)和式(7.1.20)是 J_2 在一般应力状态下的表达式，当以三个幺正的应力主方向为坐标系时，即在主坐标系中，我们可以得到其更为简单的表达式，其中式(7.1.8)就是一些这样的简单表达式。

7.1.3 常用的屈服准则

第一种最常用的屈服准则是 Mises 屈服准则，也即是在材料的工程强度理论中人们常说的弹性畸变能准则，该准则认为单位体积介质的弹性畸变能 E_Q 达到某一常数时材料即进入屈服。如果以 μ 表示材料的弹性剪切模量，以 ε_{ij}'表示应变偏量，则材料的弹性畸变定律可写为

$$\varepsilon_{ij}' = \frac{1}{2\mu}\sigma_{ij}'$$

于是我们有

$$E_Q = \int \sigma_{ij}' \mathrm{d}\varepsilon_{ij}' = \frac{1}{4\mu}\sigma_{ij}'\sigma_{ij}' = \frac{1}{2\mu}J_2 = \frac{1}{6\mu}\bar{\sigma}^2$$

即 E_Q 与J_2 或与$\bar{\sigma}^2$ 成正比，所以 Mises 准则可写为

$$\bar{\sigma}^2 = 3J_2 = \frac{3}{2}\rho^2 = \frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] = k_1^2 \tag{7.1.22}$$

其中 k_1 为材料常数，可以由例如简单拉伸实验或者纯剪切实验来确定。式(7.1.22)说明，Mises 准则代表一个半径为 $\rho = \sqrt{\frac{2}{3}}k_1$ 的圆柱面。如以 Y 和 τ 分别表示材料的简单拉伸屈服应力和纯剪切屈服应力，则当以简单拉伸实验确定常数时，例如对其中一个简单拉伸屈服状态 $\sigma_1 = Y, \sigma_2 = \sigma_3 = 0$，由(7.1.22)式可得 $k_1 = Y$；当以纯剪切实验确定常数时，例如对其中一个纯剪切屈服状态 $\sigma_1 = \tau, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = -\tau$，由(7.1.22)式可得 $k_1 = \sqrt{3}\tau$。故对于能够精确满足 Mises 屈服准则的所谓 Mises 材料，必有 $Y = \sqrt{3}\tau$。

另一种最常用的屈服准则是 Tresca 屈服准则，也即是在材料的工程强度理论中人们常说的最大切应力准则，该准则认为当介质的最大切应力达到某一常数时材料即进入屈服。如以 σ_1、σ_2、σ_3 表示材料屈服时的三个主应力，则 Tresca 准则可写为

$$\mathrm{Max}\left\{\frac{|\sigma_1 - \sigma_2|}{2}, \frac{|\sigma_2 - \sigma_3|}{2}, \frac{|\sigma_3 - \sigma_1|}{2}\right\} = k_2 \tag{7.1.23}$$

或者可以更清楚地将之写为

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = k_2 \quad (\text{当 } \sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \sigma_3 \text{ 时}) \tag{7.1.23a}$$

$$\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} = k_2 \quad (\text{当 } \sigma_2 \geqslant \sigma_1 \geqslant \sigma_3 \text{ 时}) \tag{7.1.23b}$$

$$\frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2} = k_2 \quad (\text{当 } \sigma_2 \geqslant \sigma_3 \geqslant \sigma_1 \text{ 时}) \tag{7.1.23c}$$

$$\frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2} = k_2 \quad (\text{当 } \sigma_3 \geqslant \sigma_2 \geqslant \sigma_1 \text{ 时}) \tag{7.1.23d}$$

$$\frac{\sigma_3 - \sigma_2}{2} = k_2 \quad (\text{当 } \sigma_3 \geqslant \sigma_1 \geqslant \sigma_2 \text{ 时}) \tag{7.1.23e}$$

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = k_2 \quad (\text{当 } \sigma_1 \geqslant \sigma_3 \geqslant \sigma_2 \text{ 时}) \tag{7.1.23f}$$

式(7.1.23)中的 6 个式子分别代表母线平行于 $\boldsymbol{n}$（因为式(7.1.23)的各式均不依赖于静水压力 p）的正六棱柱面的一个棱面，所以 Tresca 屈服准则在应力空间中的图像是一个母线平行于 $\boldsymbol{n}$ 的正六棱柱面，它在 π 平面上的投影恰是一个正六边形。由式(7.1.11)和式(7.1.11)′容易说明，式(7.1.23a)～式(7.1.23f)在 π

平面上的投影分别表示如下的直线段(请读者自行证明之)：

$$\frac{1}{2}(\sigma_1-\sigma_3)=\frac{\sqrt{2}}{2}x=k_2,\quad -30^\circ\leqslant\varphi\leqslant30^\circ\quad(\sigma_1\geqslant\sigma_2\geqslant\sigma_3)\quad(7.1.23\text{a})'$$

$$\frac{\sigma_2-\sigma_3}{2}=\frac{(x+\sqrt{3}y)}{2\sqrt{2}}=k_2,\quad 30^\circ\leqslant\varphi\leqslant90^\circ\quad(\sigma_2\geqslant\sigma_1\geqslant\sigma_3)\quad(7.1.23\text{b})'$$

$$\frac{\sigma_2-\sigma_1}{2}=\frac{x-\sqrt{3}y}{-2\sqrt{2}}=k_2,\quad 90^\circ\leqslant\varphi\leqslant150^\circ\quad(\sigma_2\geqslant\sigma_3\geqslant\sigma_1)\quad(7.1.23\text{c})'$$

$$\frac{(\sigma_3-\sigma_1)}{2}=-\frac{\sqrt{2}}{2}x=k_2,\quad 150^\circ\leqslant\varphi\leqslant210^\circ\quad(\sigma_3\geqslant\sigma_2\geqslant\sigma_1)\quad(7.1.23\text{d})'$$

$$\frac{\sigma_3-\sigma_2}{2}=\frac{x+\sqrt{3}y}{-2\sqrt{2}}=k_2,\quad 210^\circ\leqslant\varphi\leqslant270^\circ\quad(\sigma_3\geqslant\sigma_1\geqslant\sigma_2)\quad(7.1.23\text{e})'$$

$$\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}=\frac{x-\sqrt{3}y}{2\sqrt{2}}=k_2,\quad 270^\circ\leqslant\varphi\leqslant330^\circ\quad(\sigma_1\geqslant\sigma_3\geqslant\sigma_2)\quad(7.1.23\text{f})'$$

如图7.4所示，当以简单拉压实验确定常数时，例如对其中一个简单拉压屈服状态 $\sigma_1=Y,\sigma_2=\sigma_3=0$，由式(7.1.23a)可得 $k_2=\frac{Y}{2}$；当以纯剪切实验确定常数时，例如对其中一个纯剪切屈服状态 $\sigma_1=\tau,\sigma_2=0,\sigma_3=-\tau$，由式(7.1.23a)可得 $k_2=\tau$，故对于能够精确满足 Tresca 屈服准则的所谓 Tresca 材料，必有 $Y=2\tau$。

当对这两个准则同时用简单拉压实验确定常数时，它们应该在代表一维应力状态的直线 01 等处相重合，所以，当以简单拉压实验确定常数时，在 π 平面上 Tresca 准则将是 Mises 圆的内接正六边形；当对这两个准则同时用纯剪切实验确定常数时，它们应该在代表纯剪切的直线轴等处相重合，所以，当以纯剪切实验确定常数时，在 π 平面上 Tresca 准则将是 Mises 圆的外切正六边形，如图7.4所示。

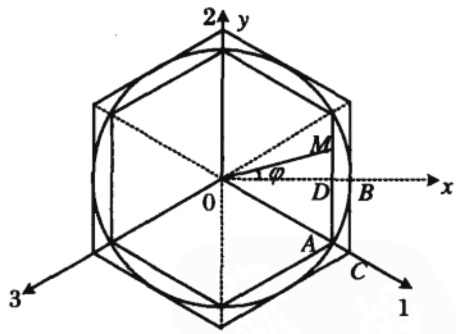


图7.4 屈服面在 π 平面上的投影

以上两个常用的屈服准则都是与静水压力 p 无关的(而且是拉压对称的)，这对大多数的金属材料在其承受的压力不太高(如十几万大气压以下)时是比较符合实际的。但是在金属承受很高的压力时，我们则必须考虑静水压力 p 对屈服准则的影响。另外对岩石、混凝土以及陶瓷等一类的脆性材料，即使压力不太高时其静水压力对屈服准则的影响一般也是不可忽略的。这时我们就需要考虑静水压力 p

对屈服准则的影响,即需要考虑所谓的压力相关的屈服准则。其中比较常用的是 Drucker-Prager 屈服准则,该准则认为材料的 Mises 等效屈服应力 $\bar{\sigma}$ 随着其静水压力 p 线性增加,故在数学上该准则写为

$$f = \bar{\sigma} - ap = k_3 \tag{7.1.24}$$

如果我们要求(7.1.24)式在 $p=0$ 的 π 平面上与 Mises 圆相重合,则有材料常数 $k_3 = k_1 = Y$(因为对这类脆性材料主要是考虑其压剪屈服特性,所以通常取压应力为正,故这里的 Y 是材料的简单压缩屈服极限)。式(7.1.24)中的材料常数 a 可以通过一系列不同围压条件下的材料屈服实验结果而拟合回归得出。Drucker-Prager 屈服准则不但引入了材料 Mises 等效屈服应力的线性压力硬化效应,而且也在某种程度上引入了材料的拉压屈服的不对称性质。容易理解 Drucker-Prager 屈服准则(7.1.24)式表示一个在应力空间中轴线沿 $\boldsymbol{n}$ 的圆锥面,该圆锥面在 π 平面上给出 Mises 圆,而圆锥面的半径随着静水压力 p 的增加而线性增大。

对岩石和土壤一类材料还有所谓的 Coulomb 剪破准则、各种不同形式的 Mohr 包络准则、盖帽准则以及由材料的整个弹性变形能(包括弹性畸变能和弹性体变能)所控制的所谓 Lemeitre 准则等等。这些准则多半都是在 Mises 准则的基础上引入压力的塑性屈服效应,可以统一地写为

$$\bar{\sigma} = f(p) \tag{7.1.25}$$

此外对这类脆性材料还有同时计及 J_1、J_2、J_3 影响的各种形式的屈服准则,这里不再赘述,读者可参阅有关文献。

7.2 后继屈服准则

后继屈服准则(也有研究者将之称为加载准则)指的是材料进入塑性屈服以后,后继屈服面(即有的研究者所说的加载面)的形状和尺寸随塑性变形发展而发展和变化的规律。如在应力空间中研究后继屈服面,则材料的硬化效应表现为后继屈服面随着塑性变形的发展而增大,理想塑性表现为后继屈服面就是其初始屈服面,而软化效应则表现为后继屈服面随着塑性变形的发展而缩小;材料的 Baushinger 效应则表现为在应力空间中某一方向上后继屈服面的扩大将伴随着相反方向附近各方向上后继屈服面的缩小。但是,在数学上要精确地表述材料的这

些性质则是很复杂的，故人们常常需要抓住材料在塑性变形方面的某些主要特征而提出各种简化模型。这些简化模型从其基本特点方面来讲，主要包括理想塑性模型、各向同性硬化模型（或称等向硬化模型）和随动硬化模型。

7.2.1 理想塑性模型(ideal plastic model)

理想塑性模型完全忽略材料的硬化效应，认为材料的初始屈服面也就是其后继屈服面，而且只要表达材料应力状态的应力点达到并且保持在此屈服面之上移动则材料的塑性变形便可以任意发展（如果材料单元不受到某种周围的约束时）。因此理想塑性材料的后继屈服准则在形式上非常简单，也就是其初始屈服准则：

$$f(\boldsymbol{\sigma}) = 0$$

7.2.2 各向同性硬化模型或称等向硬化模型(isotropic hardening model)

各向同性硬化模型认为后继屈服面的扩大在应力空间中是各向同性的（注意这里的各向同性并非指在反应材料性质的几何空间中的各向同性），用一句更精确的力学语言讲，就是在应力空间中各不同方向上的应力变化过程对后继屈服面扩大的贡献是可以在量的方面进行等量转换的，即只要这些不同的应力变化过程所产生的随塑性变形发展而单调增加的某一标量型历史记忆量的积累值是一样的话，则它们所引起的对后继屈服面扩大的贡献便是相同的。我们可把刻画各向同性硬化特征的这一随塑性变形发展而单调增加的这类标量型历史记忆量称为各向同性硬化内变量。根据上面的叙述我们可以得出结论，各向同性硬化模型所确定的后继屈服面必然是其初始屈服面在应力空间中的相似扩大，同时我们可以通过各向同性硬化内变量的某个函数来反映后继屈服面的这一相似扩大特征和规律。在理论和实践上人们最常用的各向同性硬化内变量有累积塑性功 W^{p} 和累积塑性应变强度 $\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}$，它们分别由以下公式定义：

$$W^{\mathrm{p}} = \int \boldsymbol{\sigma} : \mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}} \tag{7.2.1}$$

$$\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}} = \int \mathrm{d}\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}} = \int \sqrt{\frac{2}{3}\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}} : \mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}} \tag{7.2.2}$$

式(7.2.1)表示单位体积介质的应力塑性功的累积量，而对式(7.2.2)所定义的量 $\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}$，则容易证明，在一维应力条件下 $\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}} = \sqrt{\frac{2}{3}(1+2\nu_{\mathrm{p}}^2)}\,\varepsilon_1^{\mathrm{p}}$（其中 ν_{p} 为塑性变形泊松比，$\varepsilon_1^{\mathrm{p}}$ 为轴向塑性应变），而对塑性变形不可压缩材料 $\left(\nu_{\mathrm{p}} = \frac{1}{2}\right)$ 在一维应力条件下

$\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}$ 恰恰等于其轴向塑性应变 $\varepsilon_1^{\mathrm{p}}$。这一点常常被作为将一维应力实验中的量 $\varepsilon_1^{\mathrm{p}}$ 推广为复杂应力状态下的量 $\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}$ 从而获得更一般性结果的基础，因此习惯上人们也常常把累积塑性应变强度 $\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}$ 称之为累积等效塑性应变。

设材料的初始屈服面为 $f_1(\boldsymbol{\sigma}) = K_0$，则各向同性硬化模型的后继屈服准则可写为以下二式中的任何一个：

$$f_1(\boldsymbol{\sigma}) = K(W^{\mathrm{p}}) \tag{7.2.3}$$

$$f_1(\boldsymbol{\sigma}) = K(\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}) \tag{7.2.4}$$

习惯上常将满足式(7.2.3)和式(7.2.4)的材料分别称之为功硬化材料和应变硬化材料，两式右端的函数 $K(W^{\mathrm{p}})$ 和 $K(\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}})$ 满足 $K(0) = K_0$，与初始屈服面重合。而这两个函数 $K(W^{\mathrm{p}})$ 和 $K(\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}})$ 的具体形式可由材料塑性变形的一维应力实验或纯剪切实验等的实验数据而得出。例如，设材料在一维应力条件下应力 σ 和塑性功 W^{p} 的实验曲线为 $\sigma = \sigma(W^{\mathrm{p}})$，将之代入(7.2.3)式之中并注意应力 $\boldsymbol{\sigma}$ 只有一个应力分量 $\sigma_{11} = \sigma$，则可得

$$K(W^{\mathrm{p}}) = f_1(\boldsymbol{\sigma}) \equiv F(\sigma) = F(\sigma(W^{\mathrm{p}}))$$

其中函数 $F(\sigma)$ 是由函数 $f_1(\boldsymbol{\sigma})$ 令 $\sigma = \sigma_{11}$（其他 $\sigma_{ij} = 0$）而得到的 σ 的函数。类似地，设材料在一维应力条件下应力 σ 和轴向塑性应变 $\varepsilon_1^{\mathrm{p}}$ 的实验曲线为 $\sigma = \sigma(\varepsilon_1^{\mathrm{p}})$，将之代入式(7.2.4)之中，则可得

$$K(\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}) = f_1(\boldsymbol{\sigma}) \equiv F(\sigma) = F(\sigma(\varepsilon_1^{\mathrm{p}})) = F(\sigma(\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}))$$

与前面一样其中函数 $F(\sigma)$ 是由函数 $f_1(\boldsymbol{\sigma})$ 令 $\sigma = \sigma_{11}$（其他 $\sigma_{ij} = 0$）而得到的 σ 的函数，而最后一式则利用了塑性变形不可压缩材料在一维应力条件下恰有 $\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}} = \varepsilon_1^{\mathrm{p}}$（轴向塑性应变）的结果。

我们顺便指出，对应变硬化的描述有的学者不取式(7.2.2)所表达的累积等效塑性应变，而取由下式给出的所谓的有限等效塑性应变：

$$\varepsilon^{\mathrm{p}} = \sqrt{\frac{2}{3}\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}} : \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}} \tag{7.2.2$'$}$$

需要注意，式(7.2.2)和式(7.2.2)′所定义的内变量虽然在一维应力情况下是相等的，但在一般的复杂应力状态之下显然它们是不同的。

7.2.3 随动硬化模型(kinematic hardening model)

各向同性硬化模型完全没有顾及 Baushinger 效应的存在，随动硬化模型则将之夸大，认为塑性变形发展时，后继屈服面的形状和大小并不改变，只是在应力空间中做刚性平移，其移动的距离则与塑性变形历史有关，数学上可写为

$$f(\sigma_{ij} - \alpha_{ij}) = 0 \tag{7.2.5}$$

其中 α_{ij} 是塑性变形历史的某种函数，表示后继屈服面的中心。特别地，当我们假设后继屈服面中心的移动速度正比于塑性应变率时，即设

$$\dot{\alpha}_{ij} = C\dot{\varepsilon}_{ij}^{p} \tag{7.2.6}$$

时，其中 C 为常数，则以初始条件 $\varepsilon_{ij}^{p}=0$ 时 $\alpha_{ij}=0$ 对(7.2.6)式进行积分，可得 $\alpha_{ij}=C\varepsilon_{ij}^{p}$，于是式(7.2.5)成为

$$f(\sigma_{ij} - C\varepsilon_{ij}^{p}) = 0 \tag{7.2.5$'$}$$

由式(7.2.5)′表达的模型称为线性随动硬化模型，其中的常数 C 可以通过一维应力条件下线性随动硬化的应力-应变实验曲线来求出，读者可作为练习尝试求解之。

7.2.4 联合的塑性硬化模型(combined isotropic-kinematic hardening model)

各向同性硬化模型完全没有考虑到材料的 Baushinger 效应的存在，而随动硬化模型则夸大了材料的 Baushinger 效应，真实材料的塑性硬化规律一般是介于二者之间的，所以我们可以采用对两种模型的线性内插的方法来求取，例如

$$f_1(\boldsymbol{\sigma} - C\beta\boldsymbol{\varepsilon}^{p}) = K(W^{p}(1-\beta)) \tag{7.2.7}$$

就是对线性随动硬化模型和各向同性硬化模型的线性内插硬化模型，其中 $0\leqslant\beta\leqslant 1$，而 $\beta=0$ 和 $\beta=1$ 则分别代表各向同性硬化模型和线性随动硬化模型。

但是，从理论上讲更一般的时率无关塑性理论的硬化模型则是所谓的 Prager 硬化模型，它可以表达为

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}^{p}, K) = 0 \tag{7.2.8}$$

其中后继屈服面同时与硬化参数 K(或其他标量型硬化参数)和塑性应变 $\boldsymbol{\varepsilon}^{p}$ 有关，它们都可视为塑性变形中的内变量，前者作为随塑性变形发展而单调增加的某一标量型累积量的函数，可刻画材料的各向同性硬化效应，后者则可刻画材料的随动硬化效应。式(7.2.3)、式(7.2.4)、式(7.2.5)和式(7.2.7)都可视为式(7.2.8)的特例。因此，在后面几节讲解增量型塑性本构关系的时候我们将从后继屈服准则(7.2.8)式出发进行讨论。

需要说明的是，在一般的后继屈服准则(7.2.8)式中虽然硬化参数 K 和塑性应变 $\boldsymbol{\varepsilon}^{p}$ 都是内变量，但是塑性应变 $\boldsymbol{\varepsilon}^{p}$ 才是最基本和最重要的内变量，增量型塑性本构关系的任务就是给出它的演化方程；而作为各向同性硬化参数的内变量 K 并不是一个独立的内变量，它是内变量塑性应变张量 $\boldsymbol{\varepsilon}^{p}$ 的某种取标量值的函数，这种函数可以根据我们对材料塑性硬化特性的理解和应用上的方便而进行选取，而

这既给出了内变量 K 的定义，同时也就决定了内变量 K 的演化方程。在实践上人们常常假定内变量 K 的演化率 $\dot{K}$ 是塑性应变率张量 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}$ 的一次齐次函数，即

$$\dot{K} = g(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}), \quad g(\alpha \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}) = \alpha g(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}) \tag{7.2.9}$$

其中 α 为任意的常数。这就保持了内变量 K 的简洁性。此外，这还可以保证当塑性应变 $\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}$ 停止发展时（$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}} = \mathbf{0}$）内变量 K 也停止发展（$\dot{K} = 0$）的条件。例如式(7.2.1)和式(7.2.2)所定义的内变量 W^{p} 和 $\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}$ 的演化方程分别为

$$\dot{W}^{\mathrm{p}} = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}, \quad \dot{\bar{\varepsilon}}^{\mathrm{p}} = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}} \tag{7.2.10}$$

就具有这种 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}$ 的一次齐次性质，它们的函数 K 的演化率分别为

$$\dot{K} = \frac{\partial K}{\partial W^{\mathrm{p}}} \dot{W}^{\mathrm{p}} = \frac{\partial K}{\partial W^{\mathrm{p}}} \boldsymbol{\sigma} : \dot{\varepsilon}^{\mathrm{p}}, \quad \dot{K} = \frac{\partial K}{\partial \bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}} \dot{\bar{\varepsilon}}^{\mathrm{p}} = \frac{\partial K}{\partial \bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}} \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}} \tag{7.2.11}$$

当然也具有这种 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}$ 的一次齐次性质。

7.3 应力空间中表述的塑性本构关系

为了在理论上表述时更加清晰和严谨，7.3 节至 7.7 节各节关于本构关系的论述中我们采用了张量的一般表述方法，即将弹性模量张量和柔度张量作为三维空间中的四阶完全对称张量，而将应力张量和应变张量作为三维空间中的二阶对称张量来表述。为了将这些张量表达的公式易于在计算实践中实现，人们常常需要将这些公式改写为张量的 Voigt 记法，即将三维空间中的四阶完全对称张量视为六维空间中的二阶对称张量，而将三维空间中的二阶对称张量视为六维空间中的矢量，并且保持功不变性的应力应变分量取法。关于 Voigt 记法的具体内容可参见 6.4 节。

7.3.1 一般性说明

由于在完全大变形理论框架之内的塑性本构关系还存在不少难点和争论，因此在本书中我们将仍然在所谓的“小变形塑性理论”的框架内来介绍塑性本构关系的知识，但是实践证明，通过建立在这一理论框架之内的增量型塑性本构关系以及

对任意有限过程中无穷多微小过程中增量型塑性本构关系的积分和累积计算，我们事实上是可以很好地解决许多塑性力学大变形的工程问题的。在"小变形塑性理论"的框架内讨论问题，可以不考虑初始密度和瞬时密度之间的区别、Cauchy 应力和 P-K 应力之间的区别以及各种不同定义的应变之间的区别，因此在下面我们将笼统地以 $\boldsymbol{\sigma}$ 和 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 来表示应力张量和应变张量。"小变形塑性理论"框架的一个最重要的假定（当然也是最有争议的假定）就是假设应变张量 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 可以分解为可恢复的弹性应变张量 $\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{e}}$ 和塑性应变张量 $\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}$ 之和，即

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{e}} + \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}} \tag{7.3.1a}$$

于是在每一微过程当中的增量应变 $\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}$ 也可以分解为弹性增量应变 $\mathrm{d}\,\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{e}}$ 和塑性增量应变 $\mathrm{d}\,\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}$ 之和：

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon} = \mathrm{d}\,\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{e}} + \mathrm{d}\,\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}, \quad \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{e}} + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}} \tag{7.3.1b}$$

式(7.3.1b)的第二式表示任意时刻的总应变率 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ 等于其弹性应变率 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{e}}$ 和塑性应变率 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}$ 之和。增量型塑性本构关系的任务就是寻求每一微过程中增量应变 $\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}$ 和增量应力 $\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$ 之间的关系，或者说寻求每一时刻应变率 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ 和应力率 $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ 之间的关系。

如同在 7.2 节中所指出的，为了同时计及材料的各向同性硬化效应和随动硬化效应，我们可假设材料在应力空间中满足一般形式的 Prager 屈服准则：

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}, K) = 0 \tag{7.3.2}$$

其中屈服函数 $f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}, K)$ 对 $\boldsymbol{\sigma}$ 的显式依赖表示它是应力空间中的屈服函数，其对塑性应变 $\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}$ 的显式依赖表示 $\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}$ 是作为内变量参数而引入的，这可以使我们以某种方式计入材料的随动硬化效应，标量型参数 K 是塑性应变的某个函数，屈服函数 $f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}, K)$ 对它的依赖可以使我们以某种方式计入材料的各向同性硬化效应。

我们的第一个任务是求出弹性应变的演化率 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{e}}$。因为弹性应变 $\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{e}}$ 是可逆的，所以由第 6 章的热弹性理论可知，它可以由势函数余能（或者负的自由焓）在内变量不变的情况下对应力 $\boldsymbol{\sigma}$ 求导而得出。在不计温度效应的情况下，在引入内变量 $\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}$ 和 K 以后这可以表达为

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{e}} = \rho \frac{\partial G(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}, K)}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \tag{7.3.3}$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{e}} = \rho \frac{\partial^2 G}{\partial \boldsymbol{\sigma}^2} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{C} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} \tag{7.3.3$'$}$$

其中 G 为比余能，$-G$ 为比自由焓，求导是在内变量 $\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}$ 和 K 不变的情况下即在弹性变载过程中进行的。式(7.3.3)$'$中的 $\boldsymbol{C}$ 是一个完全对称的四阶张量（参见第 6 章）：

$$C = \rho \frac{\partial^2 G}{\partial \boldsymbol{\sigma}^2} = \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \tag{7.3.4}$$

称为弹性柔度张量，对各向同性材料它应是所谓的四阶各向同性张量。在 G 是 $\boldsymbol{\sigma}$ 的二次齐次函数时 C 将为四阶各向同性常张量，它只包含两个独立的材料常数。

我们的第二个任务是给出内变量 K 的演化方程。正如在 7.2 节中所指出的，它并不是一个与塑性应变 $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ 完全无关而独立的内变量，而是作为对材料各向同性硬化特性的刻画以某种方式依赖于塑性应变 $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ 的一个取标量值的函数。如前所述，人们通常假定 K 的演化率 $\dot{K}$ 是塑性应变率 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$ 的一次齐次函数，即

$$\dot{K} = g(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p), \quad g(\alpha \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) = \alpha g(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) \tag{7.3.5}$$

例如，当 K 取为塑性功 W^p 的某种函数 $K(W^p)$ 或取为累积等效塑性应变 $\bar{\varepsilon}^p$ 的某种函数 $K(\bar{\varepsilon}^p)$ 时，可分别有

$$\dot{K} = \frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}W^p}\dot{W}^p = \frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}W^p}\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p,$$

$$\dot{K} = \frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}\bar{\varepsilon}^p}\dot{\bar{\varepsilon}}^p = \frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}\bar{\varepsilon}^p}\sqrt{\frac{2}{3}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p} \tag{7.3.5$'$}$$

它们都具有一次齐次性质(7.3.5)式。这既保持了内变量 K 的简洁性，也可满足当塑性应变 $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ 停止发展时($\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \mathbf{0}$)内变量 K 也停止发展($\dot{K} = 0$)的条件。

我们的最重要的任务就是求出作为基本内变量的塑性应变 $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ 的演化方程，而这也就是增量型塑性本构关系的核心任务。这一任务可以由如下的 Drucker 公设而得到解决。

7.3.2 Drucker 公设(Drucker postulate)和增量型塑性本构关系

在第 5 章和第 6 章中我们曾经通过不可逆过程耗散非负的熵不等式引入了热力学势的概念，例如可通过焓或者自由焓对应力的求导而得出应变。产生不可逆塑性变形的材料是一种存在着内耗散机制的材料，Drucker 试图在形式上借鉴热力学势求导而得出应变的思想，由塑性耗散永远非负的事实引出某种所谓的“塑性势”并由其对应力求导而得出塑性应变 $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ 的演化方程，从而解决增量型塑性本构关系的问题。对于存在耗散机制的材料，在任意热力学循环中其耗散永远非负。与此相对应，Drucker 提出了在有不可逆塑性变形出现的任意应力循环中材料附加应力的功必然非负的要求，并把这一要求称之为 Drucker 公设。

Drucker 公设可表达如下：

设物体在 t_0 时刻处于屈服面之内或之上的某一任意应力状态为 $\boldsymbol{\sigma}^0$，对其加载使其于某一时刻 t^* 达至屈服并在时间间隔$[t^*, t^*+\delta t]$之内产生塑性变形，然后对其卸载使物体回到原来的应力状态 $\boldsymbol{\sigma}^0$，从而完成一个应力循环，则由于不可逆塑性变形耗散是非负的，所以在这一应力循环中附加应力 $\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{\sigma}^0$ 对物体所做的功 W_σ 必须是非负的。我们称严格满足此种要求的材料为 Drucker 材料。

图 7.5(a)和图 7.5(b)分别对简拉情况和一般复杂应力状态情况给出了应力循环的图示，其中 $A_0(t_0)$、$B(t^*)$、$C(t^*+\delta t)$和 $A_1(t_1)$分别表示初态、屈服态、硬化态和终态的应力点。按 Drucker 公设，对 Drucker 材料，有

$$W_\sigma = \int_{t_0}^{t_1}(\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{\sigma}^0):\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}\mathrm{d}t = \int_{t_0}^{t_1}(\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{\sigma}^0):(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{e}}+\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}})\mathrm{d}t \geqslant 0 \quad (7.3.6)$$

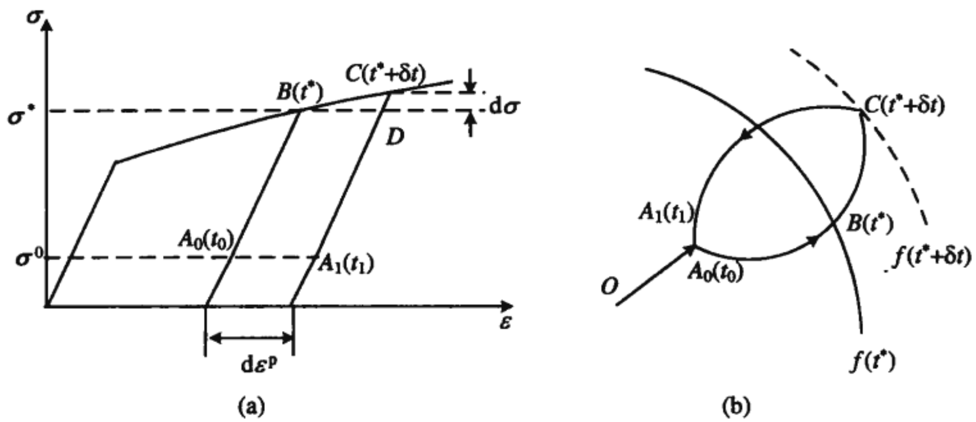


图 7.5　应力空间中的屈服面

由于弹性变形是可逆的，在加载过程中所产生的弹性应变在卸载至起始应力 $\boldsymbol{\sigma}^0$ 时将会完全被释放，附加应力在每一应力水平 $\boldsymbol{\sigma}$ 处的微加载弹性应变上之功将与其在同一应力水平 $\boldsymbol{\sigma}$ 处的微卸载弹性应变上之功相抵消，所以在整个应力循环中附加应力的弹性变形功将为零，而只有其塑性变形功才不为零，后者只在图 7.5(a)中的 BC 段产生，所以式(7.3.6)也可以写为

$$W_\sigma = \int_{t_0}^{t_1}(\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{\sigma}^0):\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}\mathrm{d}t = \int_{t^*}^{t^*+\delta t}(\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{\sigma}^0):\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}\mathrm{d}t \geqslant 0 \qquad (7:3.6)'$$

对一维应力的情况，参见图 7.5(a)，当起始应力点 A_0 为屈服面内的弹性状态时，式(7.3.6)′的附加应力塑性功积分将由曲线四边形 A_0BCA_1 的面积给出，在忽略二阶小量的情况下，它近似地等于平行四边形 A_0BDA_1 的面积，即

$$W_\sigma = (\sigma * - \sigma^0)\mathrm{d}\varepsilon^p \quad (\text{当 } \sigma^0 \neq \sigma^* \text{ 时}) \tag{a}$$

其中$\mathrm{d}\varepsilon^p$表示在$[t^*, t^* + \delta t]$的微塑性加载段 BC 期间所产生的增量塑性应变；当起始应力点 A_0 恰为屈服面上的塑性屈服状态时，式(7.3.6)′的附加应力塑性功积分将由曲线三角形BCD 的面积给出，在忽略高阶小量的情况下，它近似地等于直线三角形 BCD 的面积，即

$$W_\sigma = \frac{1}{2}\mathrm{d}\sigma \mathrm{d}\varepsilon^p \quad (\text{当 } \sigma^0 = \sigma * \text{ 时}) \tag{b}$$

其中 $\mathrm{d}\sigma$ 表示在$[t^*, t^* + \delta t]$的微塑性加载段 BC 期间所产生的增量应力。将以上二式推广到图 7.5(b)所示的一般复杂应力状态，可将之写为张量的形式，即

$$(\boldsymbol{\sigma}^* - \boldsymbol{\sigma}^0) : \mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}^p \geqslant 0 \quad (\text{当}\boldsymbol{\sigma}^0 \neq \boldsymbol{\sigma}^* \text{ 时}) \tag{7.3.7}$$

$$\frac{1}{2}\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} : \mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}^p \geqslant 0 \quad (\text{当}\boldsymbol{\sigma}^0 = \boldsymbol{\sigma}^* \text{ 时}) \tag{7.3.8}$$

事实上式(7.3.7)和式(7.3.8)也可以由式(7.3.6)′出发而直接加以证明如下：将式(7.3.6)′中的积分在 $t = t^*$ 处展开为 Taylor 级数，可有

$$\begin{aligned} W_\sigma &= 0 + (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^0) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \Big|_{t=t*} \delta t + \frac{1}{2}[\dot{\boldsymbol{\sigma}} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p + (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^0) : \ddot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p]\Big|_{t=t*} \delta t^2 + \cdots \\ &= (\boldsymbol{\sigma}^* - \boldsymbol{\sigma}^0) : \mathrm{d}\,\boldsymbol{\varepsilon}^p + \frac{1}{2}\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} : \mathrm{d}\,\boldsymbol{\varepsilon}^p + \cdots \geqslant 0 \end{aligned}$$

对$\boldsymbol{\sigma}^0 \neq \boldsymbol{\sigma}^*$和$\boldsymbol{\sigma}^0 = \boldsymbol{\sigma}^*$即起始应力点$\boldsymbol{\sigma}^0$ 在屈服面之内和恰在屈服面之上的两种情况，在略去相对的高阶小量之后，分别可得

$$(\boldsymbol{\sigma}^* - \boldsymbol{\sigma}^0) : \mathrm{d}\,\boldsymbol{\varepsilon}^p \geqslant 0 \quad (\boldsymbol{\sigma}^0 \neq \boldsymbol{\sigma}^* \text{ 时}) \tag{7.3.7}$$

$$\frac{1}{2}\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} : \mathrm{d}\,\boldsymbol{\varepsilon}^p \geqslant 0 \quad (\boldsymbol{\sigma}^0 = \boldsymbol{\sigma}^* \text{ 时}) \tag{7.3.8}$$

式(7.3.7)的物理意义是：塑性增量应变 $\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}^p(B)$形成之点的应力 $\boldsymbol{\sigma}^*(B)$在 $\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}^p(B)$上之塑性功$\boldsymbol{\sigma}^*(B) : \mathrm{d}\,\boldsymbol{\varepsilon}^p(B)$不小于屈服面之内或之上（极限情况下）任何其他应力状态 $\boldsymbol{\sigma}^0(A_0)$在 $\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}^p(B)$上的塑性功$\boldsymbol{\sigma}^0(A_0) : \mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}^p(B)$，故式(7.3.7)也常常被称之为最大塑性功原理。下面我们还会进一步指出，式(7.3.8)将给出稳定材料的定义，其意义是，精确满足 Drucker 公设的材料必然是硬化或至少是理想塑性的稳定材料而不能是出现软化失稳的材料，故 Drucker 公设也常常被简单地称之为稳定公设。

由最大塑性功原理(7.3.7)式很容易证明并得出如下两点重要的结论：(1) 满足 Drucker 公设材料的应力屈服面一定是处处外凸的，这称之为外凸法则；(2) 在 Drucker 材料应力屈服面的任意光滑点处，塑性增量应变 $\mathrm{d}\varepsilon^p$ 一定指向应力屈服面的外法线方向，这称之为正交法则。外凸法则和正交法则是很容易从最大塑性

功原理出发经由反证法而得到证明的，这可以由图7.6、图7.7来说明。

事实上，将增量塑性应变 $d\boldsymbol{\varepsilon}^p$ 的坐标轴与应力空间 $\boldsymbol{\sigma}$ 中的坐标轴相重合，由于表达附加应力 $\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{\sigma}_0$ 的矢量和表达增量塑性应变 $d\boldsymbol{\varepsilon}^p$ 的矢量可分别由图7.6中的矢量 $\overrightarrow{A_0B}$ 和 $\overrightarrow{BP}$ 来表示，所以最大塑性功原理(7.3.7)式也可以表达为（左端为张量直接记法，中间和右端为Voigt记法）

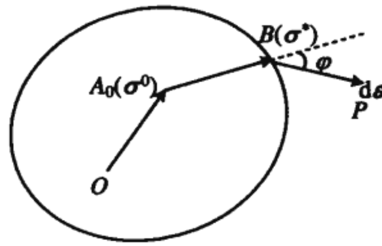
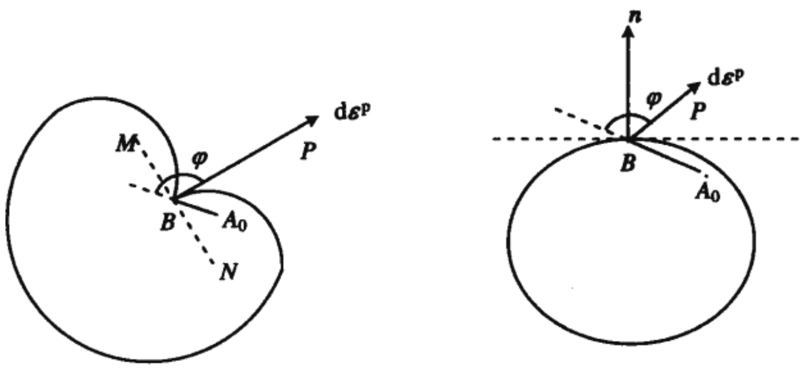


图7.6　式(7.3.7)的图示说明



(a) 外凸法则的证明　　(b) 正交法则的证明

图7.7

$$(\boldsymbol{\sigma}^* - \boldsymbol{\sigma}^0) : d\,\boldsymbol{\varepsilon}^p = \overrightarrow{A_0B}\cdot\overrightarrow{BP} = |\overrightarrow{A_0B}|\,|\overrightarrow{BP}|\cos\varphi \geqslant 0 \qquad (7.3.7)'$$

即不管起始应力点 A_0 处于应力屈服面之内或之上的何处，矢量 $\overrightarrow{A_0B}$ 和 $\overrightarrow{BP}$ 的夹角 φ 都不是钝角。不妨设 $d\,\boldsymbol{\varepsilon}^p$ 如图7.7(a)中所示，过产生此 $d\,\boldsymbol{\varepsilon}^p$ 的应力点 B 做此矢量的法平面 MBN，则式(7.3.7)′的几何意义表示：屈服面之内和极限情况下屈服面之上的任何点都必须位于法平面 MBN 的同一侧（而且是相对于矢量 $d\,\boldsymbol{\varepsilon}^p$ 而言的内侧），即应力屈服面在 B 点处必然是外凸的，这是因为如果它是内凹的，则我们总可以找到一些起始应力点 A_0 而使得夹角 φ 为钝角。这就证明了外凸法则。对于如图7.7(b)所示的外凸的应力屈服面，以 $\boldsymbol{n}$ 表示其在光滑点 B 处的外法矢量，则由式(7.3.7)′容易说明，不管增量塑性应变 $d\,\boldsymbol{\varepsilon}^p$ 指向何处，只要它不与 $\boldsymbol{n}$ 的方向相一致，则我们总可以找到一些起始应力点 A_0 而使得夹角 φ 为钝角。这就

证明了正交法则。

在应力屈服面的每一光滑点处，塑性增量应变一定沿着屈服面外法向的正交法则，在数学上可以表达为

$$\mathrm{d}\,\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}} = \mathrm{d}\lambda \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (\mathrm{d}\lambda > 0) \tag{7.3.9}$$

或将之写为率形式，即

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}} = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (\dot{\lambda} > 0) \tag{7.3.9$'$}$$

待定因子 $\mathrm{d}\lambda>0$ 或 $\dot{\lambda}>0$ 称之为塑性流动因子，它们大于零表明塑性变形在发展，而且增量塑性应变 $\mathrm{d}\,\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}$ 或塑性应变率$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}$ 必然沿着应力屈服面的外法线方向，故正交法则(7.3.9)式或(7.3.9)′式也常常被称之为塑性流动法则。式(7.3.9)′在形式上类似于由弹性势 G 对应力$\boldsymbol{\sigma}$ 求导而得出弹性应变率$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{e}}$ 的式(7.3.3)，故由 Drucker 所创建的这一塑性理论也常常被称之为“塑性位势理论”，而将屈服函数 f 称之为“塑性位势”，并将式(7.3.9)或式(7.3.9)′称为与屈服函数f 相关联的塑性流动法则(工程塑性力学中有时以屈服函数以外的其他函数为“塑性位势”而代替屈服函数 f，则称之为非相关的塑性流动法则)。但是，我们强调指出，这里将式(7.3.9)或式(7.3.9)′中的f 称之为塑性位势只是一种术语上的借用，其实是并不恰当的，因为它们只是通过求导给出了微过程中的塑性增量应变 $\mathrm{d}\,\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}$ 或塑性应变率$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}$，而并不是求出任意状态的塑性应变$\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}$ 本身；同时，Drucker 所提出的应力循环过程只是实现了应力状态 $\boldsymbol{\sigma}$ 本身的循环，而并未实现介质全部状态量(例如内变量 K 和$\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}$)的循环，所以并不是精确意义上的热力学循环，可称之为所谓的准热力学循环。

将正交法则(7.3.9)式代入(7.3.8)式，有

$$\frac{1}{2}\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} : \mathrm{d}\,\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}} = \frac{1}{2}\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} : \mathrm{d}\lambda \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{1}{2}\mathrm{d}\lambda \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} \geqslant 0 \tag{7.3.8$'$}$$

塑性变形的发展对应着 $\mathrm{d}\lambda>0$，所以由式(7.3.8)′可见，塑性变形发展($\mathrm{d}\lambda>0$)时必有$\partial f = \dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} \geqslant 0$，即后继应力屈服面必然是向外扩大(硬化)或至少是保持其尺寸的(理想塑性)，而不可能是向内缩小(软化)的。我们把包括理想塑性材料在内的硬化材料简称为稳定的材料，而将软化的材料称之为非稳定的材料，所以式(7.3.8)和式(7.3.8)′的物理意义是：满足 Drucker 公设的材料必然是稳定的材料，所以 Drucker 公设应称之为稳定公设(但文献上常常简称为硬化公设)。这就是我们在前面曾指出过的结论。

现在我们剩下的核心任务就是求出式(7.3.9)′中的塑性流动因子$\dot{\lambda}$。只要塑性变形在发展,则新的应力点就会仍然保持在新的后继屈服面上,即仍有

$$f(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}},\boldsymbol{K}) = 0 \tag{7.3.2}$$

这在数学上可以表达为对后继屈服面(7.3.2)式求对时间的导数时仍应成立,于是对时间 t 求导可得

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}} + \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{K}}\dot{\boldsymbol{K}} = 0 \tag{7.3.10}$$

在利用了 $\boldsymbol{K}$ 的演化方程(7.3.5)式之后,此式可写为

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}} + \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{K}}g(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}) = 0 \tag{7.3.10$'$}$$

式(7.3.10)或式(7.3.10)′称之为一致性条件(condition of consistency)。将正交法则(7.3.9)′式代入一致性法则(7.3.10)′式之中,并利用函数 g 的一次齐次特性,可得塑性流动因子 $\dot{\lambda}$ 的表达式如下:

$$\dot{\lambda} = \frac{1}{h}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} \tag{7.3.11}$$

其中标量参数 h 为

$$h \equiv -\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}} : \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} - \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{K}}g\left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right) \tag{7.3.12}$$

可由后继屈服准则(7.3.2)式和内变量 $\boldsymbol{K}$ 的演化方程(7.3.5)式或(7.3.5)′式而求出。将(7.3.11)式代入正交法则(7.3.9)′式之中,得

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}} = \frac{1}{h}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \dot{\boldsymbol{\sigma}}\right) = \frac{1}{h}\left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right) : \dot{\boldsymbol{\sigma}} \tag{7.3.13}$$

式(7.3.13)给出了内变量$\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}$ 的演化方程即塑性应变率$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}$ 的表达式,再利用弹性应变率的表达式(7.3.3)′式,即可得

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{e}} + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}} = \left(\boldsymbol{C} + \frac{1}{h}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right) : \dot{\boldsymbol{\sigma}} \tag{7.3.14}$$

式(7.3.14)是$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$和$\dot{\boldsymbol{\sigma}}$间的线性齐次关系,所以它表达的其实就是时率无关型的材料弹塑性本构关系,可称之为亚弹塑性本构关系。将式(7.3.13)和式(7.3.14)分别写为增量形式,可有

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}} = \frac{1}{h}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}\right) = \frac{1}{h}\left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right) : \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} \tag{7.3.13$'$}$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon} = \mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{e}} + \mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}} = \left(\boldsymbol{C} + \frac{1}{h}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right) : \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} \tag{7.3.14$'$}$$

式(7.3.13)′和式(7.3.14)′分别给出了由任意微过程中的增量应力 $\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$ 求其增量

塑性应变 $\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}$ 和增量应变 $\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}$ 的公式,它们即是在应力空间中所表达的增量型塑性本构关系。四阶张量

$$\boldsymbol{C},\quad \boldsymbol{C}^{\mathrm{p}}=\frac{1}{h}\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{\sigma}}\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{\sigma}},\quad \boldsymbol{C}^{\mathrm{ep}}=\boldsymbol{C}+\frac{1}{h}\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{\sigma}}\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{\sigma}}$$

分别称为材料的弹性柔度张量、塑性柔度张量和弹塑性柔度张量。

对各向同性硬化材料和随动硬化材料,分别有$\dfrac{\partial f}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}}=\mathbf{0}$ 和$\dfrac{\partial f}{\partial\boldsymbol{K}}=0$。如对屈服准则为 $f(\boldsymbol{\sigma})=K(W^{\mathrm{p}})$的各向同性功硬化材料,可有

$$\begin{cases}\dot{\lambda}=\dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial\boldsymbol{\sigma}}:\dot{\boldsymbol{\sigma}}}{K'(W^{\mathrm{p}})\boldsymbol{\sigma}:\dfrac{\partial f}{\partial\boldsymbol{\sigma}}}\\[2ex] \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}=\dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial\boldsymbol{\sigma}}:\dot{\boldsymbol{\sigma}}}{K'(W^{\mathrm{p}})\boldsymbol{\sigma}:\dfrac{\partial f}{\partial\boldsymbol{\sigma}}}\dfrac{\partial f}{\partial\boldsymbol{\sigma}}\end{cases}\tag{7.3.15}$$

特别地,当屈服函数 f 为$\boldsymbol{\sigma}$ 的n 次齐次函数时,即对任意常数 α 都有$f(\alpha\boldsymbol{\sigma})=\alpha^{n}f(\boldsymbol{\sigma})$时(Mises 准则是一特例),利用齐次函数的欧拉定理即 $\boldsymbol{\sigma}:\dfrac{\partial f}{\partial\boldsymbol{\sigma}}=nf(\boldsymbol{\sigma})$,则式(7.3.15)可写为

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}=\frac{\dfrac{\partial f}{\partial\boldsymbol{\sigma}}:\dot{\boldsymbol{\sigma}}}{nf(\boldsymbol{\sigma})K'(W^{\mathrm{p}})}\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{\sigma}}\tag{7.3.16}$$

在这里我们特别指出,尽管式(7.3.13)′和式(7.3.14)′给出了由任意微过程中的增量应力 $\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$ 求其增量塑性应变 $\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}$ 和增量应变 $\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}$ 的公式,但是对于理想塑性材料,它们则是无法应用的。这是因为,对理想塑性材料而言,有$\dfrac{\partial f}{\partial\boldsymbol{\sigma}}:\dot{\boldsymbol{\sigma}}=0$,$\dfrac{\partial f}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}}=\mathbf{0}$,$\dfrac{\partial f}{\partial\boldsymbol{K}}=0$(因为屈服面保持尺寸),故(7.3.12)式给出 $h=0$,所以(7.3.11)式给出$\dfrac{0}{0}$型的 $\dot{\lambda}$ 而不能确定,从而增量塑性应变 $\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}$ 和增量应变 $\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}$ 也便都不能确定。这在物理上表达的是如下的事实:对于理想塑性材料而言,只要应力点保持在屈服面上移动,则当材料微元周围不受几何约束时,其塑性变形便可以任意发展,故其塑性应变和整个应变便是不能确定的(这在一维应力条件下是一目了然的)。

对理想塑性材料我们可以通过由增量应变倒过来确定增量应力的方法来解决塑性本构关系的问题,在 7.5 节中我们将对包括理想塑性材料在内的各种材料详

细介绍这一由增量应变倒过来确定增量应力的一般方法，在本节中我们则作为一个特例，只对满足 Mises 屈服准则的材料来介绍一个特殊方法。对于满足 Mises 屈服准则

$$f(\boldsymbol{\sigma}) = \bar{\sigma}^2 = Y^2$$

的材料，求畸变功增量，有

$$\mathrm{d}W_Q = \boldsymbol{\sigma}' : \mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}' = \boldsymbol{\sigma}' : \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}'}{2G} + 3\mathrm{d}\lambda\boldsymbol{\sigma}'\right) = \frac{1}{2G}\,\mathrm{d}J_2 + 6\,\mathrm{d}\lambda J_2 = 2\,\bar{\sigma}^2\,\mathrm{d}\lambda = 2Y^2\mathrm{d}\lambda$$

即

$$3\mathrm{d}\lambda = \frac{3}{2}\,\frac{\boldsymbol{\sigma}' : \mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}'}{Y^2} \tag{7.3.17}$$

$$\mathrm{d}\,\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}} = \mathrm{d}\lambda\,\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = 3\mathrm{d}\lambda\boldsymbol{\sigma}' = \frac{3}{2}\,\frac{\boldsymbol{\sigma}' : \mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}'}{Y^2}\boldsymbol{\sigma}' \tag{7.3.18}$$

这便由增量应变确定了塑性增量应变，从而也可确定出增量应力：

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2\mu}\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}' = \mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}' - \dfrac{3}{2}\,\dfrac{\boldsymbol{\sigma}' : \mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}'}{Y^2}\boldsymbol{\sigma}' \\ \mathrm{d}p = -\,k\mathrm{d}\varepsilon_{ii} \end{cases} \tag{7.3.19}$$

其中 μ、k 分别为弹性剪切模量和体积压缩模量。

7.4 应变空间中表述的塑性本构关系

7.4.1 问题的提出

在 7.3 节中我们以应力空间中的加载函数和 Drucker 公设为基础得到了由任意微过程中增量应力 $\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$ 表达其增量应变 $\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}$ 的增量型塑性应力应变关系。同时我们在上节曾指出，严格满足 Drucker 公设的材料必定是稳定材料（包括硬化材料和其特例理想塑性材料），因此如果严格以 Drucker 公设作为讨论问题的基本出发点的话，则我们只能说对于稳定的材料我们已经得到了上节所给出的增量型塑性应力应变关系。对于稳定材料，塑性变形的发展和应力加载面的扩大（即硬化）或保持（即理想塑性）是一致的，因之 Drucker 公设又称为硬化公设，更确切地说应称之为稳定公设。如果材料发生软化即失稳，则上节所表述的 Drucker 公设不再严格地成立，我们便无法得出上一节所给出的有关结果。对简单拉伸的情况这可以由

图 7.8(a)来加以说明:图中应力应变曲线右半部的 BC 段材料出现了软化失稳,在从失稳屈服面上的点 B 出发塑性流动到 C 点的微过程中,$d\sigma=\sigma(C)-\sigma(B)<0$,$d\varepsilon^e=d\sigma/E=-D_1D<0$,$d\varepsilon=BD_1>0$,$d\varepsilon^p=d\varepsilon-d\varepsilon^e=BD_1+D_1D=BD>0$,$\frac{1}{2}d\sigma d\varepsilon^p<0$,不满足上节所给出的稳定材料的定义(7.3.8)式,我们无法从 B 点出发完成 Drucker 公设所要求的真实的应力循环,而只能设想一个虚假的应力循环 B-C-D。

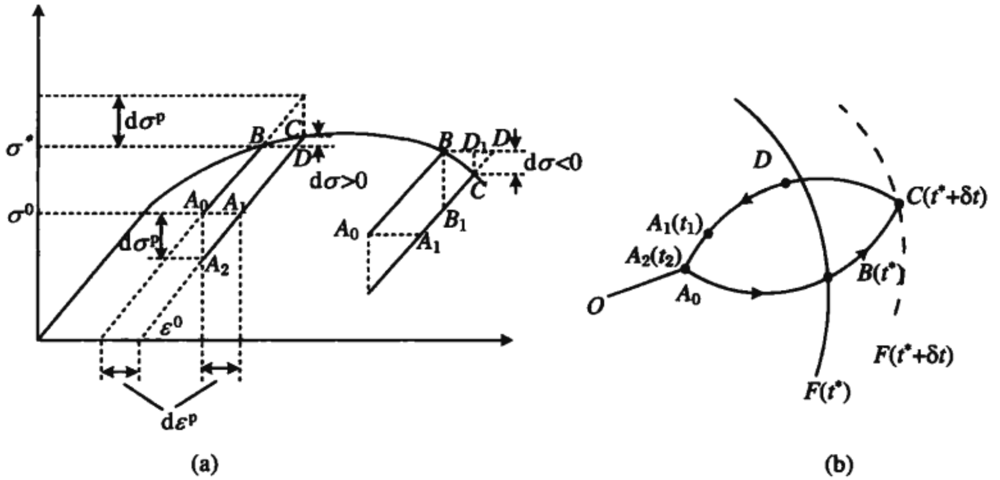


图 7.8 应变空间中的屈服面

为了克服软化材料 Drucker 公设不再成立的困难,Ильюшин 注意到了如下的事实:不管是稳定材料还是非稳定材料,在任意一个微塑性变载的过程中,塑性应变的发展都总是和整个应变的发展相一致的,即$d\varepsilon^p>0$ 和 $d\varepsilon>0$ 永远都是同时存在的(见上面 BC 段的微塑性变载过程)。以此为启发,Ильюшин 提出了在应变空间中讨论屈服面的设想,他还提出了一个 Ильюшин 公设并以此为基础,导出了增量型的塑性本构关系。

7.4.2 应变空间中的屈服面

材料的弹性应变$\boldsymbol{\varepsilon}^e$、塑性应变$\boldsymbol{\varepsilon}^p$ 与其应力 $\boldsymbol{\sigma}$ 是由下式相联系的:

$$\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{M}:\boldsymbol{\varepsilon}^e=\boldsymbol{M}:(\boldsymbol{\varepsilon}-\boldsymbol{\varepsilon}^p) \tag{7.4.1}$$

其中 $\boldsymbol{M}=\boldsymbol{C}^{-1}$(柔度张量 $\boldsymbol{C}$ 的逆张量)是材料的弹性模量张量。将(7.4.1)式代入 7.3 节应力空间中的加载面 $f(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\varepsilon}^p,K)=0$ 之中,即可得

$$f(\boldsymbol{M}:(\boldsymbol{\varepsilon}-\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}),\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}},K)\equiv F(\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}},K)=0 \tag{7.4.2}$$

这样,我们就把应力空间中的加载面转换成了应变空间中的加载面,应变屈服函数虽然仍以塑性应变$\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}$ 和各向同性硬化参数 K 为内变量,但是却是以应变 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 作为其基本外变量的。

根据第 6 章中热弹性理论的结果知,应力 $\boldsymbol{\sigma}$ 可由自由能 ψ 对弹性应变$\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{e}}$ 求导而得出,故有

$$\boldsymbol{\sigma}=\rho\frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{e}}},\quad \dot{\boldsymbol{\sigma}}=\rho\frac{\partial^{2}\psi}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{e}}\partial\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{e}}}:\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{e}}=\boldsymbol{M}:\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{e}} \tag{7.4.3}$$

其中完全对称的四阶张量 $\boldsymbol{M}$ 为弹性模量张量,求导是在内变量$\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}$ 和 K 不变的条件下也就是在弹性变载的条件下进行的,所以也可以写为

$$\boldsymbol{M}=\rho\frac{\partial^{2}\psi}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}\partial\boldsymbol{\varepsilon}}=\frac{\partial\boldsymbol{\sigma}}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}} \tag{7.4.4}$$

式(7.4.3)给出了应力演化率$\dot{\boldsymbol{\sigma}}$和弹性应变演化率$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{e}}$ 之间的关系。

与 7.3 节类似,各向同性硬化内变量 K 的演化方程仍假设为塑性应变率的一次齐次函数,即

$$\dot{K}=g(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}),\quad g(\alpha\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}})=\alpha g(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}) \tag{7.4.5}$$

我们剩下的核心任务仍然是求得塑性应变的演化方程即$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}$ 的表达式,这可以由如下的 Ильюшин 公设来解决。

7.4.3　Ильюшин 公设和应变空间中表达的增量型塑性本构关系

Ильюшин 公设(Ильюшин postulate)的内容是:从应变屈服面内或面上任意一个应变点出发,对物体进行加载使其产生塑性变形,然后卸载使其回到原应变点从而完成一个应变循环,则在此应变循环中,应力(或附加应力)所做的总变形功必非负。

图 7.8(a)和图 7.8(b)分别给出了一维应力情况下和一般情况下应变空间中应变循环的示意图。设 $t=t_0$ 时材料的起始应变状态和应力状态分别为 $\boldsymbol{\varepsilon}^0$ 和 $\boldsymbol{\sigma}^0$,如应变空间中的 A_0点。加载到 t^* 时应变点达到 B,应变和应力各为$\boldsymbol{\varepsilon}^*$ 和$\boldsymbol{\sigma}^*$ 。t^* 到 $t^*+\delta t$ 期间进行塑性加载,产生增量塑性应变 $\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}$,$t^*+\delta t$ 时应变点达到C 点(这里的塑性加载是指材料的塑性应变连同其整个应变都在发展,即应变屈服面在扩大,而并不要求材料稳定即应力屈服面的扩大或不缩)。设从 C 点发生弹性卸载至时刻 t_1时,应变点达到 A_1,具有与 A_0同样的应力 $\boldsymbol{\sigma}^0$,但材料中尚有残余的塑性应变 $\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}$,此残余塑性应变是从 B 到C 期间产生的。为了清除 A_1具有的残余应

变 $\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}$ 而使材料的应变回到其原出发应变状态 $\boldsymbol{\varepsilon}^0$ 从而完成一个应变循环，我们需要继续按弹性卸载规律卸去由下式所表达的量 $\mathrm{d}\,\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{p}}$：

$$\mathrm{d}\,\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{p}} = \boldsymbol{M} : \mathrm{d}\,\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}} \quad (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}} = \boldsymbol{M}^{-1} : \dot{\boldsymbol{\sigma}}^{\mathrm{p}} = \boldsymbol{C} : \dot{\boldsymbol{\sigma}}^{\mathrm{p}}) \tag{7.4.6}$$

其中 $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{M}^{-1}$ 为材料的柔度张量。我们称量 $\mathrm{d}\,\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{p}}$ 为"塑性增量应力"，显然它等于卸除材料的变形而完成应变循环时材料中所存在的残余应力（$-\mathrm{d}\,\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{p}}$）的负值，见图 7.8(a)。可以看到塑性应变的演化率 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}$ 是可以由塑性增量应力的演化率 $\dot{\boldsymbol{\sigma}}^{\mathrm{p}}$ 来确定的。设 t_2 时刻材料的应变点到达 A_2 而完成了应变循环，则 Ильюшин 公设可表达为

$$W_\varepsilon = \int_{t_0}^{t_2} \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}\mathrm{d}t = \int_{t_0}^{t_2} (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^0) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}\mathrm{d}t \geqslant 0 \tag{7.4.7}$$

由于在应变循环中应变恢复原状，所以应力 $\boldsymbol{\sigma}$ 所做的功和附加应力 $\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^0$ 所做的功相等。在一维应力的情况中，由图 7.8(a)可见，不管材料是否失稳，我们总有

$$W_\varepsilon = W_\sigma + \frac{1}{2}\mathrm{d}\sigma^{\mathrm{p}}\mathrm{d}\varepsilon^{\mathrm{p}} \quad (A_0 \neq B \text{ 或 } A_0 = B) \tag{a}$$

$$W_\varepsilon = (\varepsilon^* - \varepsilon^0)\mathrm{d}\sigma^{\mathrm{p}} \quad (A_0 \neq B \text{ 时}) \tag{b}$$

$$W_\varepsilon = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}\varepsilon\mathrm{d}\sigma^{\mathrm{p}} \quad (A_0 = B \text{ 时}) \tag{c}$$

将之推广到一般情况下，并利用 Ильюшин 公设，则可有

$$W_\varepsilon = W_\sigma + \frac{1}{2}\mathrm{d}\,\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{p}} : \mathrm{d}\,\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}} \quad (A_0 \neq B \text{ 或 } A_0 = B) \tag{7.4.8}$$

$$W_\varepsilon = (\boldsymbol{\varepsilon}^* - \boldsymbol{\varepsilon}^0) : \mathrm{d}\,\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{p}} \geqslant 0 \quad (A_0 \neq B \text{ 时}) \tag{7.4.9}$$

$$W_\varepsilon = \frac{1}{2}\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon} : \mathrm{d}\,\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{p}} \geqslant 0 \quad (A_0 = B \text{ 时}) \tag{7.4.10}$$

其中 W_ε 和 W_σ 分别表示附加应力 $\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^0$ 在应变循环和应力循环中的变形功。当然我们也可以直接由(7.4.7)式而推出这些式子，读者可尝试之。因为任何过程的弹性变形功恒非负，卸去 $\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}$ 时卸载应力 $\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{p}}$ 之功也恒非负，即恒有 $\frac{1}{2}\mathrm{d}\,\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{p}} : \mathrm{d}\,\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}} = \frac{1}{2}\mathrm{d}\,\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}} : \boldsymbol{M} : \mathrm{d}\,\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}} \geqslant 0$（$\boldsymbol{M}$ 半正定），所以式(7.4.8)说明：如果 $W_\sigma \geqslant 0$（满足 Drucker 公设而稳定），则必然有 $W_\varepsilon \geqslant 0$，即满足 Drucker 公设的稳定材料必然也满足 Ильюшин 公设；但是，$W_\varepsilon \geqslant 0$ 则不一定有 $W_\sigma \geqslant 0$，即满足 Ильюшин 公设的材料未必是满足 Drucker 公设的稳定材料，这便是材料出现软化即应力失稳的情况。所以 Ильюшин 公设比 Drucker 公设更为普遍，满足 Ильюшин 公设 $W_\varepsilon \geqslant 0$ 的材料可以包含更为广泛的稳定和不稳定材料，它给出了材料塑性变形发展（伴随

材料整个变形发展)的定义,所以 Ильюшин 公设也称为塑性公设。与 7.3 节中的推理相类似,由式(7.4.9)中起始应变点$\boldsymbol{\varepsilon}^0$ 在应变屈服面之内或之上的任意性可以得出结论:应变空间中的加载面一定是处处外凸的(外凸法则);而且,由式(7.4.6)所定义的塑性增量应力 $\mathrm{d}\,\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{p}}$ 必然是指向应变加载面的外法线方向的(正交法则)。正交法则在数学上可以表达为

$$\mathrm{d}\,\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{p}} = \mathrm{d}\mu\,\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \quad (\mathrm{d}\mu > 0) \tag{7.4.11}$$

其中塑性流动因子 $\mathrm{d}\mu>0$ 表示塑性应力在发展($\mathrm{d}\,\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{p}}\neq\mathbf{0}$)或材料的塑性应变在发展($\mathrm{d}\,\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}\neq\mathbf{0}$)。由于

$$F(\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}},K) \equiv f(\boldsymbol{M}:(\boldsymbol{\varepsilon}-\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}),\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}},K) = 0 \tag{7.4.2}$$

所以有

$$\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}:\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}:\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}:\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \tag{7.4.12}$$

这里用到了 $\boldsymbol{M}$ 的完全对称性。所以

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{p}} = \boldsymbol{M}:\mathrm{d}\,\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}} = \boldsymbol{M}:\mathrm{d}\lambda\,\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \mathrm{d}\lambda\,\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \tag{7.4.13}$$

将式(7.4.13)和式(7.4.11)对比,可知有

$$\mathrm{d}\mu = \mathrm{d}\lambda,\quad \dot{\mu} = \dot{\lambda} \tag{7.4.14}$$

即在应力空间中以$\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$为单位度量的塑性应变的发展速度 $\dot{\lambda}$ 和在应变空间中以$\dfrac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}$为单位度量的塑性应力的发展速度 $\dot{\mu}$ 是相同的,下面我们将使用记号 $\dot{\lambda}$。将正交法则(7.4.11)式代入式(7.4.10)之中,可得

$$W_{\varepsilon} = \frac{1}{2}\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}:\mathrm{d}\lambda\,\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{2}\mathrm{d}\lambda\,\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}:\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon} \geqslant 0 \tag{7.4.15}$$

由式(7.4.15)可见:材料塑性应力 $\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{p}}$ 的发展即塑性变形的发展($\mathrm{d}\lambda>0$)必然是和材料整个变形的发展即应变加载面的扩大$\left(\partial F=\dfrac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}:\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}>0\right)$相一致的,故 Ильюшин 公设也称为塑性公设。塑性流动因子 $\dot{\lambda}$ 可由塑性应变发展时应变点必然保持在应变加载面上的一致性条件所决定,数学上即是必有

$$\dot{F} = \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}:\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}}:\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}} + \frac{\partial F}{\partial K}\dot{K} = \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}:\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}}:\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}} + \frac{\partial F}{\partial K}g(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}) = 0 \tag{7.4.16}$$

由式(7.4.6)和正交法则(7.4.11)式可得

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}} = \boldsymbol{C} : \dot{\boldsymbol{\sigma}}^{\mathrm{p}} = \dot{\lambda} \boldsymbol{C} : \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \tag{7.4.17}$$

将塑性应变率的公式(7.4.17)式代入一致性法则(7.4.16)式并利用函数 $g(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}})$的一次齐次性质,可求出塑性流动因子 $\dot{\lambda}$ 为

$$\dot{\lambda} = \frac{1}{h_1} \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \tag{7.4.18}$$

其中参量

$$h_1 = -\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}} : \boldsymbol{C} : \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} - \frac{\partial F}{\partial K} g\left(\boldsymbol{C} : \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}\right) \tag{7.4.19}$$

可由应变屈服面(7.4.2)式和内变量 K 的演化方程(7.4.5)式而求出。由此可得塑性应变率$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}$ 由整个应变率$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$表达的公式如下:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}} = \dot{\lambda} \boldsymbol{C} : \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{h_1} \boldsymbol{C} : \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \tag{7.4.20}$$

而应力率$\dot{\boldsymbol{\sigma}}$由整个应变率$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$表达的公式则为

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{M} : [\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}] = \left[\boldsymbol{M} - \frac{1}{h_1} \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}\right] : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \tag{7.4.21}$$

将式(7.4.20)和式(7.4.21)写为增量的形式,即有

$$\mathrm{d}\,\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}} = \mathrm{d}\lambda \boldsymbol{C} : \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{h_1} \boldsymbol{C} : \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} : \mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon} \tag{7.4.20$'$}$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{M} : [\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon} - \mathrm{d}\,\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}] = \left[\boldsymbol{M} - \frac{1}{h_1} \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}\right] : \mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon} \tag{7.4.21$'$}$$

式(7.4.20)′和式(7.4.21)′即是应变空间中所表达的增量型塑性本构关系,它们分别给出了由任意微过程中的增量应变 $\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}$ 表达其中的增量塑性应变 $\mathrm{d}\,\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}$ 和增量应力 $\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$ 的公式。张量$\boldsymbol{M}^{\mathrm{ep}} = \boldsymbol{M} - \frac{1}{h_1}\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}$称之为材料的弹塑性模量张量。

7.5 Drucker 公设的进一步讨论和塑性本构关系的改进形式

7.5.1 问题的提出

塑性本构关系的探求一直是固体力学的重要研究课题之一。人们希望所得到

的本构关系既在理论上有坚实的基础和广泛的适用性，又在实际应用上有其方便性。在7.3节和7.4节中，我们先后以Drucker公设和Ильюшин公设为基础，得到了时率无关材料的塑性本构关系。

从Drucker公设出发讨论塑性本构关系的优点是：它所依据的是人们通常由实验所得到的并在理论上惯于采用的应力空间中的加载函数。其缺点是：Drucker公设所涵盖的材料必然是稳定材料，因而不能处理非稳定的软化材料（对软化材料，当应力初态在屈服面上时，应力循环甚至无法实现），同时正如在7.3节中所指出的，对理想塑性材料而言，它所给出的由增量应力所确定的塑性流动因子 $d\lambda$ 将是$\frac{0}{0}$型的，因而是无法确定的。此外，它所得到的以增量应力表达增量应变的本构关系，对动态数值方法来说，应用起来并不方便，这是因为一切动态的有限元或有限差分程序，总是基于以下的计算流程运行的：先由一个时刻 t 的应力场和运动方程求出加速度和 $t+\Delta t$ 时刻的速度场；再由连续方程求出 Δt 期间的增量应变；继之由增量形式的本构方程求出 Δt 期间的增量应力，从而得到 $t+\Delta t$ 时刻的新应力场；最后根据稳定性条件求出保证计算稳定进行的时间增量 Δt；然后重复前面的步骤把问题向前推进。由此可见，对动态计算的应用更为方便的，不是给出由增量应力 $d\boldsymbol{\sigma}$ 表达增量应变 $d\boldsymbol{\varepsilon}$ 的本构关系，而是给出由增量应变 $d\boldsymbol{\varepsilon}$ 表达增量应力 $d\boldsymbol{\sigma}$ 的增量本构关系。

从Ильюшин公设出发讨论塑性本构关系的优点是：它能够同时处理稳定材料和非稳定材料，而且所得到的以增量应变表达增量应力的本构关系，对动态数值方法来说，应用起来是较为方便的。但其缺点是，它所应用的是应变空间中的屈服面，而通常由实验所得到的以及在实践上所应用的加载函数都是在应力空间中表述的，将之转化为应变空间中的加载函数实际上是非常麻烦的。

国内外的很多学者（如Palmer等人）在深入研究以上两个公设的过程中注意到，虽然严格满足Drucker公设的材料必然是稳定材料，但是在7.3节中人们导出正交法则(7.3.9)式时所依据的最大塑性功原理(7.3.7)式其实是并不需要完全满足Drucker公设的，这是因为我们只需要求应力循环的起始状态是在屈服面之内的弹性状态即可得出最大塑性功原理(7.3.7)式从而也便可得出外凸法则和正交法则(7.3.9)式。基于此点认识，显然我们只需要对原Drucker公设的提法略加放松而进行修正，便可使之同时可处理稳定的和非稳定的材料，而正交法则(7.3.9)式的成立也仍然是不受影响的。如果我们能够再进行一些巧妙的数学处理，将由增量应力计算塑性流动因子 $d\lambda$ 的工作转化为由增量应变对之进行计算，就有可能克服理想材料 $d\lambda$ 为$\frac{0}{0}$型的困难。这样，我们也就实现了以应力空间中的加载函数

为基础，直接得到以增量应变表达增量应力的塑性本构关系的目标，而这对实际应用，特别是对动态数值方法中的应用是非常方便的。现在我们就来按此思路进行讨论。

7.5.2 修正的 Drucker 公设和由增量应变表达增量应力的塑性本构关系

如 7.3 节所述，应力空间中的材料后继屈服面即加载面可以表达为

$$f(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}},K)=0 \tag{7.5.1}$$

其中 $\boldsymbol{\sigma}$ 是应力张量，$\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}$ 是塑性应变张量，K 为各向同性硬化内变量参数，K 的演化方程为

$$\dot{K}=g(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}),\quad g(\alpha\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}})=\alpha g(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}) \tag{7.5.2}$$

即 $g(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}})$为$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}$ 的一次齐次函数。在 7.3 节中我们曾经得到在一个应力循环中附加应力 $\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{\sigma}^0$ 的功 W_σ 可表达为

$$\begin{aligned}W_\sigma&=0+(\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{\sigma}^0):\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}\Big|_{t=t*}\delta t+\frac{1}{2}\left[\dot{\boldsymbol{\sigma}}:\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}+(\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{\sigma}^0):\ddot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}\right]\Big|_{t=t*}\delta t^2+\cdots\\&=(\boldsymbol{\sigma}^*-\boldsymbol{\sigma}^0):\mathrm{d}\,\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}+\frac{1}{2}\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}:\mathrm{d}\,\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}+\cdots\geqslant 0\end{aligned} \tag{7.5.3}$$

如 7.3 节中所述，经典的 Drucker 公设对材料有着较严苛的要求，它要求对处于任一应力状态$\boldsymbol{\sigma}^0$ 的材料元及任一产生塑性变形过程的应力循环，(7.5.3)式都要成立，对于处于应力加载面之内的$\boldsymbol{\sigma}^0$ 我们即得到外凸法则和正交法则(当然由极限观点出发也可推知对处于屈服面之上的$\boldsymbol{\sigma}^0$ 外凸法则和正交法则也是成立的)，而对处于应力加载面之上的 $\boldsymbol{\sigma}^0$ 我们即得到了表明材料稳定的性质，即 7.3 节中式(7.3.8)′。所以前述的 Drucker 公设只适用于稳定材料而不适用于随着塑性变形发展应力加载面缩小即软化的非稳定材料。

如前所述，虽然严格满足 Drucker 公设的材料必然是稳定材料，但在 7.3 节中我们导出正交法则(7.3.9)式时所依据的最大塑性功原理(7.3.7)式其实是并不需要完全满足 Drucker 公设的。事实上，如果我们只要求应力循环的起始状态是在屈服面之内的弹性状态，则我们仍可得出最大塑性功原理(7.3.7)式从而也便可得出外凸法则和正交法则(7.3.9)式，而不管材料是否稳定，所以以应力空间中的加载函数为基础，我们仍然是能够给出各类材料(包括非稳定材料)的增量型塑性本构关系的。把以上的想法更加系统化和明确化，我们即可提出对 Drucker 公设的如下新表述：

修正的 Drucker 公设 对处于任意弹性应力状态$\boldsymbol{\sigma}^0$ 的材料元，施加外部作用

使其产生足够小的塑性变形，然后卸除其附加应力而完成一个应力循环，则在这一应力循环中附加应力 $\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{\sigma}^0$ 所做的功必须是非负的。

今后将把对 Drucker 公设的这一新表述称为修正的 Drucker 公设，而称具有此类性质的材料为广义的 Drucker 材料。

对 Drucker 公设这一修正表述的意义在于：由于这里我们要求起始应力状态 $\boldsymbol{\sigma}^0$ 是在屈服面之内的任意弹性应力状态，所以不管 $\boldsymbol{\sigma}^0$ 离屈服面多么近，只要应力循环中所产生的塑性变形过程足够小，则(7.5.3)式中的第二项总是比第一项更为高阶的小量，应力循环中附加应力所做的功 W_σ 便总是由其第一项来表达的，因此，由修正的 Drucker 公设总可导出如下的最大塑性功原理：

$$(\boldsymbol{\sigma}^* - \boldsymbol{\sigma}^0) : \mathrm{d}\,\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}} \geqslant 0 \tag{7.5.4}$$

这样，我们便可以和 7.3 节中一样而得出应力加载面外凸的性质和正交法则，而不管材料是否稳定。

当我们规定一类应力循环并要求材料在循环中满足某些性质时，应力循环所包含的“元素”越多，则对材料的要求便越苛刻，具有这些性质的材料范围便更小。这里，由于我们按新的表述增加了对 Drucker 公设中材料元初态和应力循环形式的限制，自然地就减少了应力循环所包含的“元素”，从而放松了对材料性质的限制，因而我们并不能由(7.5.3)式中 W_σ 第二项的非负而导出

$$\frac{1}{2}\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} : \mathrm{d}\,\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}} \geqslant 0 \tag{7.5.5}$$

即表明材料稳定的条件(7.5.5)式并不构成所述材料的必要条件。所以，广义的 Drucker 材料同时包括稳定和非稳定的材料。与 7.3 节中一样，正交法则仍可写为

$$\mathrm{d}\,\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}} = \mathrm{d}\lambda \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (\mathrm{d}\lambda > 0) \tag{7.5.6}$$

现在，我们就直接利用应力加载面(7.5.1)式和正交法则(7.5.6)式来对广义的 Drucker 材料导出其由增量应变 $\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}$ 表达增量应力 $\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$ 的塑性本构关系，这需要一些特殊的数学技巧。

当塑性变形发展时，应力点仍应保持在应力加载面(7.5.1)式之上，因此不管 $\mathrm{d}\,\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}$ 如何发展，下面的一致性条件成立：

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} + \frac{\partial f}{\partial\, \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}} : \mathrm{d}\,\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}} + \frac{\partial f}{\partial K}\dot{K} = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} + \frac{\partial f}{\partial\, \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}} : \mathrm{d}\,\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}} + \frac{\partial f}{\partial K} g(\mathrm{d}\,\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}) = 0 \tag{7.5.7}$$

将正交法则(7.5.6)式代入一致性条件(7.5.7)式并注意函数 g 的一次齐次性质

(7.5.2)式，可得

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} = h \mathrm{d}\lambda \tag{7.5.8}$$

其中

$$h = -\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}} : \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} - \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{K}} g\left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right) \tag{7.5.9}$$

到现在为止，我们的一切推导都是和 7.3 节中的推导完全一样的，而且式(7.5.8)永远都是成立的，而不管材料是硬化、理想塑性还是软化。但是，在 7.3 节中我们是直接由(7.5.8)式求出了由 $\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$ 所表达的塑性流动因子 $\mathrm{d}\lambda$，所以才导致了理想塑性材料 $\mathrm{d}\lambda$ 为$\frac{0}{0}$型而无法确定的困难。为了避免对理想塑性和软化材料求 $\mathrm{d}\lambda$ 时的不确定性，我们不直接由 $\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$ 和(7.5.8)式来确定 $\mathrm{d}\lambda$，而采用如下的方法。考虑弹性应变$\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{e}}$ 的发展和应力 $\boldsymbol{\sigma}$ 的发展之间的如下关系：

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{M} : \mathrm{d}\,\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{e}} = \boldsymbol{M} : (\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon} - \mathrm{d}\,\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}) = \boldsymbol{M} : \left(\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon} - \mathrm{d}\lambda \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right) \tag{7.5.10}$$

其中 $\boldsymbol{M}$ 是材料的弹性张量，它是一个完全对称的四阶张量。将(7.5.10)式两边同时与$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$进行二次点积，得

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \left[\boldsymbol{M} : \left(\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon} - \mathrm{d}\lambda \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right)\right] \tag{7.5.11}$$

将(7.5.11)式代入(7.5.8)式之左端，并解出 $\mathrm{d}\lambda$，有

$$\mathrm{d}\lambda = \frac{1}{h_2} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \boldsymbol{M} : \mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon} \tag{7.5.12}$$

其中

$$h_2 = h + \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \boldsymbol{M} : \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \tag{7.5.13}$$

式(7.5.12)给出了由微过程的增量应变 $\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}$(而不是 $\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$)表达 $\mathrm{d}\lambda$ 的公式，将之代人正交法则(7.5.6)式，即可得出由增量应变 $\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}$(而不是 $\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$)表达增量塑性应变 $\mathrm{d}\,\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}$ 的公式，即

$$\mathrm{d}\,\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}} = \mathrm{d}\lambda \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \frac{1}{h_2}\left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \boldsymbol{M} : \mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}\right) \tag{7.5.14}$$

将(7.5.14)式代入(7.5.10)式，可得

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{M} : \left[\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon} - \frac{1}{h_2} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \boldsymbol{M} : \mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}\right)\right] = \left[\boldsymbol{M} - \frac{1}{h_2}\left(\boldsymbol{M} : \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \boldsymbol{M}\right)\right] : \mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon} \tag{7.5.15}$$

利用 $\boldsymbol{M}$ 的完全对称性和$\boldsymbol{\sigma}$ 的对称性，则有 $\boldsymbol{M}:\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}=\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}:\boldsymbol{M}$，可见(7.5.15)式的第二项正比于二阶张量$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}:\boldsymbol{M}$ 自并乘所得到的四阶张量$\left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}:\boldsymbol{M}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}:\boldsymbol{M}\right)$。张量$\boldsymbol{M}^{\mathrm{ep}}=\boldsymbol{M}-\frac{1}{h_2}\left(\boldsymbol{M}:\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}:\boldsymbol{M}\right)$就是材料的弹塑性模量张量。

式(7.5.14)即是由任一微过程中的增量应变 $\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}$ 确定塑性增量应变 $\mathrm{d}\,\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}$ 的公式，而式(7.5.15)则是由任一微过程中的增量应变 $\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}$ 确定其增量应力 $\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$ 的公式。式(7.5.15)的物理意义是非常清楚的：对于任何一个产生增量应变 $\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}$ 的微过程，我们可以先将其看成是纯弹性变载过程，计算出相应的尝试增量应力 $\boldsymbol{M}:\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}$，如果这一微过程并非纯弹性过程而包含着塑性变形的话，则所得尝试应力点 $\boldsymbol{\sigma}+\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$ 必然超出合理的应力加载面之外，于是就应扣除由塑性变形 $\mathrm{d}\,\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}$ 所引起的附加应力，这就是(7.5.15)式中第二项的意义；而当这一微变形过程确实没有塑性变形发生时，则应该令(7.5.15)式的第二项为零。下面，我们写出判别是否有塑性加载出现的数学公式，以便于在动态数值计算中应用。

假设前一时刻的状态$(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}},\boldsymbol{K})$位于屈服面 $f=0$ 之上，而且对任一微变形过程在得到其增量应变 $\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}$ 之后，如果由此 $\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}$ 按式(7.5.12)所算出的 $\mathrm{d}\lambda>0$，则说明该过程有塑性变形发生，可由式(7.5.14)算出其塑性增量应变 $\mathrm{d}\,\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}$ 并按式(7.5.15)计算出微过程中的相应增量应力 $\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$；如果虽然 $f=0$，但是由此 $\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}$ 按式(7.5.12)所算出的 $\mathrm{d}\lambda\leqslant 0$，则说明此微过程为弹性卸载或中性变载过程，则应令(7.5.15)式中的第二项为零；如果前一时刻的状态$(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}},\boldsymbol{K})$位于屈服面之内，即 $f<0$，则微过程必为弹性变载过程，也应令(7.5.15)式中的第二项为零。所以我们可以将(7.5.15)式写为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}=\left[\boldsymbol{M}-H(f,\mathrm{d}\lambda)\left(\boldsymbol{M}:\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}:\boldsymbol{M}\right)/h_2\right]:\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon} \tag{7.5.16}$$

其中函数 $H(f,\mathrm{d}\lambda)$为

$$H(f,\mathrm{d}\lambda)=\begin{cases}1, & \text{当 } f=0,\mathrm{d}\lambda>0 \quad \text{(塑性加载)}\\ 0, & \text{当 } f=0,\mathrm{d}\lambda\leqslant 0 \quad \text{(弹性卸载或中性变载)}\\ 0, & \text{当 } f<0 \quad \text{(弹性变载)}\end{cases} \tag{7.5.17}$$

式(7.5.17)事实上就是广义 Drucker 材料的加卸载判别准则，其中的塑性加载条件是 $f=0$ 且 $\mathrm{d}\lambda>0$，这一条件是由一个微过程的增量应变 $\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}$ 来表达的，同样适用于稳定和非稳定的材料，比通常人们由 Drucker 公设所得出的，由微过程增量应力 $\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$ 判别塑性加载的条件，更为合理，更具普遍意义。此外，我们指出：由塑性变形发展时 $\mathrm{d}\lambda>0$ 的条件以及式(7.5.8)，可以发现，对硬化材料、理想塑性材料和

软化材料，分别有 $h>0$、$h=0$ 和 $h<0$。

7.5.3 所得到的增量塑性本构关系(7.5.15)式的优点

我们在前面给出了增量型的塑性本构关系和计算流程，它的主要优点可概括如下：

(1) 它是以略加修正的 Drucker 公设为基础，并以应力空间中的加载函数为基础来进行表述和运算的，这比以 Ильюшин 公设为基础的应变空间中的加载函数应用起来要更为方便。

(2) 与经典的 Drucker 公设所建立的本构关系只适用于硬化材料不同，我们在本节所建立的增量型塑性本构关系同时适用于硬化、理想塑性和软化的各类材料。

(3) 我们在本节所建立的本构关系是以微过程中的增量应变 $\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}$ 计算其增量应力 $\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$ 的显式方程，非常适合各类冲击动力学问题的应用并便于将之嵌入相应的数值软件之中。

(4) 我们所给出的得到增量型塑性本构关系的思路很容易略加修改，而将之推广到含损伤材料和计及热效应时材料本构关系的研究之中。

7.5.4 与应变空间表述的塑性本构关系之间的关系

以 $\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}$ 和 K 为内变量时，应变空间中的加载面可表达为

$$F(\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}},K)=0 \tag{7.5.18}$$

由于

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{e}}+\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}=\boldsymbol{C}:\boldsymbol{\sigma}+\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}},\quad \boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{M}:\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{e}}=\boldsymbol{M}:(\boldsymbol{\varepsilon}-\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}) \tag{7.5.19}$$

所以加载函数 f 和 F 之间有如下关系：

$$F(\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}},K)=f(\boldsymbol{M}:(\boldsymbol{\varepsilon}-\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}),\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}},K),\quad f(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}},K)=F(\boldsymbol{C}:\boldsymbol{\sigma}+\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}},\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}},K) \tag{7.5.20}$$

故

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}=\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}:\boldsymbol{M},\quad \dfrac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}}=\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}}-\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}:\boldsymbol{M},\quad \dfrac{\partial F}{\partial K}=\dfrac{\partial f}{\partial K}\\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}=\dfrac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}:\boldsymbol{C},\quad \dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}}=\dfrac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}}+\dfrac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}},\quad \dfrac{\partial f}{\partial K}=\dfrac{\partial F}{\partial K}\end{cases} \tag{7.5.21}$$

利用(7.5.21)式，容易证明：

$$h_2=h+\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}:\boldsymbol{M}:\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}=-\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}}:\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}-\frac{\partial f}{\partial K}g\left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right)+\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}:\boldsymbol{M}:\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$$

$$= -\left[\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^{p}} + \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}\right] : \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} : \boldsymbol{C} - \frac{\partial F}{\partial K} g\left(\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} : \boldsymbol{C}\right) + \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} : \boldsymbol{C} : \boldsymbol{M} : \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} : \boldsymbol{C}$$

$$= -\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^{p}} : \boldsymbol{C} : \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} - \frac{\partial F}{\partial K} g\left(\boldsymbol{C} : \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}\right) \quad \text{（恰等于 7.4 节中的 } h_1\text{）} \tag{7.5.22}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \boldsymbol{M} : \mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} : \mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon} \tag{7.5.23}$$

$$\boldsymbol{M} : \left[\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \boldsymbol{M} : \mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}\right]\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \left(\boldsymbol{M} : \frac{\partial f}{\partial \sigma}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \boldsymbol{M}\right) : \mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \boldsymbol{M}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \boldsymbol{M}\right) : \mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon} = \left(\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}\right) : \mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon} \tag{7.5.24}$$

这里利用了 $\boldsymbol{C}$ 和 $\boldsymbol{M}$ 的完全对称性以及 $\boldsymbol{\sigma}$ 和 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 的对称性。于是(7.5.12)式、(7.5.14)式和(7.5.15)式可分别写为

$$\mathrm{d}\lambda = \frac{1}{h_2}\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} : \mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon} \tag{7.5.25}$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}^{p} = \mathrm{d}\lambda \boldsymbol{C} : \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{h_2}\boldsymbol{C} : \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} : \mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon} \tag{7.4.26}$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} = \left[\boldsymbol{M} - \frac{1}{h_2}\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}\right] : \mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon} \tag{7.5.27}$$

其中 h_2 可按(7.5.22)式由应变加载面而求出，它与我们在 7.4 节中所引入的参数 h_1 是完全相同的，所以式(7.5.25)、式(7.4.26)和式(7.5.27)也就是 7.4 节中的式(7.4.18)、式(7.4.20)和式(7.4.21)，它们通常是以 Ильюшин 公设为基础，从应变空间中的加载面出发所导出的弹塑性本构关系。而我们在 7.5.2 节中不依赖于 Ильюшин 公设，而由修正的 Drucker 公设为基础，直接由应力空间中的加载函数得出了普适的本构关系，这当然是更为方便的。

7.6 弹塑性耦合材料的塑性本构关系

7.6.1 弹塑性耦合性质的含义

在前面几节中我们只处理了不具有弹塑性耦合性质的材料，即材料的弹性变形特性不受其塑性变形发展影响的材料，简言之即其弹性模量张量与内变量无关的材料。如果材料的弹性模量张量受其塑性变形发展的影响因而是其内变量的函

数时，则此种材料便称之为弹塑性耦合材料。对弹塑性耦合材料而言，其中最值得注意的一个问题就是：材料的弹性应变和可逆应变是不相同的两个量，材料的塑性应变和不可逆应变也是不相同的两个量。材料处于某一应力应变和内变量状态$(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\varepsilon},\xi_\alpha)$的弹性应变$\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{e}}$是指将此应力$\boldsymbol{\sigma}$完全卸除至零应力时材料所恢复了的应变部分，而其尚未恢复的残余应变$\boldsymbol{\varepsilon}-\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{e}}=\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}$即是对应此状态$(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\varepsilon},\xi_\alpha)$的塑性应变。如果不考虑材料的非线性弹性效应，而只考虑材料的弹塑性耦合效应，则其弹性模量张量$\boldsymbol{M}$和其柔度张量$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{M}^{-1}$将不依赖于应力状态$\boldsymbol{\sigma}$而只是其内变量$\xi_\alpha$的函数：

$$\boldsymbol{M}=\boldsymbol{M}(\xi_\alpha),\quad \boldsymbol{C}=\boldsymbol{C}(\xi_\alpha) \tag{7.6.1}$$

于是对应状态$(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\varepsilon},\xi_\alpha)$的弹性应变张量$\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{e}}$将由下式定义：

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{e}}=\boldsymbol{C}(\xi_\alpha):\boldsymbol{\sigma},\quad \boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{M}(\xi_\alpha):\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{e}} \tag{7.6.2}$$

而其塑性应变张量$\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}$则为

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}=\boldsymbol{\varepsilon}-\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{e}}=\boldsymbol{\varepsilon}-\boldsymbol{C}(\xi_\alpha):\boldsymbol{\sigma} \tag{7.6.3}$$

在每一微过程$\mathrm{d}t$当中所产生的增量弹性应变张量$\mathrm{d}\,\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{e}}$和增量塑性应变张量$\mathrm{d}\,\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}$将分别为

$$\mathrm{d}\,\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{e}}=\boldsymbol{C}(\xi_\alpha):\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}+\mathrm{d}\boldsymbol{C}(\xi_\alpha):\boldsymbol{\sigma} \tag{7.6.4}$$

$$\mathrm{d}\,\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}=\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}-\mathrm{d}\,\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{e}}=\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}-\boldsymbol{C}(\xi_\alpha):\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}-\mathrm{d}\boldsymbol{C}(\xi_\alpha):\boldsymbol{\sigma} \tag{7.6.5}$$

同时，每一微过程当中所产生的增量应变$\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}$既可视为其弹性增量应变$\mathrm{d}\,\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{e}}$和塑性增量应变$\mathrm{d}\,\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}$之和，也可视作其可逆增量应变$\mathrm{d}\,\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{R}}$和不可逆增量应变$\mathrm{d}\,\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{I}}$之和，即

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}=\mathrm{d}\,\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{e}}+\mathrm{d}\,\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}=\mathrm{d}\,\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{R}}+\mathrm{d}\,\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{I}} \tag{7.6.6}$$

微过程中对应增量应力$\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$所产生的可逆增量应变$\mathrm{d}\,\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{R}}$是指当把此增量应力$\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$完全卸除之后材料所恢复的应变，故有

$$\mathrm{d}\,\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{R}}=\boldsymbol{C}(\xi_\alpha):\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma},\quad \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{M}(\xi_\alpha):\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{R}} \tag{7.6.7}$$

而此微过程中尚未恢复的应变部分则称之为不可逆增量应变$\mathrm{d}\,\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{I}}$，故有

$$\mathrm{d}\,\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{I}}=\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}-\mathrm{d}\,\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{R}}=\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}-\boldsymbol{C}(\xi_\alpha):\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} \tag{7.6.8}$$

通过对比(7.6.4)式和(7.6.7)式以及对比(7.6.5)式和(7.6.8)式，显然可有

$$\mathrm{d}\,\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{e}}=\mathrm{d}\,\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{R}}+\mathrm{d}\boldsymbol{C}(\xi_\alpha):\boldsymbol{\sigma},\quad \mathrm{d}\,\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}=\mathrm{d}\,\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{I}}-\mathrm{d}\boldsymbol{C}(\xi_\alpha):\boldsymbol{\sigma} \tag{7.6.9}$$

式(7.6.9)说明：弹塑性耦合材料中的弹性增量应变$\mathrm{d}\,\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{e}}$等于可逆增量应变$\mathrm{d}\,\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{R}}$与附加增量应变$\mathrm{d}\boldsymbol{C}(\xi_\alpha):\boldsymbol{\sigma}\equiv\mathrm{d}\,\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{c}}$之和，而其塑性增量应变$\mathrm{d}\,\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}$则等于不可逆增量应变$\mathrm{d}\,\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{I}}$与附加增量应变$\mathrm{d}\boldsymbol{C}(\xi_\alpha):\boldsymbol{\sigma}\equiv\mathrm{d}\,\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{c}}$之差。我们将此一附加增量应变

$$\mathrm{d}\boldsymbol{C}(\xi_\alpha):\boldsymbol{\sigma}\equiv\mathrm{d}\,\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{c}} \tag{7.6.10}$$

称之为耦合增量应变(coupling incremental strain)。图7.9中给出了一维应力状态下塑性屈服状态点1和2所具有的弹性应变 ε_1^e、ε_2^e 以及所具有的塑性应变 ε_1^p、ε_2^p,同时还标出了在从点1到点2的塑性加载微过程中增量应力 $d\sigma$ 所引起的总增量应变 $d\varepsilon$、弹性增量应变 $d\varepsilon^e$、塑性增量应变 $d\varepsilon^p$、可逆增量应变 $d\varepsilon^R$、不可逆增量应变 $d\varepsilon^I$ 以及耦合增量应变 $d\varepsilon^c$。图中从1点设想的弹性卸载线 $11'$ 和从2点设想的弹性卸载线 $22'$ 分别是以1点和2点处的弹性模量而卸载的,同时为了几何上易于理解起见,在图中还画出了与弹性卸载线 $11'$ 平行的虚线 $2'4$。

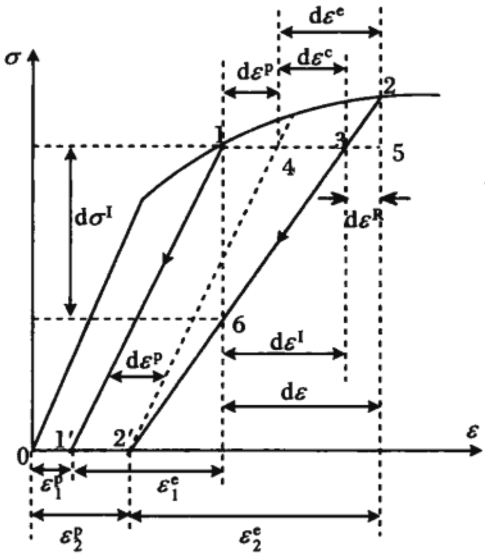


图7.9 耦合增量应变 $d\varepsilon^c$ 及各增量应变的图示

当我们由点2进行卸载而卸去由点1到点2所产生的应力增量 $d\sigma$ 而达至点3时,材料的可逆增量应变 $d\varepsilon^R$ 即被全部卸除,但材料还有残存的不可逆增量应变 $d\varepsilon^I$。如果我们继续以2点的弹性模量进行卸载而卸除此不可逆增量应变 $d\varepsilon^I$ 使材料回到1点原有的应变状态而达至点6,则材料中将产生残余的增量应力($-Ed\varepsilon^I$),为了简洁起见,我们将把

$$d\sigma^I = Ed\varepsilon^I \tag{7.6.11$'$}$$

称为不可逆增量应力,它恰恰等于与1点具有同样应变的6点处的残余增量应力($-Ed\varepsilon^I$)的负值。将之推广到一般情况,不可逆增量应力 $d\boldsymbol{\sigma}^I$ 将由下式定义:

$$d\boldsymbol{\sigma}^I = \boldsymbol{M} : d\boldsymbol{\varepsilon}^I \tag{7.6.11a}$$

于是,有

$$d\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{M} : d\boldsymbol{\varepsilon}^R = \boldsymbol{M} : (d\boldsymbol{\varepsilon} - d\boldsymbol{\varepsilon}^I) = \boldsymbol{M} : d\boldsymbol{\varepsilon} - d\boldsymbol{\sigma}^I = d\boldsymbol{\sigma}^R - d\boldsymbol{\sigma}^I \tag{7.6.11b}$$

其中

$$d\boldsymbol{\sigma}^R = \boldsymbol{M} : d\boldsymbol{\varepsilon} \tag{7.6.11c}$$

称为微过程中的可逆增量应力。式(7.6.11b)的含义是:一个微过程中的增量应力 $d\boldsymbol{\sigma}$ 等于可逆增量应力 $d\boldsymbol{\sigma}^R$ 与不可逆增量应力 $d\boldsymbol{\sigma}^I$ 之差。需要指出的是:上述不可逆增量应力的定义(7.6.11a)式是在塑性力学中人们所惯常采用的,如果从不可逆过程热力学的观念出发的话,则应该定义上述不可逆增量应力的负值($-d\boldsymbol{\sigma}^I$)为所

谓的"不可逆增量应力",这样式(7.6.11b)则表示一个微过程中的增量应力 $\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$ 等于可逆增量应力 $\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}^{R}$ 与"不可逆增量应力"$(-\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}^{I})$之和,便与一个微过程中的增量应变 $\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}$ 等于可逆增量应变 $\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}^{R}$ 与不可逆增量应变 $\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}^{I}$ 之和的式(7.6.6)完全相对应了。

7.6.2 应变空间中所表达的弹塑性耦合材料的塑性本构关系

中国的殷有泉和曲圣年等人曾在 1982 年最早研究了弹塑性耦合材料的塑性本构关系,他们首先通过关系:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{M} : \boldsymbol{\varepsilon}^{e} = \boldsymbol{M} : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^{p})$$

将应力空间中的屈服面化为在应变空间中的屈服面:

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}^{p}, \xi_{\alpha}) = f(\boldsymbol{M} : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^{p}), \boldsymbol{\varepsilon}^{p}, \xi_{\alpha}) \equiv F(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^{p}, \xi_{\alpha}) = 0$$

即应变空间中的加载面为

$$F(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^{p}, \xi_{\alpha}) = 0 \tag{7.6.12}$$

在这里除了引入若干可刻画材料各向同性硬化特征的内变量 ξ_{α} 之外,是以塑性应变$\boldsymbol{\varepsilon}^{p}$(而不是不可逆应变$\boldsymbol{\varepsilon}^{I}$)来作为对材料随动硬化特性的表征的,同时他们是把增量塑性应变 $\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}^{p}$ 和增量不可逆应变 $\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}^{I}$ 的求解一起作为塑性本构关系的核心内容来给以关注的。参见图 7.10,由于应力在一个应变循环中对材料所做的功等于梯形 0165 的面积和曲线三角形 126 的面积之和,所以容易证明在一维应力的情况下,当略去二阶以上的小量时,应力在一个应变循环中对材料所做的功可以写为

$$W_{\varepsilon} = (\varepsilon - \varepsilon_0)\mathrm{d}\sigma^{I} + \frac{1}{2}\mathrm{d}\varepsilon\mathrm{d}\sigma^{I} + \frac{1}{2}(\varepsilon - \varepsilon_0)\mathrm{d}E(\varepsilon - \varepsilon_0) \tag*{(7.6.13)$'$}$$

将之推广到复杂应力状态,可有

$$W_{\varepsilon} = (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_0) : \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}^{I} + \frac{1}{2}\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon} : \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}^{I} + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_0) : \mathrm{d}\boldsymbol{M} : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_0) \tag{7.6.13}$$

由于第二项是比第一项和第三项更高阶的小量,所以在一个应变循环中应力功非负的 Ильюшин 公设可以表达为

$$W_{\varepsilon} = (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_0) : \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}^{I} + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_0) : \mathrm{d}\boldsymbol{M} : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_0) \geqslant 0 \tag{7.6.14}$$

当

$$\mathrm{d}\boldsymbol{M} = \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial \xi_{\alpha}}\mathrm{d}\xi_{\alpha}$$

为半负定张量时,(7.6.14)式的第二项永远非正,我们必然可以由 Ильюшин 公设(7.6.14)式而得出下式:

$$W_\varepsilon = (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_0) : \mathrm{d}\,\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{I}} \geqslant 0 \tag{7.6.15}$$

于是，我们便可对此类弹塑性耦合材料也得出应变屈服面的外凸法则和正交法则。在这里，正交法则表现为：在每一微过程中由式(7.6.11)所表达的不可逆增量应力 $\mathrm{d}\,\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{I}}$ 必然沿着应变屈服面的外法线方向，即

$$\mathrm{d}\,\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{I}} = \mathrm{d}\lambda \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}, \quad \mathrm{d}\,\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{I}} = \mathrm{d}\lambda \boldsymbol{C} : \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \quad (\mathrm{d}\lambda > 0) \tag{7.6.16}$$

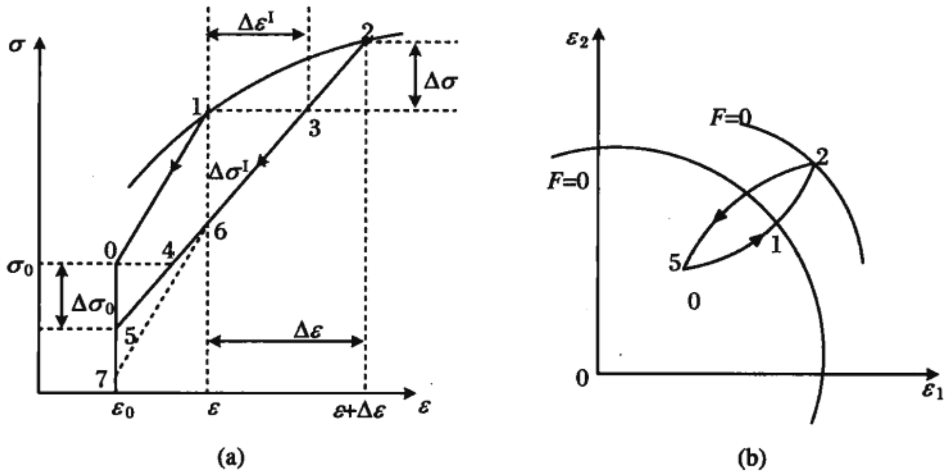


图 7.10　弹塑性耦合材料的应变循环

殷有泉等假设内变量的演化是塑性增量应变演化以及不可逆增量应变演化的线性齐次函数，即

$$\mathrm{d}\xi_\alpha = \boldsymbol{M}_\alpha^{\mathrm{p}} : \mathrm{d}\,\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}} + \boldsymbol{M}_\alpha^{\mathrm{I}} : \mathrm{d}\,\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{I}} \quad (\alpha = 1, \cdots, n) \tag{7.6.17}$$

其中 $\boldsymbol{M}_\alpha^{\mathrm{p}}$ 和 $\boldsymbol{M}_\alpha^{\mathrm{I}}$ 为二阶对称张量。式(7.6.17)即是内变量的演化方程，$\boldsymbol{M}_\alpha^{\mathrm{p}}$ 和 $\boldsymbol{M}_\alpha^{\mathrm{I}}$ 的不同选择即决定了内变量的不同定义。将式(7.6.17)代入式(7.6.9)之中，可有

$$\mathrm{d}\,\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}} = \mathrm{d}\,\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{I}} - \frac{\partial \boldsymbol{C}}{\partial \xi_\alpha}(\boldsymbol{M}_\alpha^{\mathrm{p}} : \mathrm{d}\,\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}} + \boldsymbol{M}_\alpha^{\mathrm{I}} : \mathrm{d}\,\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{I}}) : \boldsymbol{\sigma}$$

即

$$\left(\boldsymbol{I} + \frac{\partial \boldsymbol{C}}{\partial \xi_\alpha}\boldsymbol{M}_\alpha^{\mathrm{p}} : \boldsymbol{\sigma}\right) : \mathrm{d}\,\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}} = \left(\boldsymbol{I} - \frac{\partial \boldsymbol{C}}{\partial \xi_\alpha}\boldsymbol{M}_\alpha^{\mathrm{I}} : \boldsymbol{\sigma}\right) : \mathrm{d}\,\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{I}} \tag{7.6.18$'$}$$

或

$$\mathrm{d}\,\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}} = \boldsymbol{K} : \mathrm{d}\,\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{I}} \tag{7.6.18}$$

其中 $\boldsymbol{I}$ 为四阶单位张量，而由下式所定义的四阶张量 $\boldsymbol{K}$：

$$\boldsymbol{K} = \left(\boldsymbol{I} + \frac{\partial \boldsymbol{C}}{\partial \xi_\alpha}\boldsymbol{M}_\alpha^{\mathrm{p}} : \boldsymbol{\sigma}\right)^{-1} : \left(\boldsymbol{I} - \frac{\partial \boldsymbol{C}}{\partial \xi_\alpha}\boldsymbol{M}_\alpha^{\mathrm{I}} : \boldsymbol{\sigma}\right) \tag{7.6.19}$$

称为耦合张量，通过它即建立了塑性增量应变 $\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}$ 和不可逆增量应变 $\mathrm{d}\,\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{I}}$ 之间的关系。利用正交法则(7.6.16)式，可得

$$\mathrm{d}\,\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}} = \mathrm{d}\lambda \boldsymbol{K} : \boldsymbol{C} : \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \tag{7.6.20}$$

一致性法则给出：

$$\mathrm{d}F = \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} : \mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon} + \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}} : \mathrm{d}\,\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}} + \frac{\partial F}{\partial \xi_\alpha}\mathrm{d}\xi_\alpha = 0 \tag{7.6.21}$$

将内变量的演化方程(7.6.17)式代入(7.6.21)式之中，即得

$$\mathrm{d}F = \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} : \mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon} + \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}} : \mathrm{d}\,\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}} + \frac{\partial F}{\partial \xi_\alpha}(\boldsymbol{M}_\alpha^{\mathrm{p}} : \mathrm{d}\,\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}} + \boldsymbol{M}_\alpha^{\mathrm{I}} : \mathrm{d}\,\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{I}}) = 0 \tag{7.6.22$'$}$$

再将式(7.6.20)和正交法则(7.6.16)式代入(7.6.22)′式之中，即有

$$\mathrm{d}F = \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} : \mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon} + \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}} : \mathrm{d}\lambda\boldsymbol{K} : \boldsymbol{C} : \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{\partial F}{\partial \xi_\alpha}\left(\boldsymbol{M}_\alpha^{\mathrm{p}} : \mathrm{d}\lambda\boldsymbol{K} : \boldsymbol{C} : \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} + \boldsymbol{M}_\alpha^{\mathrm{I}} : \mathrm{d}\lambda\boldsymbol{C} : \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}\right) = 0 \tag{7.6.22}$$

由此可求得不可逆应力流动因子 $\mathrm{d}\lambda$ 为

$$\mathrm{d}\lambda = \frac{1}{A}\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} : \mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon} \tag{7.6.23}$$

其中

$$A = -\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}} : \boldsymbol{K} : \boldsymbol{C} : \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{\partial F}{\partial \xi_\alpha}(\boldsymbol{M}_\alpha^{\mathrm{p}} : \boldsymbol{K} : \boldsymbol{C} : \frac{\partial F}{\partial \varepsilon} + \boldsymbol{M}_\alpha^{\mathrm{I}} : \boldsymbol{C} : \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}) \tag{7.6.24}$$

由于

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{M} : \mathrm{d}\,\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{R}} = \boldsymbol{M} : (\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon} - \mathrm{d}\,\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{I}}) = \boldsymbol{M} : \left(\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon} - \mathrm{d}\lambda\boldsymbol{C} : \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}\right) = \boldsymbol{M} : \mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon} - \mathrm{d}\lambda\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \tag{7.6.25}$$

将(7.6.23)式代入(7.6.25)式之中，即得

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} = \left(\boldsymbol{M} - \frac{1}{A}\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}\right) : \mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon} \tag{7.6.26}$$

式(7.6.23)和式(7.6.26)即是在应变空间中所表达的弹塑性耦合材料的增量型本构关系，它们分别给出了由微过程中的增量应变 $\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}$ 表达不可逆应力流动因子 $\mathrm{d}\lambda$ 和增量应力 $\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$ 的公式。我们可看到问题的复杂性主要表现在耦合张量 $\boldsymbol{K}$ 的引入和计算上。

为了直观起见，我们对几种特殊情况来说明一下内变量演化方程(7.6.17)式所引入的内变量的含义：

(1) 当取$\boldsymbol{M}_{\alpha}^{\mathrm{p}}=\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{M}_{\alpha}^{\mathrm{I}}=\mathbf{0}$时，我们有

$$\mathrm{d}\xi_{\alpha}=\boldsymbol{\sigma}:\mathrm{d}\,\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}$$

此时$\mathrm{d}\xi_{\alpha}$代表微过程中应力$\boldsymbol{\sigma}$的塑性功增量，ξ_{α}即代表累积塑性功，此内变量可以反映由累积塑性功所表征的材料的各向同性硬化效应。

(2) 当取$\boldsymbol{M}_{\alpha}^{\mathrm{p}}=\mathbf{0}, \boldsymbol{M}_{\alpha}^{\mathrm{I}}=\boldsymbol{\sigma}$时，我们有

$$\mathrm{d}\xi_{\alpha}=\boldsymbol{\sigma}:\mathrm{d}\,\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{I}}$$

此时$\mathrm{d}\xi_{\alpha}$代表微过程中应力$\boldsymbol{\sigma}$的不可逆功增量，ξ_{α}即代表累积不可逆功，此内变量可以反映由累积不可逆功所表征的材料的各向同性硬化效应。

值得注意的是，式(7.6.17)的形式无法反映由累积等效塑性应变或累积等效不可逆应变所表征的材料的各向同性硬化效应，这是其局限性。

7.6.3 应力空间中所表达的弹塑性耦合材料的塑性本构关系

在上面我们给出了在应变空间中所表达的弹塑性耦合材料的塑性本构关系，虽然我们通过

$$\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{M}:\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{e}}=\boldsymbol{M}:(\boldsymbol{\varepsilon}-\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}})$$

可以将应力空间中的屈服面化为应变空间中的屈服面：

$$f(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}},\xi_{\alpha})=f(\boldsymbol{M}:(\boldsymbol{\varepsilon}-\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}),\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}},\xi_{\alpha})\equiv F(\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}},\xi_{\alpha})=0$$

但是由于对弹塑性耦合材料而言，塑性应变$\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}$和不可逆应变$\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{I}}$并不相等但也并不独立，而且它们的演化$\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}$和$\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{I}}$之间存在某种耦合关系，这就大大增加了问题的复杂性，其具体体现就是耦合张量$\boldsymbol{K}$的引入。为了避免以上所遇到的复杂性，我们特别指出如下的重要事实：增量型塑性本构关系的主要任务是给出一个微过程的增量应变$\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}$和其增量应力$\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$之间的对应关系，只要能做到这一点，我们就可以不必关注每一状态的弹性应变和塑性应变的具体计算(如前所述，它们需要由将这一状态的全部应力卸除来确定)，因此我们可以抛弃前面对塑性增量应变本身以及它和不可逆增量应变之间关系的细致关注，而直接把主要精力放在对每一微过程中可逆增量应变和不可逆增量应变的分析上，其核心就是把不可逆增量应变作为主要研究对象并把内变量的演化与不可逆增量应变的演化相关联，从而使我们可以能够跳过耦合张量，而直接建立弹塑性耦合材料的增量型本构关系。

由于不可逆应变本身也可以被视作内变量，所以当将不可逆应变也纳入内变量之中时，应力空间中最一般形式的加载面可写为

$$f(\boldsymbol{\sigma},\xi_{\alpha})=0 \tag{7.6.27}$$

其中$\boldsymbol{\sigma}$是应力张量，$\xi_{\alpha}(\alpha=1,\cdots,n)$是$n$个内变量，用它们的值来记忆弹塑性材料

不可逆变形的历史，当它们的值固定不变时表示可逆的弹性变载过程，当它们的值变化时表示有不可逆的增量应变(其中包括塑性增量应变)出现。任一微过程 $\mathrm{d}t$ 中介质的增量应变 $\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}$ 可视为可逆增量应变 $\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{R}}$ 和不可逆增量应变 $\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{I}}$ 之和，相应地微功 $\mathrm{d}W$ 也可分解为可逆微功 $\mathrm{d}W^{\mathrm{R}}$ 和不可逆微功 $\mathrm{d}W^{\mathrm{I}}$ 之和，即有

$$\begin{cases}\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon} = \mathrm{d}\,\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{R}} + \mathrm{d}\,\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{I}}, \quad \mathrm{d}W = \mathrm{d}W^{\mathrm{R}} + \mathrm{d}W^{\mathrm{I}} \\ \mathrm{d}W = \boldsymbol{\sigma} : \mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}, \quad \mathrm{d}W^{\mathrm{R}} = \boldsymbol{\sigma} : \mathrm{d}\,\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{R}}, \quad \mathrm{d}W^{\mathrm{I}} = \boldsymbol{\sigma} : \mathrm{d}\,\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{I}}\end{cases} \tag{7.6.28}$$

如式(7.6.7)所表述的，可逆增量应变 $\mathrm{d}\,\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{R}}$ 通过材料的柔度张量 $\boldsymbol{C}$ 或弹性模量张量 $\boldsymbol{M}$ 和增量应力 $\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$ 相联系：

$$\mathrm{d}\,\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{R}} = \boldsymbol{C}:\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}, \quad \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{M} : \mathrm{d}\,\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{R}}, \quad \boldsymbol{C} : \boldsymbol{M} = \boldsymbol{M} : \boldsymbol{C} = \boldsymbol{I} \tag{7.6.29}$$

$\boldsymbol{M}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 是两个互逆的完全对称的四阶张量，当考虑有非线性弹性行为的弹塑性耦合材料时，它们一般地依赖于应力和内变量所决定的材料状态，但这里我们将不考虑其非线性弹性行为，因而它们将不显式地依赖于应力而只是内变量 ξ_α 的函数：

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{C}(\xi_\alpha), \quad \boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}(\xi_\alpha) \tag{7.6.30}$$

内变量是一些反映不可逆过程中材料内部结构状态变化的量，因此它们的演化应和宏观的不可逆变形的演化相联系。在时率无关的弹塑性本构理论中，我们假设内变量的演化率是不可逆应变演化率的一次齐次函数，即

$$\dot{\xi}_\alpha = g_\alpha(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{I}}), \quad g_\alpha(a\boldsymbol{X}) = a g_\alpha(\boldsymbol{X}), \quad \mathrm{d}\xi_\alpha = g_\alpha(\mathrm{d}\,\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{I}}) \tag{7.6.31}$$

其中 $\boldsymbol{X}$ 为任意的二阶张量，a 为常数。需要说明的是：在一般情况下，函数 g_α 是可以依赖于应力 $\boldsymbol{\sigma}$ 和内变量 ξ_α 的，但在(7.6.31)式的写法中，我们未将 $\boldsymbol{\sigma}$ 和 ξ_α 明显写出以便突出其对 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{I}}$ 的一次齐次函数关系。显然，在式(7.6.31)中选取不同特定形式的一次齐次函数 g_α 则将对应不同含义的内变量 ξ_α，从而将使我们有可能考虑不同特点的材料塑性行为。例如某一 ξ_α 取为应力的不可逆功积累：

$$W^{\mathrm{I}} = \int \boldsymbol{\sigma} : \mathrm{d}\,\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{I}} = \int \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{I}} \mathrm{d}t$$

时，式(7.6.31)变为

$$\dot{\xi}_\alpha = g_\alpha \equiv \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{I}} \tag{a}$$

此 g_α 当然是 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{I}}$ 的一次齐次函数，这样即可反映材料的等向不可逆功硬化行为；当某 9 个 ξ_α 取为不可逆应变累积：

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{I}} = \int \mathrm{d}\,\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{I}} = \int \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{I}} \mathrm{d}t$$

时，式(7.6.31)变为

$$[\dot{\xi}_\alpha] = [g_\alpha] \equiv \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{I}} \tag{b}$$

这些 g_α 当然是$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{I}}$ 的一次齐次函数，这样即可由累积不可逆应变来反映材料的随动应变硬化行为；当某一 ξ_α 取为通常的等效不可逆应变之累积：

$$\varepsilon^{\mathrm{I}} = \int\sqrt{\frac{2}{3}\mathrm{d}\,\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{I}} : \mathrm{d}\,\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{I}}} = \int\sqrt{\frac{2}{3}\,\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{I}} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{I}}}\mathrm{d}t$$

时，式(7.6.31)变为

$$\dot{\xi}_\alpha = g_\alpha \equiv \sqrt{\frac{2}{3}\,\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{I}} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{I}}} \tag{c}$$

此时 g_α 也是$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{I}}$ 的一次齐次函数，这样即可由累积等效不可逆应变来反映材料的等向应变硬化行为。显然，(7.6.31)式比许多研究者所采用的$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{I}}$ 的狭隘线性函数形式 $\dot{\xi}_\alpha = \boldsymbol{M} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{I}}$ 更为普遍，因为后者包含不了(c)。

另外需要特别说明的是：尽管 $\mathrm{d}\,\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{I}}$ 等量不是全微分，$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{I}}$ 也不是$\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{I}}$ 的随体导数（而只是极限意义下的 $\mathrm{d}\,\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{I}}$ 与 $\mathrm{d}t$ 之比），但我们仍然在形式上以$\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{I}}$ 等来表示在一个过程中它们的累积量，即在形式上我们将以此种理解来看待如下各式：

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{I}} = \int_0^t \mathrm{d}\,\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{I}},\quad W = \int_0^t \mathrm{d}W = \int_0^t \boldsymbol{\sigma} : \mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon},\quad \xi_\alpha = \int_0^t \mathrm{d}\xi_\alpha,\quad \cdots$$

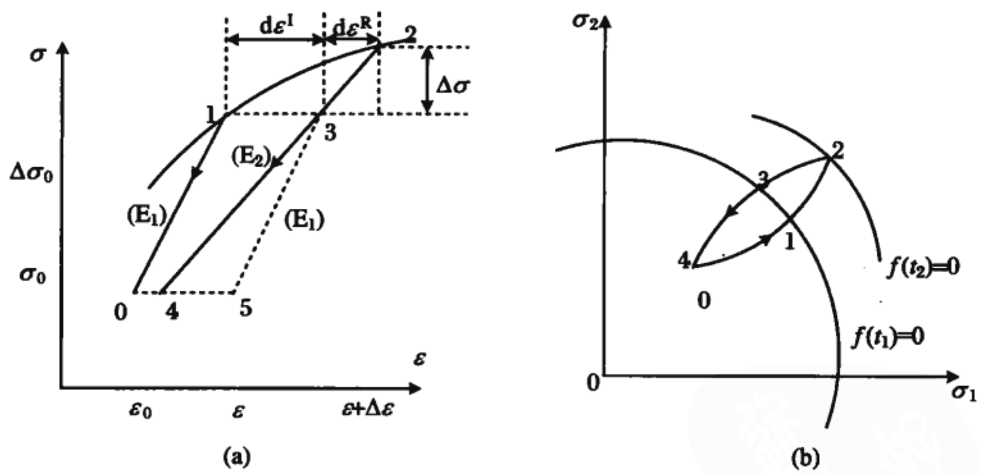


图 7.11 弹塑性耦合材料的应力循环

为了能够同时适用于稳定材料和非稳定材料，我们将假设材料满足 7.5 节中所述的修正的 Drucker 公设。图 7.11(a)和图 7.11(b)中分别给出了一维应力条件下和复杂应力状态下应力循环的示意图。由于附加应力 $\sigma - \sigma_0$ 在一个应力循环中所做的功等于梯形 0134 的面积加上曲线三角形 123 的面积，所以可以证明：在

略去二阶以上小量的情况下，在一维应力状态下附加应力 $\sigma-\sigma_0$ 在一个应力循环中所做的功可写为

$$W_\sigma = \int_0^{t_4}(\sigma-\sigma_0)\mathrm{d}\epsilon = (\sigma_1-\sigma_0)\,\mathrm{d}\epsilon^{\mathrm{I}} + \frac{1}{2}\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}\epsilon^{\mathrm{I}} - \frac{1}{2}(\sigma_1-\sigma_0)\mathrm{d}C(\sigma_1-\sigma_0) \tag{7.6.32$'$}$$

将之推广到复杂应力状态，则有

$$\begin{aligned} W_\sigma &= \int_0^{t_4}(\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{\sigma}_0):\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon} \\ &= (\boldsymbol{\sigma}_1-\boldsymbol{\sigma}_0):\mathrm{d}\,\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{I}} + \frac{1}{2}\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}:\mathrm{d}\,\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{I}} - \frac{1}{2}(\boldsymbol{\sigma}_1-\boldsymbol{\sigma}_0):\mathrm{d}\boldsymbol{C}:(\boldsymbol{\sigma}_1-\boldsymbol{\sigma}_0) \end{aligned} \tag{7.6.32}$$

对于修正的 Drucker 公设中的应力循环，第二项是比第一项和第三项高阶的二阶小量，故附加应力之功非负的修正 Drucker 公设可表达为

$$W_\sigma = (\boldsymbol{\sigma}_1-\boldsymbol{\sigma}_0):\mathrm{d}\,\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{I}} - \frac{1}{2}(\boldsymbol{\sigma}_1-\boldsymbol{\sigma}_0):\mathrm{d}\boldsymbol{C}:(\boldsymbol{\sigma}_1-\boldsymbol{\sigma}_0) \geqslant 0 \tag{7.6.33}$$

在

$$\mathrm{d}\boldsymbol{C} = \frac{\partial \boldsymbol{C}}{\partial \xi_\alpha}\mathrm{d}\xi_\alpha$$

为半正定张量的条件下，式(7.6.33)中的第二项永远非负，故由修正的 Drucker 公设(7.6.33)式必可推出由下式所表达的最大不可逆功原理：

$$(\boldsymbol{\sigma}_1-\boldsymbol{\sigma}_0):\mathrm{d}\,\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{I}} \geqslant 0 \tag{7.6.34}$$

由此又可推出应力屈服面的外凸性和由下式所表达的正交法则：

$$\mathrm{d}\,\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{I}} = \mathrm{d}\lambda\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (\mathrm{d}\lambda > 0) \tag{7.6.35}$$

即当不可逆变形发展($\mathrm{d}\lambda>0$)时不可逆增量应变 $\mathrm{d}\,\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{I}}$ 必然沿着应力屈服面的外法线方向。不可逆变形发展时应力点保持在应力加载面上的一致性条件为

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}:\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} + \frac{\partial f}{\partial \xi_\alpha}\mathrm{d}\xi_\alpha = 0 \tag{7.6.36}$$

将内变量的演化方程(7.6.31)式代入(7.6.36)式，再将正交法则(7.6.35)式代入所得方程之中并利用函数 g_α 的一次齐次性质，有

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}:\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} + \frac{\partial f}{\partial \xi_\alpha}g_\alpha(\mathrm{d}\,\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{I}}) = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}:\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} + \frac{\partial f}{\partial \xi_\alpha}g_\alpha\left(\mathrm{d}\lambda\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right) = \frac{\partial f}{\partial \sigma}:\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} + \mathrm{d}\lambda\frac{\partial f}{\partial \xi_\alpha}g_\alpha\left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right) = 0$$

即

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}:\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} = h\,\mathrm{d}\lambda \tag{7.6.37}$$

其中

$$h = -\frac{\partial f}{\partial \xi_\alpha} g_\alpha \left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right) \tag{7.6.38}$$

当然，由式(7.6.37)我们可以得出由 $d\boldsymbol{\sigma}$ 确定 $d\lambda$ 的公式

$$d\lambda = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : d\boldsymbol{\sigma}/h \tag{7.6.39}$$

但是正如7.5节中所指出的，对理想塑性材料或者非稳定材料即将软化的临界状态，因为

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : d\boldsymbol{\sigma} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial \xi_\alpha} = 0, \quad h = 0$$

故式(7.6.39)为$\frac{0}{0}$型而无法确定，所以式(7.6.39)不是普遍适用的公式。然而，式(7.6.37)确是普遍成立的公式，我们将以式(7.6.37)为出发点来导出本构关系。顺便指出，$h>0$、$h=0$、$h<0$ 分别对应硬化、理想塑性和软化材料。

考虑材料可逆增量应变与增量应力的关系并利用正交法则(7.6.35)式，有

$$d\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{M} : d\,\boldsymbol{\varepsilon}^{R} = \boldsymbol{M} : (d\boldsymbol{\varepsilon} - d\,\boldsymbol{\varepsilon}^{I}) = \boldsymbol{M} : \left(d\boldsymbol{\varepsilon} - d\lambda\,\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right) \tag{7.6.40}$$

将(7.6.40)式的两端与$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$进行二次点积，有

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : d\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \boldsymbol{M} : \left(d\boldsymbol{\varepsilon} - d\lambda\,\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right) \tag{7.6.41}$$

将(7.6.37)式代入(7.6.41)式的左端并对 $d\lambda$ 求解，可得

$$d\lambda = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \boldsymbol{M} : d\boldsymbol{\varepsilon}/h_2 \tag{7.6.42}$$

其中

$$h_2 = h + \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \boldsymbol{M} : \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \tag{7.6.43}$$

于是可得

$$d\,\boldsymbol{\varepsilon}^{I} = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \boldsymbol{M} : d\boldsymbol{\varepsilon}/h_2 \tag{7.6.44}$$

$$d\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{M} : d\,\boldsymbol{\varepsilon}^{R} = \boldsymbol{M} : (d\boldsymbol{\varepsilon} - d\,\boldsymbol{\varepsilon}^{I}) = \left[\boldsymbol{M} - \frac{1}{h_2}\boldsymbol{M} : \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \boldsymbol{M}\right] : d\boldsymbol{\varepsilon} \tag{7.6.45}$$

式(7.6.42)、式(7.6.44)和式(7.6.45)分别给出了以微过程中的增量应变 $d\boldsymbol{\varepsilon}$ 表达 $d\lambda$、$d\,\boldsymbol{\varepsilon}^{I}$ 和 $d\boldsymbol{\sigma}$ 的公式，这就是我们所得到的增量型本构关系。式(7.6.45)只

对塑性加载过程成立，即当微过程的初始状态$(\boldsymbol{\sigma},\xi_\alpha)$位于加载面$f(\boldsymbol{\sigma},\xi_\alpha)=0$之上，而且不可逆变形在发展即$\mathrm{d}\lambda>0$时才成立；当微过程的初始状态为弹性状态即$f(\boldsymbol{\sigma},\xi_\alpha)<0$，或者尽管起始状态为塑性状态$f(\boldsymbol{\sigma},\xi_\alpha)=0$，但不可逆变形没有发展（必有$\mathrm{d}\lambda\leqslant0$）时，微过程为弹性或中性变载过程，应令(7.6.45)式的第二项为零。因此增量型的弹塑性本构关系应该写为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}=\left[\boldsymbol{M}-H(f,\mathrm{d}\lambda)\left(\boldsymbol{M}:\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{\sigma}}\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{\sigma}}:\boldsymbol{M}\right)/h_2\right]:\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}\tag{7.6.46}$$

其中函数$H(f,\mathrm{d}\lambda)$为

$$H(f,\mathrm{d}\lambda)=\begin{cases}1, & \text{当} f=0,\mathrm{d}\lambda>0\\ 0, & \text{当} f=0,\mathrm{d}\lambda\leqslant0\\ 0, & \text{当} f<0\end{cases}\tag{7.6.47}$$

式(7.6.47)实际上就是以微过程的初始状态$(\boldsymbol{\sigma},\xi_\alpha)$以及增量应变$\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}$所表达的加卸载判别准则，写得更清楚些，即

$$\begin{cases}f(\boldsymbol{\sigma},\xi_\alpha)=0,\quad \mathrm{d}\lambda=\dfrac{\partial f}{\partial\boldsymbol{\sigma}}:\boldsymbol{M}:\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}/h_2>0 & (\text{塑性加载}(H=1))\\ f(\boldsymbol{\sigma},\xi_\alpha)=0,\quad \mathrm{d}\lambda=\dfrac{\partial f}{\partial\boldsymbol{\sigma}}:\boldsymbol{M}:\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}/h_2\leqslant0 & (\text{卸载或中性变载}(H=0))\\ f(\boldsymbol{\sigma},\xi_\alpha)<0\quad (\text{弹性变载}(H=0))\end{cases}\tag{7.6.48}$$

式(7.6.46)就是我们所需要的以应力加载面为基础以增量应变表达增量应力的弹塑性本构关系。它在形式上和7.5节中非弹塑性耦合情况的式(7.5.15)或式(7.5.16)完全类似，但是其中的弹性模量张量$\boldsymbol{M}$不是常量，而可以是内变量的并因而是不可逆增量应变累积量的函数。因此我们事实上是在张量$\mathrm{d}\boldsymbol{C}$半正定这一补充条件下得出了有弹塑性耦合性质的广义Drucker材料的正交法则和增量型弹塑性本构关系。

7.6.4 补充说明

在前面7.6.3节的叙述中，我们是以修正的Drucker公设为基础导出了弹塑性耦合材料在应力循环中附加应力之功非负的不等式(7.6.32)式和(7.6.33)式，并在$\mathrm{d}\boldsymbol{C}$半正定的附加条件之下得到了最大不可逆功原理(7.6.34)式，从而得出了不可逆增量应变沿着应力加载面外法向的正交法则(7.6.35)式。需要指出的是：表达附加应力之功非负的不等式可以写为式(7.6.32)和式(7.6.33)的形式是有其前提的，这就是未计及材料的非线性弹性效应，即其弹性模量和柔度张量只是

内变量 ξ_α 的函数而不显式地依赖于材料的应力状态$\boldsymbol{\sigma}$。但是,如果我们注意到正交法则完全是最大不可逆功原理(7.6.34)式的直接结果的话,我们就可以不必关注前面所讲的 Drucker 公设表述的细节、在应力循环中附加应力功非负的具体表达形式以及相应的附加条件,而直接把“在一个应力循环中最大不可逆功原理(7.6.34)式成立”称为广义的 Drucker 公设,并将满足广义的 Drucker 公设的材料称之为广义的 Drucker 材料(可以包含具有非线性弹性性质的材料),而对这种材料正交法则就总是成立的,于是我们就可以参照前面的思路而得出其增量型本构关系。在把最大不可逆功原理成立本身作为广义的 Drucker 公设和广义的 Drucker 材料定义这个意义上,我们可以说前面所得到的本构关系对具有非线性弹性性质的材料也是成立的。在下面的 7.7 节中我们也将以同样的理解来处理问题。

7.7　含损伤热塑性材料本构关系的普适表述和算法

7.7.1　引言

在本节中,我们将以前面几节有关塑性本构关系的知识为基础,从实际工程问题的需要出发,对更为普遍的情况来讨论增量型塑性本构关系及其计算流程的问题,其中主要的就是引入热效应和材料损伤的影响。损伤的引入在原则上并不会增加特殊的困难,因为它只是一个特殊的内变量而已;对热效应的考虑,我们可以分别以熵或者温度作为热力学外变量而将之引入到屈服准则之中,可分别称之为熵型和温度型的屈服准则。虽然从冲击动力学的角度出发似乎采用熵型的屈服准则更为合理,但是从实验上所得到的以及基于某些假定所建立的大多数的屈服准则都是温度型的屈服准则,所以我们下面将以此为基础来进行讨论。

一个好的本构形式不但应有坚实的理论基础,可以包括材料的各种热和力的塑性行为,而且还应该和高速冲击和波传播等各类动塑性问题的计算流程相适应,便于嵌入各类有限元和有限差分编码程序中。如前面几节所述,Drucker 公设奠定了塑性本构关系的理论基础,并首先给出了以增量应力表达增量应变的塑性本构关系,但其形式不适用于理想塑性本构材料和不稳定的软化材料。Ильюшин 公设导出了适用于各类硬软化材料的增量型塑性本构关系,并是以用增量应变表达

增量应力的形式给出的;但其本构关系是以应变空间中的屈服面为基础的,将应力屈服面转化为应变屈服面增加了问题的复杂性,同时对动塑性计算问题的应用也是不方便的。在7.5节中我们曾对Drucker公设的表述进行了修正,将塑性功非负的应力循环元素限制在从屈服面内出发,产生足够小塑性变形的应力循环,从而使之可以同时包括稳定和不稳定材料,并且得到了以增量应变表达增量应力的塑性本构关系,但是在那里我们并没有涉及具有弹塑性耦合性质的材料。7.6.2节中介绍了殷有泉等人在应变空间中所建立的弹塑性耦合材料的本构关系,但由于他们在计算增量塑性应变时引入了一个所谓的弹塑性耦合张量,故使得本构关系的形式相对比较复杂从而增加了应用的不便性。7.6.3节中我们借鉴7.5节中的方法,以修正的Drucker公设为基础,在应力空间中建立了弹塑性耦合材料的本构关系,所建立的本构关系虽然有较广泛的适用性和应用的方便性,但是并没有计及热效应及损伤效应。在本节中,我们将以7.6.3节中得到增量应变表达增量应力塑性本构关系的思想为基础,引入材料的热效应和温度效应。简言之,在本节中我们将在考虑材料的热效应、损伤效应及弹塑性耦合效应的前提下,以修正的Drucker公设和本构关系的内变量理论为基础,建立含损伤材料热塑性本构关系的一般理论框架,导出普适形式的增量型塑性本构关系,并给出其本构计算流程。

7.7.2 含损伤材料热塑性本构关系的一般形式

在应力空间中,以表观应力 $\boldsymbol{\sigma}$ 为主定量,以内变量 $\xi_\alpha(\alpha=1,2,\cdots,n)$、损伤 D、温度 T 为参数表达时,一般形式的时率无关材料的屈服准则可写为

$$f(\boldsymbol{\sigma},\xi_\alpha,D,T)=0 \tag{7.7.1}$$

内变量 ξ_α 的演化 $\dot{\xi}_\alpha$ 反映材料微结构的变化,应该与材料宏观不可逆应变速率 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{I}}$ 相关联,设其演化方程为 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{I}}$ 的一阶齐次函数:

$$\dot{\xi}_\alpha=g_\alpha(\boldsymbol{\sigma},\xi_\beta,D,T,\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{I}})\quad(\alpha,\beta=1,2,\cdots,n) \tag{7.7.2}$$

$$g_\alpha(\boldsymbol{\sigma},\xi_\beta,D,T,a\boldsymbol{X})=ag_\alpha(\boldsymbol{\sigma},\xi_\beta,D,T,\boldsymbol{X}) \tag{7.7.3}$$

式(7.7.3)中 $\boldsymbol{X}$ 是任意二阶张量,a 为任意的标量因子。ξ_α 可以包含与各种不可逆机制相对应的内变量,而 ξ_α 与 g_α 的不同选取可代表不同的宏观塑性行为。例如某一 ξ_α 取为应力的不可逆功积累:

$$W^{I}=\int\boldsymbol{\sigma}:\mathrm{d}\,\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{I}}=\int\boldsymbol{\sigma}:\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{I}}\mathrm{d}t$$

时,式(7.7.2)变为

$$\dot{\xi}_\alpha=g_\alpha\equiv\boldsymbol{\sigma}:\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{I}} \tag{7.7.4}$$

此 g_α 当然具有性质(7.7.3)式,这样即可反映材料的等向功硬化行为;当某9个 ξ_α 取为不可逆应变累积:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{I}} = \int \mathrm{d}\,\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{I}} = \int \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{I}} \mathrm{d}t$$

时,式(7.7.2)变为

$$[\dot{\xi}_\alpha] = [g_\alpha] \equiv \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{I}} \tag{7.7.5}$$

这些 g_α 当然具有性质(7.7.3)式,这样即可反映材料的随动应变硬化行为;当某一 ξ_α 取为通常的等效不可逆应变之累积:

$$\varepsilon^{\mathrm{I}} = \int \sqrt{\frac{2}{3}\mathrm{d}\,\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{I}} : \mathrm{d}\,\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{I}}} = \int \sqrt{\frac{2}{3}\,\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{I}} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{I}}}\mathrm{d}t \tag{7.7.6}$$

时,式(7.7.2)变为

$$\dot{\xi}_\alpha = g_\alpha \equiv \sqrt{\frac{2}{3}\,\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{I}} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{I}}}$$

此时 g_α 也具有性质(7.7.3)式,这样即可反映材料的等向应变硬化行为。显然,(7.7.3)式比许多研究者所采用的$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{I}}$ 的狭隘线性函数形式 $\dot{\xi}_\alpha = \boldsymbol{M} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{I}}$ 更为普遍,因为后者包含不了(7.7.6)式。

作为一个特殊的内变量,损伤 D 具有特别重要的地位,含损伤本构关系的任务就是给出 D 的确定度量及其具体的演化方程。为使我们的理论有更广泛的适用性,设其演化方程具有以下一般形式(具体形式可从不同理论模型导出):

$$\dot{D} = \dot{D}_1 + \dot{D}_2 = \psi(\boldsymbol{\sigma}, \xi_\alpha, D, T) + \varphi(\boldsymbol{\sigma}, \xi_\beta, D, T, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{I}}) \tag{7.7.7}$$

其中第一项 $\dot{D}_1 = \psi(\boldsymbol{\sigma}, \xi_\alpha, D, T)$与不可逆变形的发展$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{I}}$ 无关(不可逆变形和损伤非耦合),且这部分损伤的发展具有不可逆变形发展的弛豫和黏滞流动效应,$\mathrm{d}\,\dot{D}_1 = \psi(\boldsymbol{\sigma}, \xi_\alpha, D, T)\mathrm{d}t$,只要维持其状态$(\boldsymbol{\sigma}, \xi_\alpha, D, T)$,损伤 D_1 就会随时间流逝 $\mathrm{d}t$ 而发展;第二项 $\dot{D}_2 = \varphi(\boldsymbol{\sigma}, \xi_\beta, D, T, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{I}})$是不可逆变形发展$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{I}}$ 而引起的损伤发展,一般情况下,它是$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{I}}$ 的一阶齐次标量函数(不可逆变形对损伤的耦合效应):

$$\varphi(\boldsymbol{\sigma}, \xi_\beta, D, T, a\,\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{I}}) = a\varphi(\boldsymbol{\sigma}, \xi_\beta, D, T, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{I}}) \tag{7.7.8}$$

因此这部分损伤和不可逆变形发展是同步进行的,即$\mathrm{d}D_2 = \varphi(\boldsymbol{\sigma}, \xi_\beta, D, T, \mathrm{d}\,\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{I}})$。

寻求 ψ 和 φ 的各种具体形式,即是损伤力学的一个重要任务。损伤演化方程的一个具体例子是:当 $\varphi = 0$,而

$$\psi = \begin{cases} \dfrac{3}{4}\,\dfrac{\sigma_s^2 - \sigma_0^2}{K_s\lambda}C_s(1 - D)D, & \sigma_s > \sigma_0 \\ 0, & \sigma_s \leqslant \sigma_0 \end{cases} \tag{7.7.9}$$

时，(7.7.7)式即是封加波等所提出的损伤演化方程，其中 σ_s 为材料的实体拉应力，σ_0 为损伤发展应力阈值；当 $\psi=0,\varphi=(1-D)\dot{\theta}^{\mathrm{I}}$ 时，(7.7.7)式即是 J. N. Johnson 等提出的损伤演化方程。

设应力在材料不可逆变形上的绝大部分转化为热，转化比例因子为 α，则根据能量守恒和转化定律可以得到温升方程为

$$\dot{T}=\kappa\Delta T+\alpha\frac{\nu}{C_\nu}\boldsymbol{\sigma}:\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{I}} \tag{7.7.10}$$

其中 Δ 为拉普拉斯算子，$\kappa=\dfrac{\nu\lambda_t}{C_\nu}$ 是导温系数，C_ν 为定容比热，ν 是比容，λ_t 是导热系数。

把内变量演化方程(7.7.2)式、损伤演化方程(7.7.7)式及温升方程(7.7.10)式代入一致性法则：

$$\dot{f}=\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{\sigma}}:\dot{\boldsymbol{\sigma}}+\frac{\partial f}{\partial\xi_\alpha}\dot{\xi}_\alpha+\frac{\partial f}{\partial D}\dot{D}+\frac{\partial f}{\partial T}\dot{T}=0 \tag{7.7.11}$$

得

$$\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{\sigma}}:\dot{\boldsymbol{\sigma}}+\frac{\partial f}{\partial\xi_\alpha}g_\alpha+\frac{\partial f}{\partial D}(\psi+\varphi)+\frac{\partial f}{\partial T}\left(\kappa\Delta T+\alpha\frac{\nu}{C_\nu}\boldsymbol{\sigma}:\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{I}}\right)=0 \tag{7.7.12}$$

将正交法则：

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{I}}=\dot{\lambda}\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{\sigma}} \tag{7.7.13}$$

代入(7.7.12)式，并利用函数 g_α 的性质(7.7.3)式和函数 φ 的性质(7.7.8)式，得

$$\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{\sigma}}:\dot{\boldsymbol{\sigma}}+\dot{\lambda}\frac{\partial f}{\partial\xi_\alpha}g_\alpha+\frac{\partial f}{\partial D}\psi+\dot{\lambda}\frac{\partial f}{\partial D}\varphi+\frac{\partial f}{\partial T}\left(\kappa\Delta T+\alpha\dot{\lambda}\frac{\nu}{C_\nu}\boldsymbol{\sigma}:\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{\sigma}}\right)=0$$

即

$$\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{\sigma}}:\dot{\boldsymbol{\sigma}}+\frac{\partial f}{\partial D}\psi+\frac{\partial f}{\partial T}\kappa\Delta T=\dot{\lambda}h \tag{7.7.14}$$

其中

$$h=-\left(\frac{\partial f}{\partial\xi_\alpha}g_\alpha+\frac{\partial f}{\partial D}\varphi+\alpha\frac{\nu}{C_\nu}\frac{\partial f}{\partial T}\boldsymbol{\sigma}:\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{\sigma}}\right) \tag{7.7.15}$$

在式(7.7.15)中，

$$g_\alpha=g_\alpha\left(\boldsymbol{\sigma},\xi_\beta,D,T,\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{\sigma}}\right),\quad \varphi=\varphi\left(\boldsymbol{\sigma},\xi_\beta,D,T,\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{\sigma}}\right)$$

由于$\dfrac{\partial f}{\partial\boldsymbol{\sigma}}$是状态$(\boldsymbol{\sigma},\xi_\beta,D,T)$的函数，所以 g_α 和 φ 仍然是状态$(\boldsymbol{\sigma},\xi_\beta,D,T)$的复合函数。

由(7.7.14)式可以得到不可逆应变流动因子 $\dot{\lambda}$：

$$\dot{\lambda} = \left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial f}{\partial D}\psi + \frac{\partial f}{\partial T}\kappa \Delta T\right) \Big/ h$$

并进而得出微过程中的 $\mathrm{d}\lambda$、$\mathrm{d}\,\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{I}}$、$\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}$：

$$\mathrm{d}\lambda = \left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} + \frac{\partial f}{\partial D}\psi \mathrm{d}t + \frac{\partial f}{\partial T}\kappa \Delta T \mathrm{d}t\right) \Big/ h \tag{7.7.16a}$$

$$\mathrm{d}\,\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{I}} = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} + \frac{\partial f}{\partial D}\psi \mathrm{d}t + \frac{\partial f}{\partial T}\kappa \Delta T \mathrm{d}t\right) \Big/ h \tag{7.7.16b}$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} + \frac{\partial f}{\partial D}\psi \mathrm{d}t + \frac{\partial f}{\partial T}\kappa \Delta T \mathrm{d}t\right) \Big/ h + \boldsymbol{M}^{-1} : \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} \tag{7.7.16c}$$

其中$\boldsymbol{M}^{-1}$是材料的弹性柔度张量。

(7.7.16)式即是由微过程的增量应力 $\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$ 求解 $\mathrm{d}\lambda$、$\mathrm{d}\,\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{I}}$、$\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}$ 的公式，即材料的增量型热塑性本构关系的一种形式。但是由于(7.7.16)式是由应力增量 $\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$ 计算 $\mathrm{d}\lambda$ 和 $\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}$，与动态问题的计算流程不适应，因而应用于数值计算不方便；同时，对于"理想材料"，(7.7.16)式为$\frac{0}{0}$型而不能确定(在不考虑损伤和热效应的情况下这是众所周知的事实，参见 7.3 节)，故(7.7.16)式不是方便和普适的增量型本构关系。

设冲击加载引起的熵增很小而可以不计，并设材料的表观瞬态弹性模量张量 $\boldsymbol{M}$ 为

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}(\boldsymbol{\sigma}, \xi_{\alpha}, D, T) \tag{7.7.17}$$

其中 $\boldsymbol{M}$ 对$\boldsymbol{\sigma}$、ξ_{α}、D 、T 的依赖分别反映了材料的非线性效应、弹塑性耦合效应、损伤和温度的软化效应。由应力变化率 $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ 和可逆变形发展$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{R}}$ 间的关系，得

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{M} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{R}} = \boldsymbol{M} : (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{I}}) = \boldsymbol{M} : \left(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\lambda}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right) \tag{7.7.18}$$

上式两边与$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$二次点积，得

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \boldsymbol{M} : \left(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\lambda}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right) \tag{7.7.19}$$

将(7.7.19)式代入(7.7.14)式，得

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \boldsymbol{M} : \left(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\lambda}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right) + \frac{\partial f}{\partial D}\psi + \frac{\partial f}{\partial T}\kappa \Delta T = \dot{\lambda} h$$

从而可求得

$$\dot{\lambda} = \left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \boldsymbol{M} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{\partial f}{\partial D}\psi + \frac{\partial f}{\partial T}\kappa \Delta T\right) \Big/ h_2 \tag{7.7.20}$$

其中

$$h_2 = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \boldsymbol{M} : \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + h \tag{7.7.21}$$

(7.7.20)式与无损伤无热软化本构关系(7.6.45)式在形式上类似，只是多一项$\frac{\partial f}{\partial D}\psi$和$\frac{\partial f}{\partial T}\kappa\Delta T$，这与损伤演化方程(7.7.7)式和能量方程(温升方程)(7.7.10)式有关。(7.7.20)式是求$\dot{\lambda}$的显式方程，不存在$\dot{D}$、$\dot{T}$与$\dot{\lambda}$的耦合关系(因为已经用损伤演化方程(7.7.7)式和能量方程(7.7.10)式将$\dot{D}$、$\dot{T}$消去)，只要知道了$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$，即可由(7.7.20)式(并利用(7.7.21)式和(7.7.15)式)计算出$\dot{\lambda}$，即只要知道$\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}$就可得出$\mathrm{d}\lambda$，从而可得出$\mathrm{d}\,\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{I}}$、$\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$、$\mathrm{d}D$、$\mathrm{d}T$：

$$\mathrm{d}\lambda = \left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \boldsymbol{M} : \mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon} + \frac{\partial f}{\partial D}\psi \mathrm{d}t + \frac{\partial f}{\partial T}\kappa\Delta T \mathrm{d}t\right)\Big/h_2 \tag{7.7.22}$$

$$\mathrm{d}\,\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{I}} = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \boldsymbol{M} : \mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon} + \frac{\partial f}{\partial D}\psi \mathrm{d}t + \frac{\partial f}{\partial T}\kappa\Delta T \mathrm{d}t\right)\Big/h_2 \tag{7.7.23}$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{M} : \left[\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon} - \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \boldsymbol{M} : \mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon} + \frac{\partial f}{\partial D}\psi \mathrm{d}t + \frac{\partial f}{\partial T}\kappa\Delta T \mathrm{d}t\right)\Big/h_2\right] \tag{7.7.24}$$

$$\mathrm{d}D = \psi(\boldsymbol{\sigma}, \xi_\alpha, D, T)\mathrm{d}t + \varphi(\boldsymbol{\sigma}, \xi_\beta, D, T, \mathrm{d}\,\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{I}}) \tag{7.7.25}$$

$$\mathrm{d}T = \kappa\Delta T \mathrm{d}t + \alpha\frac{v}{C_v}\boldsymbol{\sigma} : \mathrm{d}\,\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{I}} \tag{7.7.26}$$

上面求应力增量的(7.7.24)式只对塑性加载过程成立，即只有当微过程初始状态位于加载面$f=0$上，而且在这个微过程中不可逆增量应变不为零才适用，为了包括弹性变载和中性变载(没有不可逆变形发展)的情况，可以如7.5节和7.6节中那样把(7.7.24)式改写为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{M} : \left[\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon} - H(f, \mathrm{d}\lambda)\frac{1}{h_2}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \boldsymbol{M} : \mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon} + \frac{\partial f}{\partial D}\psi \mathrm{d}t + \frac{\partial f}{\partial T}\kappa\Delta T \mathrm{d}t\right)\right] \tag{7.7.27}$$

其中函数$H(f, \mathrm{d}\lambda)$的定义如下：

$$H(f, \mathrm{d}\lambda) = \begin{cases} 1, & \text{当 } f = 0 \text{ 且 } \mathrm{d}\lambda > 0\text{，塑性加载} \\ 0, & \text{当 } f = 0 \text{ 且 } \mathrm{d}\lambda \leqslant 0\text{，中性变载} \\ 0, & \text{当 } f < 0\text{，弹性变载} \end{cases} \tag{7.7.28}$$

式(7.7.22)～式(7.7.26)即是含损伤材料的塑性本构关系的普适表述，当给出材料的屈服准则(7.7.1)式、内变量演化方程(7.7.2)式、损伤演化方程(7.7.7)式的具体形式之后，即可在相关的高速贯穿和波传播等冲击力学问题中进行具体计算，这已经在一系列实际问题中得到成功应用。

7.7.3 小结

本节我们以严格的力学原理为基础，从最普遍的情况出发，建立了含损伤材料的热塑性本构关系的一般理论框架，并给出了增量型本构关系的普适形式和计算流程。我们的本构关系有如下优点：

(1) 它类似于常用的 Drucker 公设，是以应力空间中的屈服函数来表述的，这比以 Ильюшин 公设为基础的应变屈服函数要方便。

(2) 与 Drucker 公设给出的本构关系只适用于硬化材料不同，我们的本构关系适用于硬化、理想塑性和软化等各类材料，它包含了内变量硬化、损伤软化和温度软化等各类耦合效应。

(3) 它是由微过程应变增量 $\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}$ 计算不可逆应变流动因子 $\mathrm{d}\lambda$ 并继而计算 $\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{I}}$、$\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$、$\mathrm{d}D$、$\mathrm{d}T$ 的显式方程，极易嵌入各类动态数值程序之中。

(4) 我们的热塑性本构关系可以统一地处理微孔洞型韧性损伤、剪切带韧性损伤和微裂纹性脆性损伤等各类破坏模式，只要嵌入相应的损伤演化方程就可以了，因此我们的本构关系有着严格的理论基础和广泛的适用性。

习　题

7.1　设各向同性材料的屈服准则为 $f(\boldsymbol{\sigma})=0$，试证明取标量值的函数 $f(\boldsymbol{\sigma})$ 必是应力张量 $\boldsymbol{\sigma}$ 的各向同性函数，即必可将之表达为 $\boldsymbol{\sigma}$ 的 3 个主应力的函数。

7.2　试证明：偏应力张量 $\boldsymbol{\sigma}'$ 与应力张量 $\boldsymbol{\sigma}$ 有相同的主方向，而其特征值 $\sigma'_i=\sigma_i+p(i=1,2,3)$，其中 $p=-\frac{1}{3}\sigma_{ii}$ 为流体动力学压力。

7.3　试由 7.1 节中的式(7.1.11)出发，证明 Trasca 准则(7.1.23a)式～(7.1.23f)式在 π 平面内的正交投影可以表达为正六边形(7.1.23a)′式～(7.1.23f)′式。

7.4　试导出材料的总弹性变形能屈服准则即 Lemeitre 屈服准则的数学形式。

7.5　设各向同性硬化材料的后继屈服面为 $\bar{\sigma}=K(W^{\mathrm{p}})$，其中

$$\bar{\sigma}=\sqrt{\frac{3}{2}\sigma'_{ij}\sigma'_{ij}}=\sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2]},\quad W^{\mathrm{p}}=\int\sigma_{ij}\,\mathrm{d}\varepsilon_{ij}^{\mathrm{p}}$$

分别为应力强度和塑性功。又设材料在一维应力条件下的应力应变曲线是线性硬化的(弹性模量和弹塑性模量分别为 E 和 E_1),试以此为出发点求出各向同性硬化函数 $K(W^{\mathrm{p}})$。分别对塑性变形不可压 $\left(\nu^{\mathrm{p}}=\frac{1}{2}\right)$ 和可压 $\left(\nu^{\mathrm{p}}\neq\frac{1}{2}\right)$ 的情形进行讨论。

7.6　设各向同性硬化材料的后继屈服面为 $\bar{\sigma}=K(\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}})$,其中

$$\bar{\sigma}=\sqrt{\frac{3}{2}\sigma'_{ij}\sigma'_{ij}}=\sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2]}$$

$$\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}=\int\sqrt{\frac{2}{3}\,\mathrm{d}\varepsilon_{ij}^{\mathrm{p}}\,\mathrm{d}\varepsilon_{ij}^{\mathrm{p}}}$$

分别为应力强度和累积等效塑性应变。又设材料在一维应力条件下的应力应变曲线是线性硬化的(弹性模量和弹塑性模量分别为 E 和 E_1),试以此为出发点求出各向同性硬化函数 $K(\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}})$。试分别对塑性变形不可压 $\left(\nu^{\mathrm{p}}=\frac{1}{2}\right)$ 和可压 $\left(\nu^{\mathrm{p}}\neq\frac{1}{2}\right)$ 的情形进行讨论。

7.7　设材料满足 Mises 屈服准则 $f(\boldsymbol{\sigma})\equiv\bar{\sigma}-Y=0$ 和线性随动硬化模型 $f(\boldsymbol{\sigma}-C\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}})=0$。试由一维应力条件下的线性随动硬化规律求出常数 C(设弹性模量和弹塑性模量分别为 E 和 E_1)。分别对塑性变形不可压 $\left(\nu^{\mathrm{p}}=\frac{1}{2}\right)$ 和可压 $\left(\nu^{\mathrm{p}}\neq\frac{1}{2}\right)$ 的情形进行讨论。

7.8　以纯剪切实验曲线代替 7.5～7.7 各题中的一维应力实验曲线,试求解同样的问题。

7.9　设各向同性的内变量 K 分别作为累积塑性功 W^{p}、累积等效塑性应变 $\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}$、有限等效塑性应变 ε^{p} 的函数:

$$K=K(W^{\mathrm{p}}),\quad K=K(\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}),\quad K=K(\varepsilon^{\mathrm{p}})$$

$$W^{\mathrm{p}}=\int\boldsymbol{\sigma}:\mathrm{d}\,\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}},\quad \bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}=\int\sqrt{\frac{2}{3}\mathrm{d}\,\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}:\mathrm{d}\,\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}},\quad \varepsilon^{\mathrm{p}}=\sqrt{\frac{2}{3}\,\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}:\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}}$$

试分别求出 $K(W^{\mathrm{p}})$、$K(\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}})$、$K(\varepsilon^{\mathrm{p}})$的演化方程;设加载面为 $f(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}},K)=0$,写出其在应力空间中所表达的增量型塑性本构关系。

7.10　试对满足 Mises 型等向硬化后继屈服面 $\bar{\sigma}^2=K^2(W^{\mathrm{p}})$的弹塑性材料,求出塑性流动因子 $\mathrm{d}\lambda$ 和由偏应变增量 $\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}'$表达偏应力增量 $\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}'$的增量型塑性本构

关系。

7.11 试证明7.6节中的式(7.6.13)′和式(7.6.32)′。

7.12 试从含内变量的势函数概念出发，对复杂应力状态直接证明7.6节中的式(7.6.13)和式(7.6.32)。

7.13 设材料的屈服准则为 $f(\sigma_{ij})=0$，以 σ_{ij}、s_{ij} 和 p 分别表示应力张量、偏应力张量和压力，都以压为正。

(1) 试证明：

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial f}{\partial s_{ij}} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\left(\frac{\partial f}{\partial s_{kk}} - \frac{\partial f}{\partial p}\right)$$

(2) 设应力屈服函数 f 依赖于 p 和 Mises 等效应力材料 $\bar{\sigma}$，试证明上式可以化为

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial f}{\partial s_{ij}} + \frac{1}{3}\delta_{ij}\frac{\partial f}{\partial p}$$

而且必有

$$\dot{\theta}^{\mathrm{p}} = \dot{\lambda}\frac{\partial f}{\partial p}$$

$$\dot{e}_{ij}^{\mathrm{p}} = \dot{\lambda}\frac{\partial f}{\partial s_{ij}}$$

其中 $\dot{\theta}^{\mathrm{p}}$ 和 $\dot{e}_{ij}^{\mathrm{p}}$ 分别为塑性体应变率和塑性偏应变率。

7.14 设有一平面应力状态 $\sigma_1=\frac{\sigma_s}{\sqrt{3}}$，$\sigma_2=\frac{-\sigma_s}{\sqrt{3}}$，且设 $\mathrm{d}\epsilon_1^{\mathrm{p}}=c$ 为常数，试求等效塑性应变增量 $\mathrm{d}\bar{\epsilon}^{\mathrm{p}}=\sqrt{\frac{2}{3}\mathrm{d}\epsilon_{ij}^{\mathrm{p}}\mathrm{d}\epsilon_{ij}^{p}}$ 和塑性功增量 $\mathrm{d}W^{\mathrm{p}}=\sigma_{ij}\mathrm{d}\epsilon_{ij}^{\mathrm{p}}$。

第 8 章　黏性流体和黏弹性材料

8.1　热黏弹性率型本构方程和现时构形中所表达的本构方程

8.1.1　热黏弹性率型本构方程

当采用减退记忆并假定应力等对变形梯度历史的依赖只是对以前无穷短时间间隔内变形梯度历史的依赖时，可将之归结为对变形梯度时变率的依赖，因此我们可以考虑如下的率型方程：

$$\begin{cases}\boldsymbol{\sigma} = \hat{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{F},\dot{\boldsymbol{F}},T,\boldsymbol{g}), \quad s = \hat{s}(\boldsymbol{F},\dot{\boldsymbol{F}},T,\boldsymbol{g}) \\ \boldsymbol{h} = \hat{\boldsymbol{h}}(\boldsymbol{F},\dot{\boldsymbol{F}},T,\boldsymbol{g}), \quad \psi = \dot{\psi}(\boldsymbol{F},\dot{\boldsymbol{F}},T,\boldsymbol{g})\end{cases} \tag{8.1.1}$$

求自由能的时间导数并代入熵不等式：

$$-\rho(\dot{\psi} + \dot{T}s) + \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{L} - \frac{1}{T}\boldsymbol{h} \cdot \boldsymbol{g} \geqslant 0 \tag{8.1.2}$$

得

$$-\rho\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial\dot{\boldsymbol{F}}} : \ddot{\boldsymbol{F}} - \rho\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial\boldsymbol{g}} \cdot \dot{\boldsymbol{g}} + \rho\left(s - \frac{\partial\psi}{\partial T}\right)\dot{T} - \rho\left[\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial\boldsymbol{F}} - \frac{1}{\rho}\boldsymbol{\sigma} \cdot (\boldsymbol{F}^{-1})^{\mathrm{T}}\right] : \dot{\boldsymbol{F}} - \frac{1}{T}\boldsymbol{h} \cdot \boldsymbol{g} \geqslant 0 \tag{8.1.3}$$

由微过程的任意性，有

$$\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \dot{\boldsymbol{F}}} = 0, \quad \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \boldsymbol{g}} = 0, \quad s = \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial T}$$

即

$$\psi = \hat{\psi}(\boldsymbol{F}, T), \quad s = \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial T} = \hat{s}(\boldsymbol{F}, T) \tag{8.1.4}$$

不依赖于 $\dot{\boldsymbol{F}}$ 和 $\boldsymbol{g}$，此时(8.1.3)式成为

$$\left[\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \boldsymbol{F}} - \frac{1}{\rho}\boldsymbol{\sigma} \cdot (\boldsymbol{F}^{-1})^{T}\right] : \dot{\boldsymbol{F}} + \frac{\boldsymbol{h} \cdot \boldsymbol{g}}{T\rho} \leqslant 0 \tag{8.1.5}$$

由于 $\boldsymbol{\sigma} = \hat{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{F}, \dot{\boldsymbol{F}}, T, \boldsymbol{g})$ 依赖于 $\dot{\boldsymbol{F}}$，不能利用 $\dot{\boldsymbol{F}}$ 的任意性得出简单结果。但(8.1.5)式对任意的 $\dot{\boldsymbol{F}}$ 和 $\boldsymbol{g}$ 成立，故有

$$f(\alpha, \beta) \equiv \alpha\left[\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \boldsymbol{F}} - \frac{1}{\rho}\boldsymbol{\sigma} \cdot (\boldsymbol{F}^{-1})^{\mathrm{T}}\right] : \dot{\boldsymbol{F}} + \beta\frac{\boldsymbol{h} \cdot \boldsymbol{g}}{T\rho} \leqslant 0 \tag{8.1.6}$$

其中 $\boldsymbol{\sigma}$ 和 $\boldsymbol{h}$ 是 $(\boldsymbol{F}, \alpha\dot{\boldsymbol{F}}, T, \beta\boldsymbol{g})$ 的函数。$f(\alpha, \beta)$ 在 $\alpha = 0, \beta = 0$ 处必有极大值，从而有 $\left.\frac{\partial f}{\partial \alpha}\right|_{(0,0)} = \left.\frac{\partial f}{\partial \beta}\right|_{(0,0)} = 0$。$\left.\frac{\partial f}{\partial \alpha}\right|_{(0,0)} = 0$ 给出

$$\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{e}} \equiv \hat{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{F}, 0, T, \boldsymbol{0}) = \rho\frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{F}} \cdot \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}} \tag{8.1.7}$$

称为平衡态应力，而整个应力可视为 $\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{e}}$ 和附加应力 $\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{v}}$ 之和：

$$\boldsymbol{\sigma} = \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathrm{e}}(\boldsymbol{F}, T) + \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathrm{v}}(\boldsymbol{F}, \dot{\boldsymbol{F}}, T, \boldsymbol{g}) \tag{8.1.8}$$

其中 $\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{v}}$ 满足

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathrm{v}}(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{0}, T, \boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0} \tag{8.1.9}$$

$\left.\frac{\partial f}{\partial \beta}\right|_{(0,0)} = 0$ 给出

$$\hat{\boldsymbol{h}}(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{0}, T, \boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0} \tag{8.1.10}$$

利用这些结果，得熵不等式：

$$\delta \equiv \boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{v}} : \boldsymbol{L} - \frac{1}{T}\boldsymbol{h} \cdot \boldsymbol{g} \geqslant 0 \tag{8.1.11}$$

其中 $\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{v}} : \boldsymbol{L} = \boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{v}} : \boldsymbol{D}$ 是附加应力内耗散，可视为黏性内耗散。

以上讨论说明热黏弹性体的应力可视为平衡态应力 $\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{e}}$ 和黏性应力 $\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{v}}$ 之和，平衡态应力 $\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{e}}$ 可由它的变形功积累，即对自由能势 $\hat{\psi}$ 求导而得出，黏性应力 $\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{v}}$ 的变形功则是形式不可逆的内耗散。

当然也可讨论本构方程的构架无关形式及其材料对称特性，这没有原则上的困难。由于篇幅所限，这些内容从略，读者可作为练习尝试之。

8.1.2 现时构形中所表达的本构方程及对材料记忆特性的分析

在5.2节中我们曾根据构架无关原理得到了材料Cauchy应力本构泛函的简化式(5.2.17a)式，即

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{X},t)=\hat{\boldsymbol{\sigma}}[\boldsymbol{F}^t,T^t,\boldsymbol{G}^t]=\boldsymbol{R}(t)\cdot\hat{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{U}^t,T^t,\boldsymbol{G}^t)\cdot\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}(t) \tag{8.1.12a}$$

并指出它的含义是：材料在 t 时刻的Cauchy应力依赖于直至现时 t 为止的整个右伸缩张量历史 $\boldsymbol{U}^t$、温度历史 T^t、温度梯度历史 $\boldsymbol{G}^t$，但是却只与该时刻 t 的旋转张量 $\boldsymbol{R}(t)$ 有关。在利用许可性原理之后，则容易证明温度梯度历史 $\boldsymbol{G}^t$ 也将不会出现在本构泛函之中。而在不考虑热效应的纯力学问题中，材料Cauchy应力的本构泛函可写为(下面将省略掉粒子 $\boldsymbol{X}$ 和现时刻 t 的标记)

$$\boldsymbol{\sigma}=\hat{\boldsymbol{\sigma}}[\boldsymbol{F}^t]=\boldsymbol{R}\cdot\hat{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{U}^t)\cdot\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} \tag{8.1.12b}$$

或

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}=\hat{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{U}^t) \tag{8.1.13}$$

其中

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}=\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{R} \tag{8.1.14}$$

称为Cauchy"旋转应力"。尽管Cauchy应力是与初始构形完全无关的，但上面各式中的变形量和旋转量却都是以初始构形为参考构形的。现在我们将有关的变形量和旋转量转化为以现时构形为参考构形时的相应量，以便更深刻地揭示材料变形历史的影响。任意时刻 t' 相对于初始构形的变形梯度 $\boldsymbol{F}(t')$ 与 t 时刻相对于初始构形的变形梯度 $\boldsymbol{F}(t)$ 之间是由下式相联系的(参见式(2.5.18b))：

$$\boldsymbol{F}(t')=\boldsymbol{F}_t(t')\cdot\boldsymbol{F}(t)$$

其中 $\boldsymbol{F}_t(t')$ 是 t' 时刻相对于 t 时刻的相对变形梯度。将此式应用于直至现时刻 t 的整个历史，可写为

$$\boldsymbol{F}^t=\boldsymbol{F}_t^t\cdot\boldsymbol{F} \tag{8.1.15}$$

于是我们有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{F},\quad \boldsymbol{C}^t&=(\boldsymbol{F}^t)^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{F}^t=(\boldsymbol{F}_t^t\cdot\boldsymbol{F})^{\mathrm{T}}\cdot(\boldsymbol{F}_t^t\cdot\boldsymbol{F})\\&=\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\cdot(\boldsymbol{F}_t^t)^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{F}_t^t\cdot\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{C}_t^t\cdot\boldsymbol{F}\end{aligned}$$

即

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{F}, \quad \boldsymbol{C}^{t} = \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{C}_{t}^{t} \cdot \boldsymbol{F} \tag{8.1.16}$$

利用 $\boldsymbol{F}$ 的右极分解式、$\boldsymbol{C}$ 及 $\boldsymbol{U}$ 的正定对称性及 $\boldsymbol{R}$ 的正交性，其中的第二式可以写为

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{U}^{t})^{2} &= (\boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{U})^{\mathrm{T}} \cdot (\boldsymbol{U}_{t}^{t})^{2} \cdot (\boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{U}) = \boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} \cdot (\boldsymbol{U}_{t}^{t})^{2} \cdot (\boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{U}) \\ &= \boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{U}_{t}^{t} \cdot \boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{U}_{t}^{t} \cdot \boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{U} \\ &= \boldsymbol{U} \cdot (\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{U}_{t}^{t} \cdot \boldsymbol{R}) \cdot (\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{U}_{t}^{t} \cdot \boldsymbol{R}) \cdot \boldsymbol{U} \\ &= [(\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{U}_{t}^{t} \cdot \boldsymbol{R}) \cdot \boldsymbol{U}] \cdot [(\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{U}_{t}^{t} \cdot \boldsymbol{R}) \cdot \boldsymbol{U}] = [\tilde{\boldsymbol{U}}_{t}^{t} \cdot \boldsymbol{U}]^{2}\end{aligned}$$

即

$$(\boldsymbol{U}^{t})^{2} = [\tilde{\boldsymbol{U}}_{t}^{t} \cdot \boldsymbol{U}]^{2} \tag{8.1.17a}$$

其中

$$\tilde{\boldsymbol{U}}_{t}^{t} = \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{U}_{t}^{t} \cdot \boldsymbol{R} \tag{8.1.18a}$$

称为相对于现时刻 t 的“旋转右收缩张量”历史。由于 $\boldsymbol{U}$ 的正定对称性，(8.1.17a)式也可写为

$$\boldsymbol{U}^{t} = \tilde{\boldsymbol{U}}_{t}^{t} \cdot \boldsymbol{U} \tag{8.1.17b}$$

所以本构关系 $\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \hat{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{U}^{t})$ 可以写为

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \hat{\boldsymbol{\sigma}}(\tilde{\boldsymbol{U}}_{t}^{t} \cdot \boldsymbol{U}) \tag{8.1.19a}$$

若定义“旋转右 Cauchy-Green 张量”历史：

$$\tilde{\boldsymbol{C}}_{t}^{t} = (\tilde{\boldsymbol{U}}_{t}^{t})^{2} = \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} \cdot (\boldsymbol{U}_{t}^{t})^{2} \cdot \boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{C}_{t}^{t} \cdot \boldsymbol{R} \tag{8.1.18b}$$

则(8.1.19a)式可写为

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \hat{\boldsymbol{\sigma}}(\tilde{\boldsymbol{C}}_{t}^{t}, \boldsymbol{C}) \tag{8.1.19b}$$

虽然我们用了同样的记号 $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$，但是显然式(8.1.19)两式中的 $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ 是不同的泛函。式 (8.1.19)就是以现时刻构形为参考构形来描述材料的变形历史时其 Cauchy 应力本构泛函的表达式，它对任何的固体材料都是适用的。但是，由于其中含有以初始构形为参考构形所量度的现时刻的 $\boldsymbol{C}$ 及隐含的 $\boldsymbol{R}$，所以我们并不能完全消除初始参考构形的影响。

8.1.3 各向同性材料和各向同性简单流体本构方程的进一步分析

对于各向同性材料，由于正交张量 $\boldsymbol{Q}$ 是满足方程：

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{F}^{t} \cdot \boldsymbol{H}) = \hat{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{F}^{t}) \tag{8.1.20}$$

的同格群的元素，所以当以任意的正交张量 $\boldsymbol{Q}$ 代替式(8.1.20)中的幺模张量 $\boldsymbol{H}$ 时，式(8.1.20)仍然是成立的，特别对 $\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}$，式(8.1.20)也仍然是成立的，故对各向同性材料，我们必然有

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{F}^{t}\cdot\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}})=\hat{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{F}^{t}) \tag{8.1.20}$$

这就是说各向同性材料本构泛函 $\hat{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{F}^{t})$ 应具有这样的性质：当以 $\boldsymbol{F}^{t}\cdot\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}$ 代替 $\boldsymbol{F}^{t}$ 时其值不变。而当我们作此代换时，各量将有如下相应的代换关系：

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{F}^{t}\to\boldsymbol{F}^{t}\cdot\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\\
&\boldsymbol{F}\to\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{V}\\
&\boldsymbol{C}=\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{F}\to\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{V}=\boldsymbol{V}^{2}=\boldsymbol{B}\\
&\boldsymbol{C}_{t}^{t}=(\boldsymbol{F}_{t}^{t})^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{F}_{t}^{t}=(\boldsymbol{F}^{t}\cdot\boldsymbol{F}^{-1})^{\mathrm{T}}\cdot(\boldsymbol{F}^{t}\cdot\boldsymbol{F}^{-1})\\
&\to[\boldsymbol{F}^{t}\cdot\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\cdot(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}})^{-1}]^{\mathrm{T}}\cdot[\boldsymbol{F}^{t}\cdot\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\cdot(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}})^{-1}]\\
&\qquad=[\boldsymbol{F}^{t}\cdot\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{F}^{-1}]^{\mathrm{T}}\cdot[\boldsymbol{F}^{t}\cdot\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{F}^{-1}]\\
&\qquad=[\boldsymbol{F}^{t}\cdot\boldsymbol{F}^{-1}]^{\mathrm{T}}\cdot[\boldsymbol{F}^{t}\cdot\boldsymbol{F}^{-1}]=[\boldsymbol{F}_{t}^{t}]^{\mathrm{T}}\cdot[\boldsymbol{F}_{t}^{t}]=\boldsymbol{C}_{t}^{t}\\
&\boldsymbol{B}=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\to\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\cdot(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}\\
&\boldsymbol{V}=\sqrt{\boldsymbol{B}}\to\sqrt{\boldsymbol{B}}=\boldsymbol{V}\\
&\boldsymbol{R}=\boldsymbol{V}^{-1}\cdot\boldsymbol{F}\to\boldsymbol{V}^{-1}\cdot(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}})=\boldsymbol{V}^{-1}\cdot\boldsymbol{V}=\boldsymbol{I}\\
&\tilde{\boldsymbol{C}}_{t}^{t}=\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{C}_{t}^{t}\cdot\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{C}_{t}^{t}\cdot\boldsymbol{I}=\boldsymbol{C}_{t}^{t}\\
&\tilde{\boldsymbol{\sigma}}=\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{I}=\boldsymbol{\sigma}
\end{aligned}$$

在进行了如上各量的代换后，本构关系(8.1.19b)式成为

$$\boldsymbol{\sigma}=\hat{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{C}_{t}^{t},\boldsymbol{B}) \tag{8.1.21a}$$

式(8.1.21a)就是各向同性材料本构关系的一般形式，其中 $\boldsymbol{C}_{t}^{t}$ 是以现时构形为参考构形所量度的右 Cauchy-Green 张量历史，而 $\boldsymbol{B}$ 仍然是以初始构形为参考构形所量度的现时刻 t 的左 Cauchy-Green 张量，即对固体而言我们仍然不能消除对初始构形的依赖。

构架无关原理要求泛函 $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ 必须是各向同性张量泛函，即对任意的正交张量 $\boldsymbol{Q}$，都有

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{C}_{t}^{t}\cdot\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}})=\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}} \tag{8.1.22a}$$

材料的变形历史 $\boldsymbol{C}_{t}^{t}$ 可以分解为现时刻 t 之前的静止历史 $\boldsymbol{I}$ 和非静止历史 $\boldsymbol{C}_{t}^{t}-\boldsymbol{I}$ 之和，相应地，我们可以将本构泛函(8.1.21a)式分解为如下形式：

$$\boldsymbol{\sigma}=\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathrm{e}}(\boldsymbol{I},\boldsymbol{B})+\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathrm{v}}(\boldsymbol{C}_{t}^{t}-\boldsymbol{I},\boldsymbol{B})=\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathrm{e}}(\boldsymbol{B})+\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathrm{v}}(\boldsymbol{C}_{t}^{t}-\boldsymbol{I},\boldsymbol{B}) \tag{8.1.21b}$$

其中$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_e(\boldsymbol{B}) \equiv \hat{\boldsymbol{\sigma}}_e(\boldsymbol{I},\boldsymbol{B})$是$\boldsymbol{B}$的各向同性张量函数，称之为材料的弹性应力，与变形历史无关；$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_v(\boldsymbol{C}_t^t - \boldsymbol{I},\boldsymbol{B})$是各向同性张量泛函，称之为材料的非弹性应力，它是与材料的变形历史有关的。对任意的正交张量$\boldsymbol{Q}$，我们都有

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_e(\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}) = \boldsymbol{Q}\cdot\hat{\boldsymbol{\sigma}}_e(\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}},$$

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_v(\boldsymbol{Q}\cdot(\boldsymbol{C}_t^t - \boldsymbol{I})\cdot\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}) = \boldsymbol{Q}\cdot\hat{\boldsymbol{\sigma}}_v(\boldsymbol{C}_t^t - \boldsymbol{I},\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}} \quad (8.1.22\mathrm{b})$$

显然泛函$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_v$满足$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_v(\boldsymbol{0},\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{0}$。

式(8.1.21a)和式(8.1.21b)是各向同性固体材料 Cauchy 应力本构泛函的数学形式，虽然在其中我们引入了以现时构形为参考构形的变形历史$\boldsymbol{C}_t^t$，但是我们仍然并未消除初始构形的影响，换句话说，我们只有在材料的无歪斜构形中才可写出这种形式的 Cauchy 应力本构泛函。但是，如果材料是各向同性简单流体的话，则由于材料的对称群为幺模群，材料不存在优选构形，故在任意等密度的参考构形中材料的本构泛函都应具有相同的形式，而由于旋转并不会改变材料的密度，故此时材料应力对$\boldsymbol{B}$的依赖将表现为对$\det\boldsymbol{B}$的依赖或者对材料密度ρ的依赖。故各向同性简单流体的 Cauchy 应力本构泛函(8.1.21a)式和(8.1.21b)式可分别写为

$$\boldsymbol{\sigma} = \hat{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{C}_t^t,\rho) \quad (8.1.23\mathrm{a})$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \hat{\boldsymbol{\sigma}}_e(\rho) + \hat{\boldsymbol{\sigma}}_v(\boldsymbol{C}_t^t - \boldsymbol{I},\rho) \quad (8.1.23\mathrm{b})$$

构架无关原理要求(8.1.23)式中的泛函$\hat{\boldsymbol{\sigma}}$、$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_v$为各向同性张量泛函，而$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_e(\rho)$为各向同性张量函数，即对任意的正交张量$\boldsymbol{Q}$，都有

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{C}_t^t\cdot\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}},\rho) = \boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{C}_t^t,\rho)\cdot\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}} \quad (8.1.24\mathrm{a})$$

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_v(\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{C}_t^t\cdot\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{I},\rho) = \boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{\sigma}_v(\boldsymbol{C}_t^t - \boldsymbol{I},\rho)\cdot\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}},\hat{\boldsymbol{\sigma}}_e(\rho) = \boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{\sigma}_e(\rho)\cdot\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}} \quad (8.1.24\mathrm{b})$$

张量泛函$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_v$还具有性质$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_v(\boldsymbol{0},\rho) = \boldsymbol{0}$。

式(8.1.24b)的第二式只有如下形式的解：

$$\boldsymbol{\sigma}_e(\rho) = -p(\rho)\boldsymbol{I} \quad (8.1.25)$$

其中$p(\rho)$是ρ的标量函数。这种形式的二阶张量$\boldsymbol{\sigma}_e(\rho)$称之为二阶各向同性张量。故各向同性简单流体的 Cauchy 应力本构关系可写为

$$\boldsymbol{\sigma} = -p(\rho)\boldsymbol{I} + \hat{\boldsymbol{\sigma}}_v(\boldsymbol{C}_t^t - \boldsymbol{I},\rho) \quad (8.1.23\mathrm{c})$$

在 2.6 节中我们曾给出了材料的相对右 Cauchy-Green 张量$\boldsymbol{C}_t(\tau)$以t时刻的 Rivlin-Ericksen 张量$\overset{(n)}{\boldsymbol{A}}(t)$的级数所表达的公式(2.6.22)式，即

$$C_t(\tau) = C_t(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\tau - t)^n}{n!} C_t^{(n)}(t) = I + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\tau - t)^n}{n!} \overset{(n)}{A}(t) \tag{8.1.26}$$

如果我们将 τ 取为 t 之前的各不同时刻，则 $C_t(\tau)$ 也就是直至 t 时为止的右 Cauchy-Green 张量历史 C_t^t。将此式代入式(8.1.23c)之中并只取 n 项，再假设只有现时刻 t 之前无限短的历史才对 t 时刻的响应有影响的话，则可得到下式：

$$\sigma = -p(\rho)I + \hat{\sigma}_v(\overset{(1)}{A}, \overset{(2)}{A}, \cdots, \overset{(n)}{A}, \rho) \tag{8.1.27}$$

我们称本构关系由(8.1.27)式所表达的材料为 n 阶的 Rivlin-Ericksen 黏性流体，这里 $\hat{\sigma}_v$ 已经是通常的张量函数而不是张量泛函了。特别说来，由于 $\overset{(1)}{A} = 2D$(见2.6节中的式(2.6.17))，1 阶的 Rivlin-Ericksen 黏性流体的本构关系可以写为

$$\sigma = -p(\rho)I + \sigma^*(D, \rho) \tag{8.1.28}$$

由于 $\hat{\sigma}_v(0, \rho) = 0$，故函数 $\sigma^*(D, \rho)$ 具有性质 $\sigma^*(0, \rho) = 0$，这就是说此种黏性流体在静止时只能承受各向等值的应力 $-p(\rho)I$，故称 $p(\rho)I$ 为弹性静水压力，简称为静水压力；而在其流动之中除了承受静水压力之外还能承受附加的所谓黏性应力 $\sigma^*(D, \rho)$，不过要注意的是黏性应力之中也可以包含有各向等值的球形压力部分。在下一节中，我们还会对该种黏性流体的本构关系做进一步的说明。

当流体完全没有历史记忆效应时，其黏性应力为 $\mathbf{0}$；如果再引入热效应，则我们即得到热弹性流体的本构方程：

$$\sigma = -p(\rho, T)I \tag{8.1.29}$$

8.2 黏性流体

在 8.1 节中我们已经得到了 1 阶 Rivlin-Ericksen 黏性流体即广义的 Stokes 黏性流体的本构方程(8.1.28)式，如果我们将反映热效应的温度 T 也考虑进来，则可以将其本构关系表达为

$$\sigma = -p(\rho, T)I + \sigma^*(D, \rho, T) \tag{8.2.1}$$

其中第一项 $-p(\rho, T)I$ 是流体静止时所表现出的各向等值的球形应力状态，故

$$p = p(\rho, T) \tag{8.2.2}$$

称之为静水压力或热力学压力，它与介质的密度 ρ 和温度 T 之间的依赖关系，也常

常称之为状态方程。第二项

$$\boldsymbol{\sigma}^{*} = \boldsymbol{\sigma}^{*}(\boldsymbol{D}, \rho, T) \tag{8.2.3}$$

如8.1节中所述,满足如下条件:

$$\boldsymbol{\sigma}^{*} = \boldsymbol{\sigma}^{*}(\boldsymbol{D} = \boldsymbol{0}, \rho, T) = \boldsymbol{0} \tag{a}$$

即该项应力$\boldsymbol{\sigma}^{*}$是只有在材料流动时才会伴生的附加应力状态,称之为黏性应力,一般而言人们所关注的主要是它与伸缩率张量$\boldsymbol{D}$之间的关系,因为它与温度T的关系只有在较大的温度范围内才是比较明显的,而与密度ρ之间的关系一般说来是很弱且通常是可以忽略的。

第一项$-p(\rho,T)\boldsymbol{I}$是永远自动满足构架无关原理的要求的,而构架无关原理还要求黏性应力$\boldsymbol{\sigma}^{*}(\boldsymbol{D},\rho,T)$必须是$\boldsymbol{D}$的各向同性张量函数,即对任意的正交张量$\boldsymbol{Q}$,下式都应成立:

$$\boldsymbol{\sigma}^{*}(\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}, \rho, T) = \boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{\sigma}^{*}(\boldsymbol{D}, \rho, T)\cdot\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}} \tag{8.2.4}$$

由第6章中各向同性张量函数的表达定理,必有

$$\boldsymbol{\sigma}^{*}(\boldsymbol{D}, \rho, T) = f_0(I_1, I_2, I_3)\boldsymbol{I} + f_1(I_1, I_2, I_3)\boldsymbol{D} + f_2(I_1, I_2, I_3)\boldsymbol{D}^2 \tag{8.2.5a}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\boldsymbol{I} + f_0(I_1, I_2, I_3)\boldsymbol{I} + f_1(I_1, I_2, I_3)\boldsymbol{D} + f_2(I_1, I_2, I_3)\boldsymbol{D}^2 \tag{8.2.5b}$$

其中f_0、f_1、f_2是$\boldsymbol{D}$的三个主不变量I_i和ρ及T的函数。需要说明的是:由于各向同性流体对各种等密度构形而言无优选构形,即在以任何等密度构形为参考构形时其本构关系完全相同,故对各向同性流体而言,构架无关原理同时也就反映了材料在任何构形中的各向同性要求,换言之,各向同性流体在任何构形中都是各向同性的,这与各向同性固体只在无歪斜构形中才表现出各向同性是不同的。

式(8.2.5a)和式(8.2.5b)是一般各向同性黏性流体的本构方程。特别地,在式(8.2.5)中令$f_2=0, f_1=2\mu, f_0=\lambda I_1=\lambda D_{kk}$,其中$\mu$和$\lambda$都与$\boldsymbol{D}$无关,因而$\boldsymbol{\sigma}^{*}$为$\boldsymbol{D}$的线性函数时,则可得各向同性线性黏性流体的本构方程如下:

$$\boldsymbol{\sigma}^{*} = \lambda D_{kk}\boldsymbol{I} + 2\mu\boldsymbol{D}, \quad \boldsymbol{\sigma} = -p\boldsymbol{I} + \lambda D_{kk}\boldsymbol{I} + 2\mu\boldsymbol{D} \tag{8.2.6}$$

可见各向同性线性黏性流体的本构方程依赖于两个独立的黏性系数μ和λ,习惯上分别将它们称为第一和第二黏性系数,而将此种黏性流体称为线性黏性流体或牛顿(Newton)黏性流体,有的书上也将之称为Stokes黏性流体,为了术语的清晰性,我们不妨将之称为广义Stokes黏性流体。

在常见的流体力学教科书中,人们常常将线性的牛顿黏性流体的本构方程写为如下形式:

$$\boldsymbol{\sigma}^{*} = \boldsymbol{A}(\rho, T):\boldsymbol{D}, \quad \sigma_{ij}^{*} = A_{ijkl}(\rho, T)D_{kl} \tag{8.2.6$'$}$$

其中四阶张量$\boldsymbol{A}(\rho,T)$称为黏性张量。从(任何构形中的)各向同性的要求出发,

容易证明黏性张量 $\boldsymbol{A}(\rho,T)$ 必是所谓的四阶各向同性张量，即在任何的笛卡尔坐标系中其各分量都保持不变的四阶张量。可以证明，四阶各向同性张量只能具有如下的特殊形式：

$$A_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) + \nu(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}) \tag{8.2.7}$$

将(8.2.7)式代入(8.2.6)′式并利用 $\boldsymbol{D}$ 的对称性，可得

$$\sigma_{ij}^{*} = \lambda D_{kk}\delta_{ij} + 2\mu D_{ij},\quad \sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \lambda D_{kk}\delta_{ij} + 2\mu D_{ij} \tag{8.2.8}$$

式(8.2.8)也就是我们在前面由一般各向同性黏性流体线性化所得到的本构方程(8.2.6)式。各向同性牛顿黏性流体或各向同性线性黏性流体依赖于两个独立的黏性系数 μ 和 λ。

由(8.2.8)式进行缩并，有

$$\sigma_{jj} = -3p + (3\lambda + 2\mu)D_{kk} \tag{8.2.9}$$

所以总的球形平均压力 $\bar{p}$ 为

$$\bar{p} \equiv -\frac{\sigma_{jj}}{3} = p - \left(\lambda + \frac{2}{3}\mu\right)D_{kk} = p + p^{*} \tag{8.2.10}$$

其中

$$p^{*} \equiv -\left(\lambda + \frac{2}{3}\mu\right)D_{kk} \tag{8.2.11}$$

而新的黏性系数 k 由下式定义：

$$k \equiv \lambda + \frac{2}{3}\mu \tag{8.2.12}$$

压力 p 是黏性流体静止时所表现出的压力，即静水压力或热力学压力；压力 p^{*} 是黏性流体运动时所产生的附加压力，即黏性压力；而总的球形平均压力 $\bar{p}$ 则是运动中的黏性流体所表现出的总的压力，故称之为流体动力学压力。式(8.2.10)说明，黏性流体的流体动力学压力 $\bar{p}$ 由静水压力 p 和黏性压力 p^{*} 两部分组成；式(8.2.11)说明，黏性压力 p^{*} 与流体的相对体积压缩率 $(-\operatorname{div}\boldsymbol{v}) = -D_{kk}$ 成比例，$k\equiv\lambda + \frac{2}{3}\mu$ 即是产生单位体积压缩率所需要的压力，故通常将 k 称为体积黏性系数。

将伸缩率张量 $\boldsymbol{D}$ 分解为球形部分和偏量部分 $\boldsymbol{D}'$ 之和：

$$\boldsymbol{D} = \frac{1}{3}D_{kk}\boldsymbol{I} + \boldsymbol{D}',\quad D'_{kk} = 0 \tag{8.2.13}$$

则式(8.2.6)可化为

$$\boldsymbol{\sigma}^{*} = \lambda D_{kk}\boldsymbol{I} + 2\mu\left(\frac{1}{3}D_{kk}\boldsymbol{I} + \boldsymbol{D}'\right) = \left(\lambda + \frac{2}{3}\mu\right)D_{kk}\boldsymbol{I} + 2\mu\boldsymbol{D}'$$

即

$$\boldsymbol{\sigma}^* = kD_{kk}\boldsymbol{I} + 2\mu\boldsymbol{D}' = -p^*\boldsymbol{I} + 2\mu\boldsymbol{D}' \tag{8.2.14}$$

与流体的黏性畸变率 $\boldsymbol{D}'$ 成比例的张量 $2\mu\boldsymbol{D}'$，既是黏性应力张量 $\boldsymbol{\sigma}^*$ 的偏量张量，也是流体整个应力张量 $\boldsymbol{\sigma}$ 的偏量张量，即

$$(\boldsymbol{\sigma}^*)' = \boldsymbol{\sigma}' = 2\mu\boldsymbol{D}' \tag{8.2.15}$$

称之为黏性流体的（黏性）畸变应力张量，而相应地则将第一黏性系数 μ 称为畸变黏性系数。

式(8.2.14)说明，黏性应力张量 $\boldsymbol{\sigma}^*$ 等于黏性体积应力张量 $(-p^*\boldsymbol{I})$ 和（黏性）畸变应力张量 $2\mu\boldsymbol{D}'$ 之和。于是，在式(8.2.14)的基础上再加上静水应力张量 $(-p\boldsymbol{I})$ 之后，即可得出各向同性牛顿黏性流体的本构方程如下：

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\boldsymbol{I} + kD_{kk}\boldsymbol{I} + 2\mu\boldsymbol{D}' \tag{8.2.16}$$

简言之，各向同性牛顿黏性流体的应力张量 $\boldsymbol{\sigma}$ 等于球形的静水应力张量 $(-p\boldsymbol{I})$、球形的体积黏性应力张量 $kD_{kk}\boldsymbol{I} = -p^*\boldsymbol{I}$ 与纯偏量的畸变应力张量 $2\mu\boldsymbol{D}'$ 之和。

对大多数黏性流体而言，其体积黏性压力 p^* 常常是很小以致于可以忽略的，或者说其体积黏性系数远远小于其畸变黏性系数，即 $k \ll \mu$，于是可设

$$k = \lambda + \frac{2}{3}\mu = 0 \tag{8.2.17}$$

此时式(8.2.16)成为

$$\boldsymbol{\sigma} = -p(\rho, T)\boldsymbol{I} + 2\mu(T)\boldsymbol{D}' \tag{8.2.18}$$

我们可以将由本构方程(8.2.18)式所表达的流体称之为狭义的 Stokes 黏性流体，而在一般的流体力学教科书中人们则常常将其简单地称之为 Stokes 黏性流体，对这种黏性流体而言，其总的球形平均压力 $\bar{p}$ 也就是其静水压力 p。

8.3 线性黏弹性体的微分型本构关系

随着高分子材料以及复合材料的广泛应用，加上生物力学的兴起，黏弹性本构关系的研究越来越重要。

在第5章中我们证明了，简单材料构架无关形式的第二类 P-K 应力的本构方程可写为（不考虑温度效应时）：

$$\boldsymbol{\Sigma} = \hat{\boldsymbol{\Sigma}}(\boldsymbol{E}^t) = \hat{\boldsymbol{\Sigma}}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{E}_{\mathrm{p}}^t) \tag{a}$$

这里，我们将直至现时刻 t 为止的应变历史$\boldsymbol{E}^t$ 分解成了现时值$\boldsymbol{E}$ 和过去历史 $\boldsymbol{E}_{\mathrm{p}}^t$ 的独立作用。设过去历史一直维持现时值，则得材料的所谓的平衡态响应：

$$\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_E(\boldsymbol{E}) \equiv \hat{\boldsymbol{\Sigma}}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{E}) \tag{b}$$

设过去历史一直无变形，则得其瞬态响应：

$$\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_I(\boldsymbol{E}) \equiv \hat{\boldsymbol{\Sigma}}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{0}) \tag{c}$$

平衡态响应和瞬态响应的存在是一切实际材料的重要特性。定义二种附加应力 $\boldsymbol{K}$ 和 $\boldsymbol{H}$：

$$\hat{\boldsymbol{K}}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{E}_{\mathrm{p}}^t) = \hat{\boldsymbol{\Sigma}}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{E}_{\mathrm{p}}^t) - \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_E(\boldsymbol{E}) \tag{d}$$

$$\hat{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{E}_{\mathrm{p}}^t) = \hat{\boldsymbol{\Sigma}}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{E}_{\mathrm{p}}^t) - \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_I(\boldsymbol{E}) \tag{e}$$

则可有

$$\boldsymbol{\Sigma} = \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_E(\boldsymbol{E}) + \hat{\boldsymbol{K}}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{E}_{\mathrm{p}}^t) \tag{f}$$

$$\boldsymbol{\Sigma} = \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_I(\boldsymbol{E}) + \hat{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{E}_{\mathrm{p}}^t) \tag{g}$$

其中泛函 $\hat{\boldsymbol{K}}$ 和 $\hat{\boldsymbol{H}}$ 显然有性质：

$$\hat{\boldsymbol{K}}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{E}) = \boldsymbol{0}, \quad \hat{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0} \tag{h}$$

(f)式说明应力可分解为平衡态响应和附加应力之和，此附加应力是由于过去变形偏离现时值 $\boldsymbol{E}$ 所引起的；(g)式则说明应力亦可分解为瞬态应力和附加应力之和，此附加应力是由于过去变形不为零所致。由(f)式、(g)式出发全面讨论本构关系需要引入泛函"大小"以及"连续性"等概念，由于篇幅所限，这里不给以一般讨论，而只是从一维黏弹性的弹簧和黏壶模型出发给出微分型黏弹性本构关系，从而了解黏弹性材料的性质。这一思想的产生是自然的，因为材料的平衡态响应和瞬态响应都是由于其弹性性质的存在，而对弹性性质的偏离则是由于黏性内耗散的存在。

在一维应力状态下，弹性模量为 E 的线弹性材料本构关系可表达为

$$\sigma = E\varepsilon \quad (\mathrm{d}\varepsilon = \mathrm{d}\sigma/E) \tag{i}$$

该本构关系的特点是其瞬变性和可恢复性：在某一时刻施加一定的应力 σ 时，材料在该时刻立即便产生相应的应变 $\varepsilon = \sigma/E$；撤去 σ 时，ε 也便立即消失，而恢复原状。由式(i)所表达的一维线弹性本构关系可以由一个弹性模量为 E 的线性弹簧来表征。黏性系数为 η 的线性黏壶模型，其一维应力的本构关系可写为

$$\sigma = \eta\dot{\varepsilon} \quad \left(\mathrm{d}\varepsilon = \frac{\sigma}{\eta}\mathrm{d}t\right) \tag{j}$$

该本构关系的特点是时间滞后效应和流动性：在某一时刻施加一定的应力 σ 时，只

是使材料在该时刻产生一定的应变率 $\dot{\varepsilon}=\frac{\sigma}{\eta}$，而只有当此应力 σ 持续时间 $\mathrm{d}t$ 后才可在材料中产生一个应变增量 $\mathrm{d}\varepsilon=\frac{\sigma}{\eta}\mathrm{d}t$，只要 σ 维持，其应变就会以等应变率 $\dot{\varepsilon}=\frac{\sigma}{\eta}$ 流动。弹簧模型和黏壶模型分别对材料的某种性质给出了最简单的刻画方法，而实际的工程黏弹性材料则可视为弹性元件和黏性元件的各种组合，下面我们以典型例子来加以说明。

8.3.1　Maxwell 模型

图 8.1 中的模型是弹簧 E 和黏壶 η 的串联模型，称为 Maxwell 模型。二元件上有同样的应力

$$\sigma=\sigma^{e}=\sigma^{\eta}$$

和各自的应变 ε^{e}、ε^{η}，而此二者之和等于其总应变：

$$\varepsilon=\varepsilon^{e}+\varepsilon^{\eta},\quad \dot{\varepsilon}=\dot{\varepsilon}^{e}+\dot{\varepsilon}^{\eta}$$

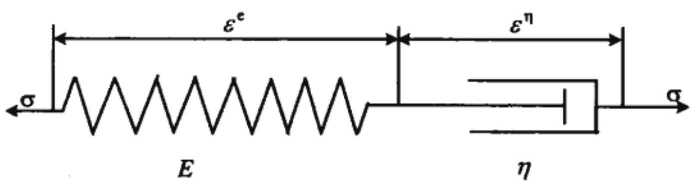


图 8.1　Maxwell 模型

由于

$$\varepsilon^{e}=\sigma^{e}/E$$
$$\dot{\varepsilon}^{e}=\dot{\sigma}^{e}/E=\dot{\sigma}/E$$
$$\dot{\varepsilon}^{\eta}=\sigma^{\eta}/\eta=\sigma/\eta$$

所以易得 Maxwell 模型的本构关系为

$$\dot{\varepsilon}=\frac{\dot{\sigma}}{E}+\frac{\sigma}{\eta}\tag{8.3.1}$$

或

$$\varepsilon=\frac{E+\eta D}{E\eta D}\sigma,\quad \sigma=\frac{E\eta D}{E+\eta D}\varepsilon\tag{8.3.2}$$

其中 $D=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ 为微分算子。

式(8.3.2)在形式上给出了模型的应力 σ 和应变 ε 互成比例的关系，这样有其代数上的简洁性和方便性，便于将之作为一个元件来进行处理，但在具体理解它们时则应以将其中的分母乘到其左端所得出的式子来理解之。

1. 恒应力下的蠕变特性

设在 $t=0^+$ 时对材料突加应力 σ_0 并维持此应力 σ_0 不变，此后在材料中所出现的应变发展规律 $\varepsilon(t)$ 称为蠕变(creep)规律。由于在突加应力 $\sigma=\sigma_0$ 时存在变形滞后效应的黏性元件 η 来不及变形($\varepsilon^{\eta}=0$)，初始时刻的应变将完全集中在弹性元件 E 之上($\varepsilon=\varepsilon^{e}=\sigma_0/E$)，所以此蠕变规律 $\varepsilon(t)$ 可由下列常微分方程的初值问题而求出：

$$\dot{\varepsilon}=\frac{\dot{\sigma}_0}{E}+\frac{\sigma_0}{\eta}=\frac{\sigma_0}{\eta},\quad \varepsilon(0^+)=\sigma_0/E$$

解之即可求得恒应力 $\sigma_0 H(t)$ 下 Maxwell 模型的蠕变解为

$$\varepsilon(t)=\left(\frac{1}{E}+\frac{1}{\eta}t\right)\sigma_0 H(t)=J_c(t)\sigma_0 \tag{8.3.3}$$

其中 $H(t)$ 表示从 0^+ 开始的单位阶梯函数；系数 $J_c(t)$ 为

$$J_c(t)=\left(\frac{1}{E}+\frac{1}{\eta}t\right)H(t)=\frac{\varepsilon(t)}{\sigma_0} \tag{8.3.3$'$}$$

表示在恒应力 σ_0 作用之下材料柔度随时间而不断增大的规律，称之为 Maxwell 模型的蠕变柔度(creeping compliance)，它是材料本身的一种性质。

式(8.3.3)所给出的 Maxwell 材料的蠕变行为如图 8.2(a)所示，它表明：Maxwell 材料确实具有蠕变行为，这在定性上可以刻画高分子材料的蠕变特性；但是它只能以等应变率 $\dot{\varepsilon}=\sigma_0/\eta$ 而蠕变，所以不存在有限的"平衡态应变"，因为在 $t\to\infty$ 时应变将蠕变而发展为无穷大，这又是该模型不能很好地刻画高分子材料性质的缺陷，即该种材料不存在有限的平衡态应变。

2. 恒应变下的应力松弛特性

设于 $t=0^+$ 时对材料突加应变 ε_0 并维持此应变 ε_0 不变，在材料中所表现的应力发展规律 $\sigma(t)$ 称为其应力松弛(stress relaxation)规律。由于黏性元件 η 变形的延迟效应，突加应变 ε_0 在一开始将完全集中于弹性元件 E 之上，故相当于其承受一个突加应力 $\sigma_0=E\varepsilon_0$，所以其应力松弛规律 $\sigma(t)$ 可由下列常微分方程的初值问题而求出：

$$0=\dot{\varepsilon}=\frac{\dot{\sigma}}{E}+\frac{\sigma}{\eta},\quad \sigma(0^+)=\varepsilon_0 E$$

由此可求出恒应变 $\varepsilon_0 H(t)=\frac{\sigma_0}{E}H(t)$ 之下 Maxwell 材料的应力松弛规律(见图

8.2(b))为

$$\sigma(t) = \varepsilon_0 E e^{-t/t_s} H(t) = E_R(t)\varepsilon_0 \tag{8.3.4}$$

其中量 $E_R(t)$为

$$E_R(t) = E e^{-t/t_s} H(t) = \sigma(t)/\varepsilon_0 \tag{8.3.4$'$}$$

表示保持恒应变 ε_0 时材料表现出来的随时间而逐渐松弛减少的模量，称之为 Maxwell 材料的松弛模量；而具有时间量纲的时间常数 t_s 为

$$t_s = \frac{\eta}{E} \tag{8.3.5}$$

称为松弛时间(relaxation time)。t_s 越大(小)，材料应力松弛得越慢(快)，其数学上的意义如图 8.2(b)所示。松弛时间 t_s 是材料本身的一种性质，它完全刻画了 Maxwell 材料的应力松弛特性。

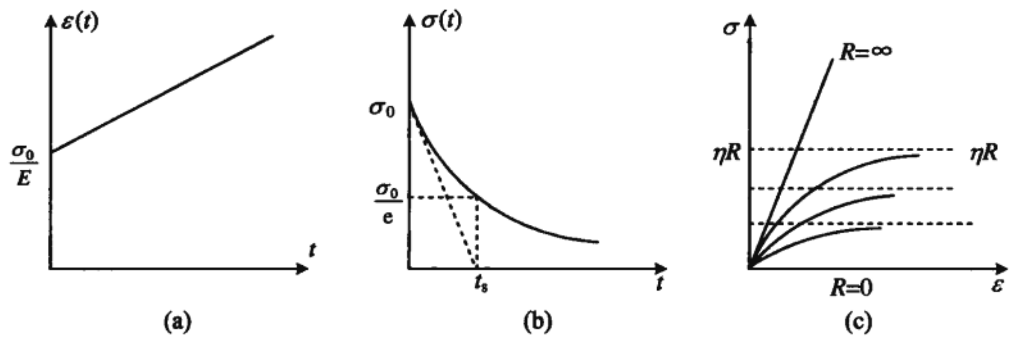


图 8.2　Maxwell 体的蠕变、松弛和恒应变率应力应变曲线

由式(8.3.4)和图 8.2(b)可见：Maxwell 材料确实存在应力松弛现象；但是 $t \to \infty$ 时材料的应力会松弛至 0，而这一点是与高分子固体材料存在有限的非零平衡态松弛应力不相符合的。

3. 恒应变率下的应力应变关系

现在我们来研究使材料保持恒应变率(constant strain rate)$\dot{\varepsilon} = R$ 而变形时材料的应力应变关系。对 Maxwell 材料突加应力 σ_0 时，由于黏性元件 η 的变形滞后效应，其全部应变将由弹性元件 E 所承担并且等于 $\varepsilon_0 = \sigma_0/E$，以此突加应力 σ_0 和突加应变 $\varepsilon_0 = \sigma_0/E$ 为初始条件，Maxwell 材料在恒应变率 $\dot{\varepsilon} = R$ 之下应力和应变的发展规律将分别由如下常微分方程的初值问题来决定：

$$\frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{\eta} = \dot{\varepsilon} = R, \quad \sigma(0^+) = \sigma_0$$

$$\dot{\varepsilon} = R, \quad \varepsilon(0^+) = \sigma_0/E$$

分别解之,可得

$$\sigma(t) = \mathrm{e}^{-t/t_s}[\sigma_0 + ERt_s(\mathrm{e}^{t/t_s} - 1)], \quad \varepsilon = \frac{\sigma_0}{E} + Rt$$

消去 t 即可得出其恒应变率下的应力应变曲线。特别地,对于 $\sigma_0 = 0, \varepsilon_0 = \sigma_0/E = 0$,我们即可由此得出 Maxwell 材料从自然状态(零应力和零应变)出发的恒应变率下的应力应变曲线:

$$\sigma = \eta R[1 - \mathrm{e}^{-\varepsilon/Rt_s}] \tag{8.3.6}$$

对于从 $R=0$ 直至 $R=\infty$ 的不同恒应变率 R,式(8.3.6)所给出的应力应变曲线如图 8.2(c)所示。值得注意的是:各条恒应变率下的应力应变曲线在 $\varepsilon=\infty$ 时的渐近线分别为不同的水平线 $\sigma=\eta R$,但是它们在坐标原点处的斜率却都等于 $\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}\varepsilon = E$(只有 $R=0$ 时的情况例外,此种情况下的应力应变曲线为 $\sigma=0$)。

由以上的分析结果可见,Maxwell 模型可以以一定的方式反映出应变率对材料应力应变曲线的影响,随着应变率的提高,材料的应力应变曲线有上升的趋势。

8.3.2 Voigt 模型

如图 8.3 所示的弹簧 E 和黏壶 η 并联的模型称为 Voigt 模型。二元件上有相同应变 ε:

$$\varepsilon = \varepsilon^e = \varepsilon^\eta$$

而各自应力 σ^e、σ^η 之和等于其总应力:

$$\sigma = \sigma^e + \sigma^\eta$$

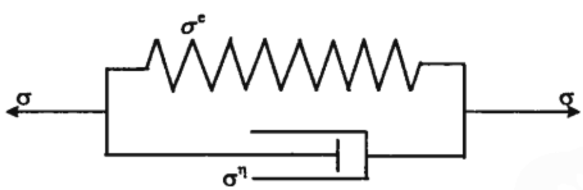


图 8.3 Voigt 模型

由于

$$\sigma^e = E\varepsilon^e = E\varepsilon, \quad \sigma^\eta = \eta\dot{\varepsilon}^e = \eta\dot{\varepsilon}$$

所以易得 Voigt 材料的本构方程为

$$\sigma = E\varepsilon + \eta\dot{\varepsilon} \tag{8.3.7}$$

或

$$\sigma = (E + \eta D)\varepsilon, \quad \varepsilon = \frac{1}{E + \eta D}\sigma \tag{8.3.8}$$

1. 恒应力下的蠕变特性

设在$t = 0^+$时对材料突加以恒值应力σ_0，η元件的变形延迟效应将使得初始时刻的应变$\varepsilon^\eta(0^+) = \varepsilon(0^+) = 0$，于是恒应力$\sigma_0$之下的蠕变解将由如下常微分方程的初值问题来确定：

$$\sigma_0 = E\varepsilon + \eta\dot{\varepsilon}, \quad \varepsilon(0^+) = 0$$

解之即可得恒应力$\sigma_0 H(t)$之下的蠕变解为

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E}(1 - e^{-t/t_r})H(t) = J_c(t)\sigma_0 \tag{8.3.9}$$

其中蠕变柔度为

$$J_c(t) = \frac{(1 - e^{-t/t_r})H(t)}{E} = \varepsilon(t)/\sigma_0 \tag{8.3.9$'$}$$

而具有时间量纲的时间常数t_r为

$$t_r = \eta/E \tag{8.3.10}$$

称为推迟时间(retardation time)，作为材料参数它完全刻画了 Voigt 材料的蠕变行为。式(8.3.9)和推迟时间的几何意义如图 8.4(a)所示。如果在应变蠕变至某一值ε_1的时刻t_1突然将应力卸载至零，则此后的应变蠕变规律将是如下常微分方程初值问题的解：

$$0 = \sigma = E\varepsilon + \eta\dot{\varepsilon}, \quad \varepsilon(t_1) = \varepsilon_1$$

容易解出此后继的蠕变解为

$$\varepsilon = \varepsilon_1 e^{-(t-t_1)/t_r}$$

2. 恒应变下的应力松弛特性

将$\varepsilon = \varepsilon_0 H(t)$代入本构方程(8.3.7)式之中，即可得到其恒应变$\varepsilon_0 H(t)$之下的应力松弛解如下：

$$\sigma = E\varepsilon_0 H(t) + \eta\varepsilon_0\delta(t) \tag{8.3.11}$$

其中$\delta(t)$为δ函数，它的值处处为 0 而只在起始时刻$t = 0$处具有值∞。式(8.3.11)的几何意义如图 8.4(b)所示。式(8.3.11)表明：只有在初始时刻突加无穷大的应力才可使得材料获得有限值的应变，而突加有限的应力时只能使材料产生零应变，这一点正是由弹性元件和黏壶元件并联而成的 Voigt 模型的特点。式(8.3.11)还表明：在恒应变$\varepsilon_0 H(t)$之下，Voigt 材料的应力保持常数而并不产生应力松弛，所以 Voigt 材料作为一种模型虽然可以较好地刻画材料的蠕变行为，但是却无法很好地刻画高分子材料所存在的应力松弛现象。

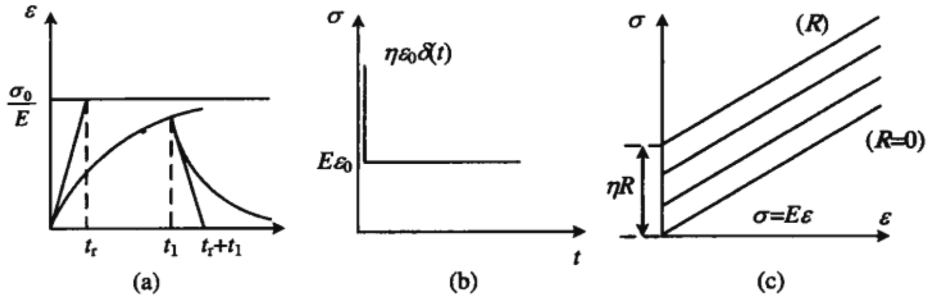


图 8.4 Voigt 体的蠕变、松弛和恒应变率应力应变曲线

3. 恒应变率下的应力应变关系

由 Voigt 材料的本构关系(8.3.7)式立即可得其恒应变率 $\dot{\varepsilon}=R$ 下的应力应变关系为

$$\sigma = E\varepsilon + \eta R \tag{8.3.12}$$

以 R 为参数所表达的应力应变曲线示于图 8.4(c)之中，可以看到，随着应变率的提高，材料应力应变曲线有越来越升高的趋势。

8.3.3 标准线性黏弹性模型(Kelvin 模型)

如前所述，Maxwell 材料能定性地反应材料在等应力下的应变蠕变行为，但是蠕变结果的平衡态应变却等于无穷大，即材料不存在有限的平衡应变；Maxwell 模型能较好地刻画材料在等应变下的应力松弛行为，但是应力松弛却为零，即材料不存在有限的平衡态应力。Voigt 材料能较好地刻画材料在等应力下的应变蠕变行为，而且蠕变结果的平衡态应变为有限值，即材料可存在有限的平衡态应变；但是 Voigt 材料却不能很好地刻画材料在等应变下的应力松弛行为，因为在等应变之下它并不发生应力松弛现象，而且有限的瞬态应力并不能在材料中产生有限的瞬态应变。以上的两种模型虽然都能在一定程度上反映应变率对材料应力应变曲线的影响，但却都是比较粗浅的。为了能够更全面地刻画高分子材料的蠕变行为、应力松弛行为以及应力应变关系的应变率效应，人们又引入了各种更复杂的材料模型。

图 8.5(a)和图 8.5(b)表示的模型称为标准线性黏弹性模型，现在我们来导出它们的本构方程。利用 Maxwell 模型的本构方程(8.3.2)式和 Voigt 模型的本构方程(8.3.8)式，对图 8.5(a)和图 8.5(b)，我们可分别有

$$\sigma = \sigma_0 + \sigma_1 = E_0\varepsilon + \frac{E_1\eta_1 D}{E_1 + \eta_1 D}\varepsilon = E_0\varepsilon + \frac{E_1 D}{E_1/\eta_1 + D}\varepsilon$$

$$\varepsilon = \varepsilon'_0 + \varepsilon'_1 = \frac{\sigma}{E'_0} + \frac{\sigma}{E'_1 + \eta'_1 D}$$

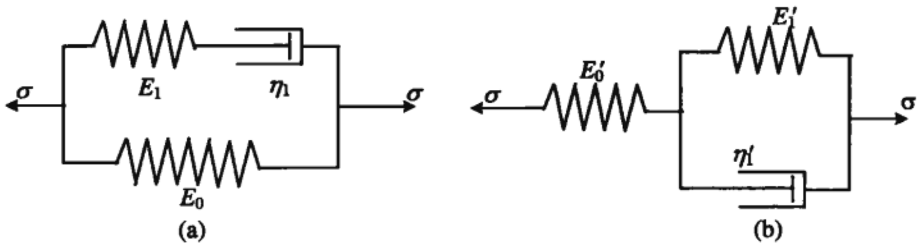


图 8.5　标准线性黏弹性模型

将以上两式展开,可分别将它们写为如下形式的本构方程:

$$\dot{\sigma} + \frac{E_1}{\eta_1}\sigma = (E_0 + E_1)\dot{\varepsilon} + \frac{E_0 E_1}{\eta_1}\varepsilon \tag{8.3.13a}$$

$$\dot{\sigma} + \frac{E_0{}' + E_1{}'}{\eta_1{}'}\sigma = E_0{}'\dot{\varepsilon} + \frac{E_0{}'E_1{}'}{\eta_1{}'}\varepsilon \tag{8.3.13b}$$

对比式(8.3.13a)和式(8.3.13b)可见,只要它们的材料参数间有如下的关系:

$$E_0{}' = E_0 + E_1 \equiv b_1$$

$$\frac{E_0{}'E_1{}'}{\eta_1{}'} = \frac{E_0 E_1}{\eta_1} \equiv b_0$$

$$\frac{E_0{}' + E_1{}'}{\eta_1{}'} = \frac{E_1}{\eta_1} \equiv a_0$$

则式(8.3.13a)和式(8.3.13b)便重合了。采用新的材料参数 a_0、b_0 和 b_1,可将式(8.3.13a)和式(8.3.13b)统一地写为如下形式:

$$\dot{\sigma} + a_0\sigma = b_1\dot{\varepsilon} + b_0\varepsilon \tag{8.3.14}$$

还有一些元件的组合也可归结为形如(8.3.14)式的一阶微分型本构关系,所有这些材料都称为标准线性黏弹性材料或 Kelvin 材料。由于(8.3.14)式中含有三个独立的材料常数,故我们也可以将它们写为如下方程中的任何一个:

$$\dot{\sigma} + \frac{\sigma}{t_s} = E_i\dot{\varepsilon} + \frac{E_e}{t_s}\varepsilon \tag{8.3.15}$$

$$t_s\dot{\sigma} + \sigma = E_e(t_r\dot{\varepsilon} + \varepsilon) \tag{8.3.16}$$

在式(8.3.15)和式(8.3.16)中,各有三个新的独立材料常数 E_e、E_i、t_s 和 E_e、t_r、t_s。对比以上两式,易见四个材料常数 E_i、E_e、t_s、t_r 之间存在如下关系:

$$E_e t_r = E_i t_s \tag{8.3.17}$$

故它们之中只有三个是独立的。E_i 是突加应力和应变($\dot{\sigma}=\infty,\dot{\varepsilon}=\infty$)时材料表现出的弹性模量,$E_i=\dot{\sigma}/\dot{\varepsilon}=\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}\varepsilon$,故称为瞬态弹性模量;$E_e$ 是平衡态之下($\dot{\sigma}=0,\dot{\varepsilon}=0$)时材料表现出的弹性模量,$E_e=\dfrac{\sigma}{\varepsilon}$,故称为平衡态弹性模量。可以证明:(8.3.16)式规定的材料在恒应力下的蠕变行为、恒应变下的应力松弛行为以及从自然状态出发的恒应变率 R 下的应力应变关系分别为

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E_e}\left[1 + E_e\left(\frac{1}{E_i} - \frac{1}{E_e}\right)\mathrm{e}^{-t/t_r}\right] \tag{8.3.18}$$

$$\sigma(t) = E_e\varepsilon_0\left[1 + \frac{1}{E_e}(E_i - E_e)\mathrm{e}^{-t/t_s}\right] \tag{8.3.19}$$

$$\sigma(\varepsilon) = E_e\varepsilon + (E_i - E_e)Rt_s(1 - \mathrm{e}^{-\varepsilon/Rt_s}) \tag{8.3.20}$$

事实上,恒应力 σ_0 之下的蠕变行为可由如下常微分方程的初值问题求得:

$$\sigma_0 = E_e(t_r\dot{\varepsilon} + \varepsilon), \quad \varepsilon(0^+) = \sigma_0/E_i$$

解之,即可得蠕变规律(8.3.18)式。恒应变 ε_0 之下的应力松弛行为可由如下常微分方程的初值问题求得:

$$\dot{\sigma} + \frac{\sigma}{t_s} = \frac{E_e}{t_s}\varepsilon, \quad \sigma(0^+) = E_i\varepsilon_0$$

解之,即可得应力松弛规律(8.3.19)式。从自然状态出发的恒应变率 R 下的应力应变关系可由如下常微分方程的初值问题求得:

$$\dot{\varepsilon} = R, \quad \varepsilon(0^+) = 0; \quad \varepsilon = Rt$$

$$\dot{\sigma} + \frac{\sigma}{t_s} = E_iR + \frac{E_e}{t_s}Rt, \quad \sigma(0^+) = 0$$

解之并消去 t,即可得恒应变率 R 下的应力应变关系(8.3.20)式。

式(8.3.18)、式(8.3.19)、式(8.3.20)分别如图 8.6(a)、图 8.6(b)、图 8.6(c)所示。由此三式以及此三图可见,具有时间量纲的参数 t_r 和 t_s 分别代表应变蠕变中的推迟时间和应力松弛中的松弛时间。同时还可发现,此种材料同时具有有限的瞬态响应和有限的平衡态响应:材料的蠕变规律由其有限的瞬态应变 σ_0/E_i 最后蠕变为有限的平衡态应变 σ_0/E_e,材料的应力松弛规律由其有限的瞬态应力 $E_i\varepsilon_0$ 最后松弛为有限的平衡态应力 $E_e\varepsilon_0$。此外我们还可发现此种材料确实存在着应力应变关系的应变率效应:对应 $R=0$,我们得到准静态的弹性本构关系 $\sigma=E_e\varepsilon$,随着应变率 R 的增大,具有非线性特征的应力应变曲线逐渐上升,当应变率 R 趋于无穷大时,我们即得到突加的瞬态弹性本构关系 $\sigma=E_i\varepsilon$,而每一条恒应变率 $R>0$ 的应力应变曲线在原点处的斜率都等于其瞬态弹性模量 E_i。

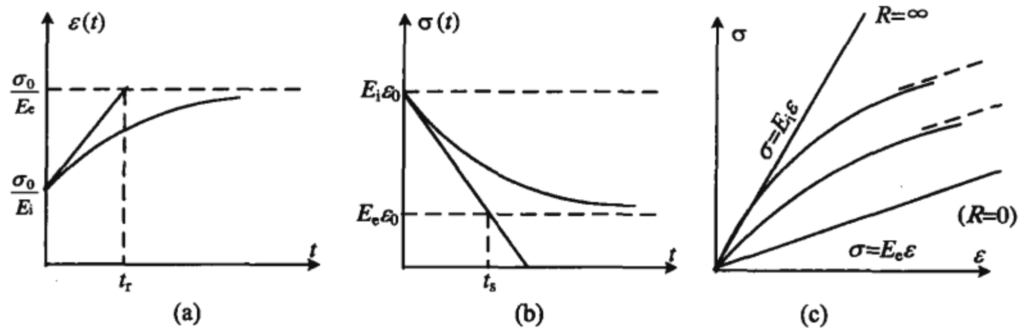


图 8.6 标准线性黏弹性体的蠕变、松弛和恒应变率应力应变曲线

由以上的分析总结可以看出:标准线性黏弹性材料总体上可以比较全面地刻画高分子材料的黏弹性变形特征,不失是一种简洁和有效的线性黏弹性本构关系。但是,它也存在缺点,这就是它只含有一个松弛时间和推迟时间。为此人们又提出了一些新的线性黏弹性本构关系。

8.3.4 广义 Maxwell 模型和广义 Voigt 模型

为了能够包括多个松弛时间,人们所提出的第一类线性黏弹性本构模型是所谓的广义 Maxwell 模型,它是由若干个 Maxwell 体并联,同时又和某一弹簧并联而构成的,见图 8.7(a)。附加一个并联弹簧是为了保证材料具有有限的(非零)松弛应力。

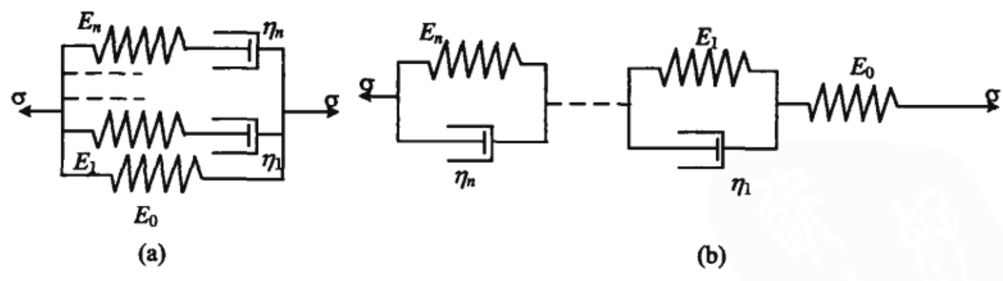


图 8.7 广义 Maxwell 体和广义 Voigt 体模型

如果我们把应变和应力分别与电压和电流相类比的话,则力学元件的柔度和模量便分别与电学元件的电阻和电导相对应。下面我们就以此种思想为指导,并以 Maxwell 体和 Voigt 体的已有结果为基础来进行讨论。

一个 Maxwell 体的应力松弛规律为

$$\sigma = \sigma_0 e^{-t/t_s} = E\varepsilon_0 e^{-t/t_s} \quad \left(t_s = \frac{\eta}{E}\right)$$

其松弛模量为

$$E_r(t) = \frac{\sigma(t)}{\varepsilon_0} = E e^{-t/t_s}$$

由众多子元件并列而成的广义 Maxwell 体的松弛模量应该等于各子元件松弛模量之和,即

$$E_r(t) = E_0 + \sum_1^n E_k e^{-t/t_{sk}} \tag{8.3.21}$$

其中 E_k、$t_{sk}=\frac{\eta_k}{E_k}$、$\eta_k(k=1,2,\cdots,n)$分别为各子 Maxwell 元件的模量、松弛时间和黏性系数,E_0 为附加并联弹簧的模量。广义 Maxwell 体的应力等于各并联子元件的应力之和,故其应力松弛规律为

$$\sigma = \sigma_0 + \sum_1^n \sigma_k = \varepsilon_0 E_0 + \varepsilon_0 \sum_1^n E_k e^{-t/t_{sk}} \quad \left(t_{sk} = \frac{\eta_k}{E_k}\right)$$

广义 Maxwell 体的本构关系可由 $\sigma = \sigma_0 + \sum_1^n \sigma_k$ 和 Maxwell 体的本构关系(8.3.2)式而得到:

$$\sigma = \left[E_0 + \sum_1^n \frac{E_k \eta_k D}{E_k + \eta_k D}\right]\varepsilon \tag{8.3.22}$$

将形式上的方程(8.3.22)式展开,即为一个包含直至 σ 及 ε 的 n 阶时间导数的常微分方程。

广义 Maxwell 体包含了 n 个松弛时间 t_{sk},但这些松弛时间是各自离散的。我们可以视 $E_k e^{\frac{-t}{t_{sk}}}$ 为松弛时间为 t_{sk} 的 Maxwell 子元件对松弛模量的贡献。如果我们设想材料所包含的松弛时间越来越多而且趋近于连续分布,则可假设在松弛时间间隔$[t_s, t_s + dt_s]$上的元件对松弛模量的贡献为$G(t_s)e^{\frac{-t}{t_s}}dt_s$,则松弛时间在$[0,\infty)$上所有元件所引起的松弛模量将为$\int_0^\infty G(t_s)e^{\frac{-t}{t_s}}dt_s$,再加上瞬态元件 E_0 的贡献,即可得到连续谱的广义 Maxwell 体的松弛模量为

$$E_r(t) = E_0 + \int_0^\infty G(t_s) e^{-t/t_s} dt_s \tag{8.3.23}$$

其中$G(t_s)$称为松弛谱密度或简称松弛谱,它完全是黏弹性材料本身的性质,其意义是分布在单位松弛时间段上的模量。

图 8.7(b)所示模型称为广义 Voigt 体,它是由一系列 Voigt 体和一个弹簧串

联而成的。附加串联一个弹簧是为了保证材料在有限应力的作用之下可以存在有限而非零的瞬态应变。

由于附加弹簧的柔度为 $J_0 = \dfrac{1}{E_0}$；各 Voigt 体的柔度和蠕变柔度分别为 $J_k = \dfrac{1}{E_k}$ 和 $J_k(1 - e^{\frac{-t}{t_{rk}}})(k = 1,2,\cdots,n)$，其中 $t_{rk} = \dfrac{\eta_k}{E_k}$ 为第 k 个 Voigt 体的推迟时间，而在恒应力 σ_0 作用之下广义 Voigt 体的蠕变柔度 J_c 等于各串联子元件蠕变柔度之和，故有

$$J_c = \frac{1}{E_0} + \sum_1^n \frac{1}{E_k}(1 - e^{\frac{-t}{t_{rk}}}) = J_0 + \sum_1^n J_k(1 - e^{\frac{-t}{t_{rk}}}) \tag{8.3.24}$$

由 $\varepsilon = \varepsilon_0 + \sum\limits_1^n \varepsilon_k$ 以及 Maxwell 体和 Voigt 体的本构方程(8.3.2)式、(8.3.8)式，可以得到广义 Voigt 体的本构关系：

$$\varepsilon = \left[\frac{1}{E_0} + \sum_1^n \frac{1}{E_k + \eta_k D}\right]\sigma \tag{8.3.25}$$

将之展开，即可得到一个包含直至 σ 及 ε 的 n 阶时间导数的常微分方程。

与前面的叙述类似，也可以引入有连续谱特性的广义 Voigt 体，其蠕变柔度为

$$J_c = J_0 + \int_0^\infty J(t_r)(1 - e^{\frac{-t}{t_r}})\mathrm{d}t_r \tag{8.3.26}$$

其中的函数 $J(t_r)$ 称之为材料的蠕变谱密度或简称蠕变谱，它也是材料本身的性质。

8.4　线性黏弹性体的积分型本构关系

在 8.3 节中我们引入了若干类型的线性黏弹性本构关系，并分别讨论了它们在恒应力下的蠕变行为、恒应变下的应力松弛行为以及应力应变关系的应变率效应。在那里所引入的各种类型的线性黏弹性本构关系都是微分形式的本构关系，此节我们将从效应叠加的概念出发，来讨论线性黏弹性材料的积分型本构关系。

任意的应力和应变历史都可以看成是一系列阶梯形脉冲的叠加，如图 8.8 中的应变历史可写为

$$\varepsilon(t) = \sum \Delta\varepsilon_k H(t - t_k') \tag{8.4.1}$$

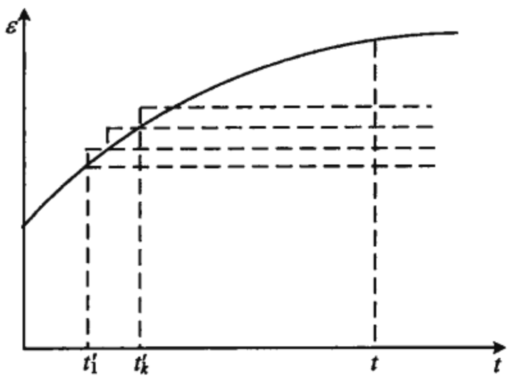


图 8.8　典型应变历史

根据 8.3 节中所讲的恒应变下材料应力松弛的概念，我们可假设在历史上时刻 t_k' 所产生的每一应变增量 $\Delta\epsilon_k$ 对现时刻 t 所引起之应力贡献 $\Delta\sigma_k$ 按规律

$$\Delta\sigma_k = \Delta\epsilon_k g(t - t_k') \tag{8.4.2}$$

而发生应力松弛，其中函数 $g(t - t_k')$ 为松弛模量，它随着流逝时间 $\tau = t - t_k'$ 而松弛。Boltzmann 提出了一个对各历史时间间隔上的效应可进行叠加的所谓 Boltzmann 叠加原理，将之应用到历史上各应变增量对现时刻 t 应力的贡献，则可以写为

$$\sigma(t) = \sum \Delta\sigma_k = \sum \Delta\epsilon_k g(t - t_k') \tag{8.4.3}$$

对现时刻 t 之前整个历史$(-\infty, t]$各微间隔上的响应进行积分叠加，即可得黏弹性材料的积分型本构方程为

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^{t} g(t - t')\dot{\varepsilon}(t')\mathrm{d}t' \tag{8.4.4}$$

引入流逝时间

$$\tau = t - t' \tag{8.4.5}$$

则(8.4.4)式可写为

$$\sigma(t) = \int_0^\infty g(\tau)\dot{\varepsilon}(t - \tau)\mathrm{d}\tau \tag{8.4.4$'$}$$

式(8.4.4)和式(8.4.4)′即是线性黏弹性材料的 Boltzmann 积分型本构关系，请注意两式中的 $\dot{\varepsilon}(t') = \dot{\varepsilon}(t - \tau)$ 都是对自变量 t' 求导。对式(8.4.4)′进行分部积分，并假定

$$g(\infty) = 0 \quad \text{（记忆减退）} \tag{8.4.6}$$

则可将之化为如下形式：

$$\sigma(t) = g(0)\varepsilon(t) + \int_0^\infty \dot{g}(t)\varepsilon(t - \tau)\mathrm{d}\tau = g(0)\varepsilon(t) + \int_0^\infty \dot{g}(\tau)\varepsilon'(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{8.4.7}$$

这就是积分型线性黏弹性本构关系的常见形式，其中的积分是以流逝时间 τ 为积分变量而进行积分的。

式(8.4.7)中的第一项 $g(0)\varepsilon(t)$ 表示时刻 t 的应变 $\varepsilon(t)$ 以瞬态模量 $g(0)$ 所引起的应力，为瞬态响应，而第二项则表示 t 以前的应变历史 $\varepsilon^t(\tau)=\varepsilon(t-\tau)$ 共同对现时刻应力的贡献。$g(\tau)$ 称为松弛模量，可直接通过实验或者通过某种理论模型而确定之。例如，当我们分别假定 $g(\tau)$ 具有如下的离散松弛谱和连续松弛谱形式：

$$g(\tau) = g_e + \sum_1^n g_k e^{\frac{-\tau}{t_{sk}}}$$

$$g(\tau) = g_e + \int_0^\infty G(t_s) e^{\frac{-\tau}{t_s}} \mathrm{d}t_s$$

时，将之代入(8.4.7)式中则可分别得出对应离散松弛谱和连续松弛谱形式的本构关系。

将以上的论述推广至复杂应力状态时，(8.4.4)式和(8.4.7)式中的松弛模量 g 将成为四阶的松弛模量张量 $\boldsymbol{M}$，于是(8.4.4)式和(8.4.7)式的一般张量形式为

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \int_{-\infty}^{t} \boldsymbol{M}(t-t') : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t')\mathrm{d}t' \tag{8.4.8}$$

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \boldsymbol{M}(0) : \boldsymbol{\varepsilon}(t) + \int_0^\infty \dot{\boldsymbol{M}}(\tau) : \boldsymbol{\varepsilon}^t(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{8.4.9}$$

对于一般的情况(即使松弛模量 $\boldsymbol{M}$ 为完全对称的四阶张量)，它们所表达的仍然是各向异性的线性黏弹性本构关系；而当松弛模量 $\boldsymbol{M}$ 为各向同性的四阶张量时，即它们的任意分量都与坐标系选取无关时，它们所表达的材料才为各向同性黏弹性本构关系(请读者思考之)。各向同性四阶张量的表达式为

$$M_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) + \gamma(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}) \tag{8.4.10}$$

将之代入(8.4.8)式和(8.4.9)式之中可分别得

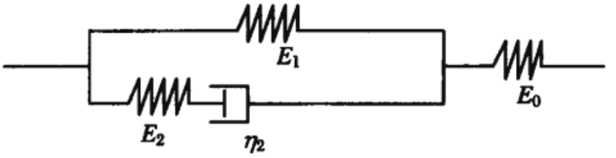
$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \boldsymbol{I}\int_{-\infty}^{t} \lambda(t-t')\varepsilon_{kk}(t')\mathrm{d}t' + \int_{-\infty}^{t} 2\mu(t-t')\,\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t')\mathrm{d}t' \tag{8.4.11}$$

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \lambda(0)\varepsilon_{kk}(t)\boldsymbol{I} + 2\mu(0)\boldsymbol{\varepsilon}(t) + \int_0^\infty \{\dot{\lambda}(\tau)\varepsilon_{kk}^t(\tau)\boldsymbol{I} + 2\dot{\mu}(\tau)\,\boldsymbol{\varepsilon}^t(\tau)\}\mathrm{d}\tau \tag{8.4.12}$$

其中的 $\boldsymbol{I}$ 表示二阶单位张量。

习　　题

8.1　试对如图(题 8.1 图)模型求出其本构关系，并求出其瞬态杨氏模量 E_i、静态杨氏模量 E_e、推迟时间 t_r、松弛时间 t_s；求出其恒应力 $\sigma_0 H(t)$下的蠕变行为、恒应变 $\varepsilon_0 H(t)$下的松弛行为、恒应变率 $\dot{\varepsilon}=R$ 下的应力应变关系 $\sigma(\varepsilon)$。



题 8.1 图

8.2　试由 Maxwell 体的应力松弛模量表达式 $E_r(t)=Ee^{-t/t_s}$和 Bolzmann 叠加原理，写出 Maxwell 体的积分型本构关系，并由此出发导出其微分型本构关系。

8.3　试由 Voigt 体的蠕变柔度表达式 $J_c(t)=\dfrac{(1-e^{-t/t_s})}{E}$和 Bolzmann 叠加原理，写出 Voigt 体的积分型本构关系，并由此出发导出其微分型本构关系。

8.4　设材料的松弛模量 $E_r(t)$是时间 t 的减函数，其蠕变柔度 $J_c(t)$是时间 t 的增函数。试证明：$E_r(t)J_c(t)\leqslant 1$。

8.5　对标准线性黏弹性材料，试求出其蠕变行为(8.3.18)式、应力松弛行为(8.3.19)式、恒应变率下的应力应变关系(8.3.20)式。

第 9 章　黏塑性材料

9.1　超应力型的黏塑性本构关系

9.1.1　黏塑性材料的概念

在第 7 章中我们介绍了弹塑性材料及其本构关系，弹塑性材料的基本特点是：材料存在着一个明显的屈服极限（在复杂应力之下即是材料存在着一个明显的屈服面），当材料的应力状态低于其屈服极限（或位于屈服面之内）时，材料只发生瞬态和可逆的弹性变形，而当材料达到或超过其屈服极限（或达到屈服面之上）时，材料将在产生弹性变形的同时还将产生伴随而生的不可逆塑性变形。我们将这种材料称之为"弹塑性材料"，因为它的屈服极限（或屈服面）是与其加载速率或应变率无关的。但是，实验证明：除了少数的金属材料（例如纯铝）其屈服应力与应变率基本无关以外，大多数材料的屈服应力是与应变率有着明显的依赖关系的，这就是材料屈服应力和塑性变形的应变率效应，我们将这种屈服应力和塑性变形发展具有应变率效应的材料称之为黏塑性材料。绝大多数的材料具有所谓的正应变率敏感特性，即屈服应力随着应变率的提高而提高，例如 0.22% 碳含量的低碳钢应变率为 $\dot{\varepsilon}=200\ s^{-1}$ 时其屈服应力 5.76×10^8 Pa 约是准静态 $\dot{\varepsilon}=10^{-3}\ s^{-1}$ 时屈服应力 2.71×10^8 Pa 的 2 倍还多（Clark 和 Duwez）；而极少数材料具有所谓的负应变率敏感特性，即屈服应力随着应变率的提高而降低，例如铝锂合金在应变率为 $\dot{\varepsilon}=2.5\times10^3\ s^{-1}$ 时其（应变 ε 为 0.15 的）屈服应力 4.5×10^8 Pa 仅是准静态 $\dot{\varepsilon}=10^{-3}\ s^{-1}$ 时（应变 ε 为 0.15 的）屈服应力 6.0×10^8 Pa 的 3/4 左右。许多研究者

通过不同的实验还研究了一些材料在复杂应力状态之下的屈服面与应变率的关系，结果也表明大多数材料的屈服面都是与应变率明显有关的。因此，在第 7 章中我们所介绍的弹塑性材料的本构关系只有对那些应变率不敏感的材料，或者当我们所研究的问题中应变率范围变化不大而将此应变率范围中的平均屈服面作为其屈服面时才是近似适用的，而对大多数应变率敏感的材料则必须采用本章所介绍的黏塑性材料的本构关系。

9.1.2 不考虑应变硬化效应时的一维应力黏塑性本构关系

以一维应力条件下的有关实验数据为基础，人们提出了一系列不同形式的黏塑性本构关系，借以反映不考虑应变硬化效应时的材料屈服应力 σ 与应变率 $\dot{\varepsilon}$ 之间的依赖关系，其常见的代表形式为如下两种：

$$\frac{\sigma}{\sigma_0} = 1 + \left(\frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}_0}\right)^{\gamma} = 1 + \left(\frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}_0}\right)^{1/n} \quad \left(\gamma = \frac{1}{n}\right) \tag{9.1.1a}$$

$$\frac{\sigma}{\sigma_0} = 1 + \lambda \ln\left(\frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}_0}\right) \tag{9.1.2a}$$

其中 $\gamma = 1/n$、λ 为无量纲常数，具有应力量纲的常数 σ_0 对于(9.1.2a)式而言表示准静态常应变率条件 $\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_0$（例如 $10^{-3}\ \mathrm{s}^{-1}$）下材料的屈服应力，而对于(9.1.1a)式而言 $2\sigma_0$ 则表示准静态常应变率条件 $\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_0$（例如 $10^{-3}\ \mathrm{s}^{-1}$）下材料的屈服应力。由于 γ 和 λ 分别表示双对数平面 $\ln\sigma/\sigma_0 \sim \ln\dot{\varepsilon}/\dot{\varepsilon}_0$ 和单对数平面 $\sigma/\sigma_0 \sim \ln\dot{\varepsilon}/\dot{\varepsilon}_0$ 上的斜率，即

$$\gamma = \frac{\mathrm{d}\ln(\sigma/\sigma_0 - 1)}{\mathrm{d}(\ln\dot{\varepsilon}/\dot{\varepsilon}_0)} \tag{9.1.1c}$$

$$\lambda = \frac{\mathrm{d}(\sigma/\sigma_0)}{\mathrm{d}(\ln\dot{\varepsilon}/\dot{\varepsilon}_0)} \tag{9.1.2c}$$

所以 γ 和 λ 是表明材料屈服应力随应变率提高而如何提高的特性参数，可称之为在各自意义下的材料屈服应力的应变率敏感因子。由此二式可见，对一定的 γ 和 λ 而言，只有当应变率有量级上的改变时，屈服应力才会有较明显的改变。从式(9.1.1a)和式(9.1.2a)本身看，它们都是表明了材料在动态高应变率 $\dot{\varepsilon}$ 之下的屈服应力 σ 与准静态加载 $\dot{\varepsilon}_0$ 时屈服应力 σ_0 之间的关系；但是另一方面，式(9.1.1a)和式(9.1.2a)可分别写为

$$\frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}_0} = \left(\frac{\sigma - \sigma_0}{\sigma_0}\right)^{1/\gamma} = \left(\frac{\sigma - \sigma_0}{\sigma_0}\right)^{n} \tag{9.1.1b}$$

$$\frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}_0} = \exp\left[\frac{1}{\lambda}\left(\frac{\sigma - \sigma_0}{\sigma_0}\right)\right] \tag{9.1.2b}$$

式(9.1.1b)表明应变率是相对超屈服应力$\frac{\sigma - \sigma_0}{\sigma_0}$的幂函数，而式(9.1.2b)则表明应变率是相对超屈服应力$\frac{\sigma - \sigma_0}{\sigma_0}$的指数函数，故它们都简称为超应力(over stress)型的黏塑性本构关系。这就给出了式(9.1.1)和式(9.1.2)的另一种解释，即黏塑性材料的应变率是超应力的某种函数。

显然，我们可以将式(9.1.1b)和式(9.1.2b)加以推广而写出更一般形式的超应力型的黏塑性本构关系如下：

$$\frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}_0} = g\left(\frac{\sigma - \sigma_0}{\sigma_0}\right) \tag{9.1.3}$$

超应力的函数 g 的不同具体形式即反映了不同的材料黏塑性特性。由于材料的弹性应变是可逆的和瞬态发生的，而且远小于其不可逆的黏塑性应变(既有塑性变形的不可逆特征，又有应变率效应引起的黏滞性特征，故称之为黏塑性应变，见下面对式(9.1.6)的解释)，所以材料的弹性应变率对材料的屈服应力的影响是很小的，而所谓的应变率效应主要表现在黏塑性应变率对其屈服应力的影响上，所以可以将(9.1.3)式改写为

$$\frac{\dot{\varepsilon}^{p}}{\dot{\varepsilon}_0} = g\left(\frac{\sigma - \sigma_0}{\sigma_0}\right) \tag{9.1.4}$$

式(9.1.4)就是人们在理论上所常用的超应力型黏塑性本构关系。之所以采用式(9.1.4)的形式，还因为在复杂应力状态下含内变量的本构关系理论中，人们常常是把内变量的演化率取为塑性应变率张量的某种一次齐次函数，同时又把复杂应力状态下的所谓应变率通常就取为等效塑性应变率。由于

$$\varepsilon = \varepsilon^{e} + \varepsilon^{p},\quad \dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}^{e} + \dot{\varepsilon}^{p},\quad \varepsilon^{e} = \frac{\sigma}{E},\quad \dot{\varepsilon}^{e} = \frac{\dot{\sigma}}{E} \tag{9.1.5}$$

由(9.1.4)式和(9.1.5)式可得

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}^{e} + \dot{\varepsilon}^{p} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \dot{\varepsilon}_0 g\left(\frac{\sigma - \sigma_0}{\sigma_0}\right) \tag{9.1.6}$$

式(9.1.6)就是人们所常用的一维应力条件下的黏塑性本构关系的一般形式，称之为Соколовский黏塑性本构模型。黏塑性本构关系(9.1.6)式与如下的弹性和弹塑性本构关系：

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}^{e} = \dot{\sigma}/E,\quad \dot{\varepsilon}^{p} = \dot{\sigma}/E^{p}, \\ \dot{\varepsilon} = \dot{\sigma}/E^{ep}\quad (E\text{、}E^{p}\text{ 和 }E^{ep}\text{ 分别是弹性、塑性和弹塑性模量}) \end{cases} \tag{9.1.7}$$

的根本区别在于：(9.1.7)式是应力率 $\dot{\sigma}$ 和相应的应变率 $\dot{\varepsilon}^e$、$\dot{\varepsilon}^p$、$\dot{\varepsilon}$ 间的齐次关系，在某一瞬时的应力率 $\dot{\sigma}$ 即刻就会产生此时的应变率 $\dot{\varepsilon}^e$、$\dot{\varepsilon}^p$、$\dot{\varepsilon}$，而要想产生增量应变 $\mathrm{d}\varepsilon=(\dot{\sigma}/E)\mathrm{d}t$ 或$\mathrm{d}\varepsilon=(\dot{\sigma}/E^{ep})\mathrm{d}t$，只有此刻的应力 σ 是不够的，还必须保持应力率 $\dot{\sigma}\neq0$，即应力的改变才会产生相应的应变改变，从这个意义上来说，应力率 $\dot{\sigma}$ 和应变率 $\dot{\varepsilon}^e$、$\dot{\varepsilon}^p$、$\dot{\varepsilon}$ 间齐次关系的弹性和弹塑性本构关系(9.1.7)式在本质上是瞬态型本构关系，或者说弹塑性本构关系中的应变 ϵ^e、ϵ^p 和 ϵ 都是相应意义下的瞬态型应变。而黏塑性本构关系(9.1.6)式则是应力率 $\dot{\sigma}$ 和应变率 $\dot{\varepsilon}$ 间的非齐次关系，材料的整个应变 ϵ 除了包括瞬态的弹性应变ϵ^e 以外，还包括黏塑性应变 ϵ^p，而黏塑性应变率 $\dot{\varepsilon}^p$ 不是应力率 $\dot{\sigma}$ 的齐次函数，而是由非齐次关系(9.1.4)式来表达的：只要在某时刻有超应力$\frac{\sigma-\sigma_0}{\sigma_0}$存在并维持(而不需要有应力率 $\dot{\sigma}\neq0$)，则在 $\mathrm{d}t$ 之后便会在材料中产生流动的黏塑性增量应变：

$$\mathrm{d}\varepsilon^p=\dot{\varepsilon}_0 g\left(\frac{\sigma-\sigma_0}{\sigma_0}\right)\mathrm{d}t$$

故黏塑性应变与弹性和弹塑性应变的不同之处是：前者不是瞬态性的而是具有黏性和滞后性的，这就是采用“黏塑性”一词并把 $\dot{\varepsilon}^p$ 称为“黏塑性应变率”的原因。

现在我们来对黏塑性本构关系(9.1.6)式的意义做进一步的阐述和分析。当忽略材料中的弹性应变 ϵ^e 时，则黏塑性本构关系(9.1.6)式将简化为(9.1.3)式或(9.1.4)式，因为此时 $\dot{\varepsilon}=\dot{\varepsilon}^p$，所以后二者也即是同一方程。由于材料中不存在弹性变形，而材料的应变率也即黏塑性应变率完全是由超应力的函数 $g\left(\frac{\sigma-\sigma_0}{\sigma_0}\right)$所决定的，所以(9.1.3)式或(9.1.4)式也即是等应变率或等黏塑性应变率下的材料屈服准则，故将此种材料称为刚(性)黏塑性模型，也称为 Bingham 模型。由于超应力大于零时才会有黏塑性变形产生，所以 Bingham 刚(性)黏塑性模型可以视为一个以阈值应力开关 σ_0 控制黏塑性流动起始的摩擦板与黏塑性流动特性由(9.1.4)式表征的非线性黏壶元件 ϵ^p 的并联，如图 9.1 所示。其等应变率或等黏塑性应变率 $\dot{\varepsilon}_i^p$ 下的屈服应力$\sigma_i=\sigma_0\left[1+g^{-1}\left(\frac{\dot{\varepsilon}_i^p}{\dot{\varepsilon}_0}\right)\right]$或表示黏塑性应变流动发展的应力应变曲线如图 9.2 所示，其中 g^{-1}表示函数 g 的反函数，它的具体形式将决定各不同应变率下水平屈服应力间的间隔。

考虑弹性应变影响的 Соколовский 黏塑性本构关系(9.1.6)式可视为一个弹性模量为 E 的弹性元件和 Bingham 模型的串联，如图 9.3 所示。由于对正应变率敏感的材料而言，在应力未超过准静态屈服应力即超应力大于零之前材料不会产

生黏塑性流动而只有弹性应变，而在黏塑性应变流动发生时一定的黏塑性应变率 $\dot{\varepsilon}_i^p$ 就对应着一定的超应力 σ_i，故 Соколовский 模型在等黏塑性应变率 $\dot{\varepsilon}_i^p$ 之下的应力应变曲线如图 9.4 所示。

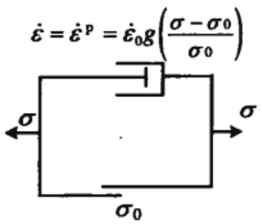


图 9.1　Bingham 模型

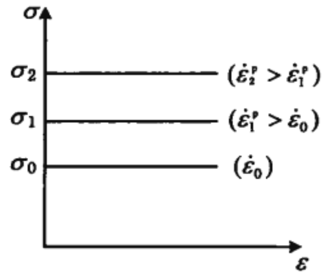


图 9.2　Bingham 模型应力应变曲线

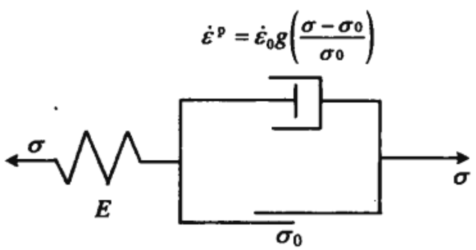


图 9.3　Соколовский 本构模型

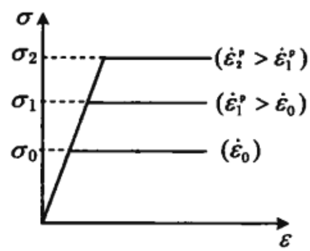


图 9.4　Соколовский 模型应力应变曲线

一个重要的特例是：表征材料黏塑性流动特征的函数 g 是超应力的线性函数，即

$$\dot{\varepsilon}^p = \gamma^*\left(\frac{\sigma-\sigma_0}{\sigma_0}\right) = \frac{\sigma-\sigma_0}{\eta} \tag{9.1.8}$$

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \gamma^*\left(\frac{\sigma-\sigma_0}{\sigma_0}\right) = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma-\sigma_0}{\eta} \tag{9.1.9}$$

其中具有应变率量纲的材料常数 γ^* 可称之为运动学黏性系数，而具有应力冲量量纲的材料常数 $\eta=\sigma_0/\gamma^*$ 称为动力学黏性系数。本构关系(9.1.9)式与第 8 章中所讲的 Malvern 黏弹性本构关系是类似的，但是它是一个由阈值开关 σ_0 控制黏塑性流动起始并且其黏塑性应变率 $\dot{\varepsilon}^p$ 与超应力 $\frac{\sigma-\sigma_0}{\sigma_0}$ 成比例的特殊 Malvern 模型，我们将之称为超应力型 Malvern 模型。

我们顺便指出：当考虑弹性应变的影响时，黏塑性本构关系(9.1.3)式表征的

模型和等应变率下的应力应变曲线是分别与图 9.3 和图 9.4 相类似的，只需把其中的塑性应变率 $\dot{\varepsilon}^{p}$ 改为总应变率 $\dot{\varepsilon}$ 即可。

9.1.3 考虑应变硬化效应时的一维应力黏塑性本构关系

在 9.1.2 节中所讲的黏塑性本构模型都没有考虑材料的应变硬化效应，即已经积累起来的应变 ε 或黏塑性应变ε^{p} 对黏塑性应变率 $\dot{\varepsilon}^{p}$ 的影响，故在不同应变率下的材料屈服应力 σ 都是常数，可简称为理想黏塑性本构模型。为了计入材料的应变硬化效应，Malvern 等人以材料在准静态条件 $\dot{\varepsilon}_0$ 下具有应变硬化效应的塑性段应力应变曲线 $\sigma_0(\varepsilon)$代替恒定的准静态屈服应力 σ_0，于是对应式(9.1.6)，可有如下形式的黏塑性本构关系：

$$\dot{\varepsilon}^{p} = \dot{\varepsilon}_0 g\left(\frac{\sigma}{\sigma_0(\varepsilon)} - 1\right) \tag{9.1.10}$$

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \dot{\varepsilon}_0 g\left(\frac{\sigma}{\sigma_0(\varepsilon)} - 1\right) \tag{9.1.11}$$

从本构关系的内变量理论考虑，更科学的形式应该是将准静态应力应变曲线$\sigma_0(\varepsilon)$转化为以黏塑性应变 ε^{p} 为自变量的函数形式 $\sigma_0(\varepsilon^{p})$，尽管对同一种材料这两个函数将是不同的函数，但是为了减少符号，我们仍将以 $\sigma_0(\varepsilon^{p})$记之。于是对应(9.1.10)式和(9.1.11)式，我们可写出如下形式的黏塑性本构关系：

$$\dot{\varepsilon}^{p} = \dot{\varepsilon}_0 g\left(\frac{\sigma}{\sigma_0(\varepsilon^{p})} - 1\right) \tag{9.1.12}$$

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \dot{\varepsilon}_0 g\left(\frac{\sigma}{\sigma_0(\varepsilon^{p})} - 1\right) \tag{9.1.13}$$

显然，式(9.1.11)和式(9.1.13)仍然都可以用图 9.3 所示的元件组合模型来描述，只不过其中的滑动板开关阈值不再是常数，而其中的黏塑性元件的黏塑性应变流动特性分别以(9.1.10)式和(9.1.12)式表征罢了。容易理解，黏塑性本构关系(9.1.11)式和(9.1.13)式在等应变率 $\dot{\varepsilon}_i^{p}$ 下的应力应变曲线将如图 9.5 所示，其中各曲线为 $\sigma_i(\varepsilon) = \sigma_0(\varepsilon)\left[1 + g^{-1}\left(\frac{\dot{\varepsilon}_i^{p}}{\dot{\varepsilon}_0}\right)\right]$。

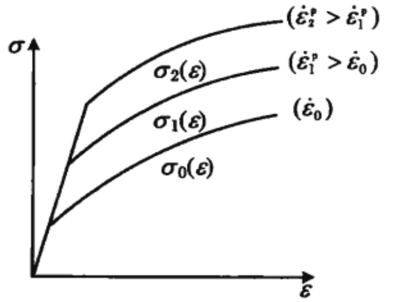


图 9.5 基于(9.1.11)式的等应变率应力应变曲线

在此我们特别指出：对超应力型的黏塑性材料而言，黏塑性应变 ε^{p} 是否发展主要是

由其超应力是否大于零而决定的，只要某一状态的超应力大于零，则不管其应力 σ 是增大还是减小，即 $\dot{\sigma}$ 是大于零还是小于零，则其黏塑性应变率 $\dot{\varepsilon}^{p}$ 都会大于零，而黏塑性应变和整个应变都会继续发展，这一点与弹塑性材料在应力减小时即转入弹性卸载是截然不同的。为了突出强调这一点，人们通常将黏塑性本构方程(9.1.4)式、(9.1.6)式写为如下的形式：

$$\frac{\dot{\varepsilon}^{p}}{\dot{\varepsilon}_0} = < g\left(\frac{\sigma - \sigma_0}{\sigma_0}\right) > \tag{9.1.4$'$}$$

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}^{e} + \dot{\varepsilon}^{p} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \dot{\varepsilon}_0 < g\left(\frac{\sigma - \sigma_0}{\sigma_0}\right) > \tag{9.1.6$'$}$$

其中函数 $g(x)$ 的含义是：

$$< g(x) > = \begin{cases} g(x), & \text{当 } x > 0 \\ 0, & \text{当 } x \leqslant 0 \end{cases} \tag{9.1.14}$$

最后我们指出：前面所讲的黏塑性本构关系都只考虑了材料的瞬态弹性应变和非瞬态黏塑性应变，而未考虑材料的瞬态塑性应变。为了同时考虑材料的瞬态弹性应变、瞬态塑性应变和非瞬态黏塑性应变，N. Cristescu 等曾引入了如下形式的黏塑性本构关系：

$$\dot{\varepsilon}^{p} = \varphi(\sigma, \varepsilon)\dot{\sigma} + \psi(\sigma, \varepsilon) \tag{9.1.15}$$

其中 $\varphi(\sigma, \varepsilon)$ 是反映材料瞬态塑性变形特性的瞬态塑性模量，$\psi(\sigma, \varepsilon)$ 是材料的非瞬态黏塑性应变率，而 $\dot{\varepsilon}^{p}$ 则表示材料总的不可逆应变率，它同时包含了瞬态的塑性应变率和非瞬态的黏塑性应变率。将(9.1.15)式与材料的瞬态弹性应变率相加，可得如下形式的黏塑性本构关系：

$$\dot{\varepsilon} = \left[\frac{1}{E} + \Phi(\sigma, \varepsilon, \mathrm{sign}\dot{\sigma})\right]\dot{\sigma} + \psi(\sigma, \varepsilon) \tag{9.1.16}$$

其中函数 $\Phi(\sigma, \varepsilon, \mathrm{sign}\dot{\sigma})$ 的定义是：

$$\Phi(\sigma, \varepsilon, \mathrm{sign}\dot{\sigma}) = \begin{cases} \varphi(\sigma, \varepsilon), & \text{当 } \dot{\sigma} > 0 \\ 0, & \text{当 } \dot{\sigma} \leqslant 0 \end{cases} \tag{9.1.17}$$

本构关系(9.1.16)式右端的第一项、第二项和第三项分别表示材料的瞬态弹性应变率、瞬态塑性应变率和非瞬态的黏塑性应变率。由于式(9.1.15)和式(9.1.16)是应变率和应力率的线性方程，所以习惯上也把它们称为拟线性型的黏塑性本构方程。

由于瞬态塑性应变率与非瞬态的黏塑性应变率相比一般而言较小，所以在下面的几节中我们一般只考虑材料的瞬态弹性应变率和非瞬态的黏塑性应变率，但是只要给出材料瞬态塑性模量的适当形式，我们是不难将材料的瞬态塑性应变率

引入其中的。

9.2 复杂应力状态下的超应力型黏塑性本构关系

9.2.1 一般情况下的 Perzyna 超应力型黏塑性本构关系

在 9.1 节中我们讲了一维应力状态下超应力型的黏塑性本构关系，以此为基础并结合第 7 章所讲的塑性本构关系的有关知识，我们便可以将上面所讲的一维黏塑性本构关系加以推广而建立起在复杂应力状态下材料的黏塑性本构关系。这种类型的本构关系可称之为 Соколовский-Malvern-Perzyna 超应力型黏塑性本构关系，或简称为 Perzyna 超应力型黏塑性本构关系，因为这方面的工作最早是由 Perzyna 在 Соколовский-Malvern 一维黏塑性本构关系的基础上将之推广到一般复杂应力状态下的。在他们的理论中并未考虑不可逆应变中瞬态塑性应变的存在。

Соколовский-Malvern-Perzyna 超应力型黏塑性本构关系的建立主要基于以下的基本思想：

(1) 在复杂应力状态下黏塑性材料的总应变仍然是由可逆的瞬态弹性应变和其非瞬态的黏塑性应变所组成的，因此其总应变率仍然是由可逆的瞬态弹性应变率和其非瞬态的黏塑性应变率所组成的，即

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{e}} + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}} \tag{9.2.1}$$

(2) 材料的瞬态弹性应变率和其应力率之间通过其瞬态弹性模量张量 $\boldsymbol{M}$ 由下式相联系：

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{e}} = \boldsymbol{M}^{-1} : \dot{\boldsymbol{\sigma}}, \quad \dot{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{M} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{e}} \tag{9.2.2}$$

(3) 在复杂应力下材料的黏塑性应变率仍然是其所谓的“超应力”的某种函数，不过这里的所谓“超应力”是指材料状态所超过其准静态屈服函数的值。例如，如果材料的准静态屈服准则为

$$F(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}, K) \equiv \frac{f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}})}{K} - 1 = 0 \tag{9.2.3}$$

则其超应力便是函数 $F(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}, K) \equiv \dfrac{f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}})}{K} - 1$，只要函数 F 的值大于零，则材料

的黏塑性应变便会发展，否则便只有弹性变形发展。上式中 K 为等向硬化因子，可以取为累积黏塑性功 W_p 或者等效累积黏塑性应变 $\bar{\varepsilon}^p$ 的函数。

(4) 材料黏塑性应变的发展仍然满足正交法则的要求，其黏塑性应变率仍然沿着相应状态屈服面的外法向，即黏塑性应变率 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$ 仍然与 $\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}}=\frac{1}{K}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$ 成比例。

根据以上几条基本思想，Perzyna 等人给出了复杂应力状态下如下形式的黏塑性本构关系：

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \gamma\langle\varphi(F)\rangle\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \tag{9.2.4}$$

其中 γ 可称之为黏性系数，而函数 $\langle\varphi(F)\rangle$ 的定义如下：

$$\langle\varphi(F)\rangle = \begin{cases}\varphi(F), & \text{当 } F>0\\ 0, & \text{当 } F\leqslant 0\end{cases} \tag{9.2.5}$$

将(9.2.4)式与弹性应变率(9.2.2)式相加即可得

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \boldsymbol{M}^{-1}:\dot{\boldsymbol{\sigma}}+\gamma\langle\varphi(F)\rangle\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \tag{9.2.6}$$

式(9.2.4)和式(9.2.6)就是 Perzyna 超应力型黏塑性本构关系。函数 F 或 f 的选取决定了材料的塑性屈服特性，函数 φ 的选取则决定了材料的黏塑性流动特性。特别说来，对各向同性材料而言，利用各向同性材料弹性变形的胡克定律，则(9.2.6)式可写为

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{2\mu}\dot{\boldsymbol{S}}+\frac{1-2\nu}{E}\dot{\sigma}_{ii}\boldsymbol{I}+\gamma\langle\varphi(F)\rangle\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \tag{9.2.7}$$

其中 $\boldsymbol{S}$ 为应力偏量张量，E、ν、$\mu=\frac{1}{2(1+\nu)}$ 分别为弹性模量、泊松比和剪切模量。

式(9.2.6)和式(9.2.7)是以应力率 $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ 表达应变率 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ 的形式，而在实际应用中人们通常将式(9.2.6)写为以应变率 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ 来表达应力率 $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ 的形式，因为这对动态数值计算的应用更方便。此时式(9.2.6)和式(9.2.7)分别具有如下的形式：

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{M}:\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e = \boldsymbol{M}:(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}-\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) = \boldsymbol{M}:\left[\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}-\gamma\langle\varphi(F)\rangle\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right] \tag{9.2.6$'$}$$

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{E}{1+\nu}(\dot{\boldsymbol{e}}-\dot{\boldsymbol{e}}^p)+\frac{E}{3(1-2\nu)}[\dot{\varepsilon}_{ii}-\dot{\varepsilon}^p_{ii}]\boldsymbol{I} \tag{9.2.7$'$}$$

其中 $\dot{\boldsymbol{e}}$ 为偏应变率张量，$\dot{\boldsymbol{e}}^p$ 为黏塑性应变率张量 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p=\gamma\langle\varphi(F)\rangle\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$ 的偏量部分。

9.2.2 Perzyna 超应力型黏塑性本构关系所对应的应变率相关动态屈服面

现在我们来分析一下如下的问题：满足 Perzyna 超应力型黏塑性本构关系的

材料，其动态屈服面和其准静态屈服面(9.2.3)式之间究竟有什么关系。

假设黏塑性变形是发展的，则有 $F>0$，于是将式(9.2.4)的两边进行二次点积并做适当变形，即可得

$$\dot{\bar{\varepsilon}}^{p} \equiv \sqrt{\frac{2}{3}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{p}:\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{p}} = \gamma\varphi(F)\sqrt{\frac{2}{3}\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{\sigma}}:\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{\sigma}}} \tag{9.2.8}$$

其中$\dot{\bar{\varepsilon}}^{p}$是等效黏塑性应变率，我们可将此标量型的量作为在复杂应力状态之下对材料应变率的一个度量。所以，式(9.2.8)事实上就是黏塑性材料应变率相关屈服准则的一种表达方式，可称之为材料的动态屈服准则，它的含义是：如果材料的准静态屈服准则是由

$$F(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\varepsilon}^{p},K) \equiv \frac{f(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\varepsilon}^{p})}{K} - 1 = 0,\quad f(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\varepsilon}^{p}) = K \tag{9.2.3}$$

来表达的话，则等效应变率为 $\dot{\bar{\varepsilon}}^{p}$ 时的材料动态屈服面即为(9.2.8)式。由于准静态的情况可视为$\dot{\bar{\varepsilon}}^{p}=0$，所以理论上如下三式必然是等价的：

$$\gamma\varphi(F)\sqrt{\frac{2}{3}\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{\sigma}}:\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{\sigma}}} = 0 \propto f(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\varepsilon}^{p}) = K \propto F = 0 \tag{9.2.3$'$}$$

(9.2.8)式也可以写为如下的两种形式：

$$\varphi(F) = \varphi\left(\frac{f(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\varepsilon}^{p})}{K} - 1\right) = \frac{\dot{\bar{\varepsilon}}^{p}}{\gamma}\Big/\sqrt{\frac{2}{3}\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{\sigma}}:\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{\sigma}}} \tag{9.2.9}$$

或

$$f(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\varepsilon}^{p}) = K\left[1 + \varphi^{-1}\left(\frac{\dot{\bar{\varepsilon}}^{p}}{\gamma}\Big/\sqrt{\frac{2}{3}\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{\sigma}}:\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{\sigma}}}\right)\right] \equiv f(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\varepsilon}^{p},K,\dot{\bar{\varepsilon}}^{p}) \tag{9.2.10}$$

其中 φ^{-1}表示函数 φ 的反函数。

像式(9.2.8)一样，式(9.2.9)和式(9.2.10)也可以称为材料应变率相关的动态屈服准则，其中式(9.2.10)可以视为材料动态屈服准则的一种显式表达，其右端的函数可以称之为动态屈服函数，它显式地表达了材料的动态屈服函数 f 对等效应变率 $\dot{\bar{\varepsilon}}^{p}$ 的依赖关系。由于 $\varphi(0)=0, \varphi^{-1}(0)=0$，故准静态情况下即$\dot{\bar{\varepsilon}}^{p}=0$时，式(9.2.10)就给出材料的准静态屈服面 $f(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\varepsilon}^{p})=K$，即(9.2.3)式；对正应变率敏感的材料，函数 φ 和其反函数φ^{-1}都是自变量的增函数，故当材料的等效应变率$\dot{\bar{\varepsilon}}^{p}$ 提高时，式(9.2.10)中的第二项也将增大，所以动态屈服面(9.2.10)式表明了随着等效应变率$\dot{\bar{\varepsilon}}^{p}$ 的提高材料的动态屈服面是如何扩大的，或者其动态屈服函数 $f(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\varepsilon}^{p},K,\dot{\bar{\varepsilon}}^{p})$是如何增加的。

为了易于理解起见，我们在 9.2.3 节中具体分析一种特殊情况。

9.2.3　等向硬化的 Mises 材料

对于此种情况，材料的准静态屈服准则为

$$f(\boldsymbol{\sigma}) = \bar{\sigma} = K,\quad F = \frac{f(\boldsymbol{\sigma})}{K} - 1 = \frac{\bar{\sigma}}{K} - 1$$

其中

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{3}{2}\boldsymbol{S} : \boldsymbol{S}}\quad (\boldsymbol{S}\text{ 为应力偏量张量})$$

为等效应力。由于 Mises 材料是屈服函数与静水压力无关的材料，所以将本构关系分别写为偏应变率 $\dot{\boldsymbol{e}}$ 与体应变率 $\dot{\theta}$ 表达的形式更为方便。注意到

$$\frac{\partial\,\bar{\sigma}}{\partial\boldsymbol{\sigma}} = \frac{3\boldsymbol{S}}{2\,\bar{\sigma}}$$

故对各向同性材料而言，我们可有

$$\dot{\boldsymbol{e}} = \frac{1}{2\mu}\dot{\boldsymbol{S}} + \gamma\left\langle\varphi\left(\frac{\bar{\sigma}}{K} - 1\right)\right\rangle\frac{3\boldsymbol{S}}{2\,\bar{\sigma}} \tag{9.2.11a}$$

$$\dot{\theta} = \frac{1}{3k}\dot{\sigma}_{ii} \tag{9.2.11b}$$

其中 μ 和 k 分别为弹性剪切模量和体积模量。相应的动态屈服准则(9.2.10)式则为

$$\bar{\sigma} = K\left[1 + \varphi^{-1}\left(\frac{\dot{\bar{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}}{\gamma}\right)\right] \tag{9.2.12}$$

当材料为弹性-理想黏塑性材料时，以上的一些公式仍然是成立的，只不过此时函数 f 不依赖于塑性应变 $\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}$ 且 $\boldsymbol{K}$ 成为常数而已。

9.3　无屈服面的黏塑性本构关系

9.3.1　一维应力状态下的 Bodner-Parton 无屈服面黏塑性本构关系

在 9.1 节和 9.2 节中我们重点介绍了超应力型的黏塑性本构关系，其主要思

想是认为材料存在着一个确定的准静态应力应变曲线(或复杂应力状态之下存在确定的准静态屈服面),当材料的状态位于其准静态应力应变曲线之下(准静态屈服面之内)时材料只发生可逆的弹性变形,而当其状态超出其准静态应力应变曲线之上(准静态屈服面之外)时材料才发生与可逆弹性变形伴随而流动的不可逆黏塑性变形。这种理论虽然基本上符合黏塑性材料受力变形的宏观物理特性,但是对于动态问题的数值计算则是比较复杂的,因为我们必须每一步都要判别材料是处于屈服面之内还是之上并分别根据其弹性变载和黏塑性加载的不同情况而进行不同的本构计算。自 20 世纪 70 年代以来,随着动态数值方法的不断发展和高效高精度本构计算的需要,出现了一种将细观位错动力学理论与宏观黏塑性本构关系理论相结合的趋势,这方面理论的典型代表就是 Bodner-Parton 等的无屈服面黏塑性本构关系理论。在这种理论中,认为材料并不存在一个明确的所谓屈服面,材料的变形也并不存在所谓黏塑性加载和弹性卸载之分,而是认为材料的瞬态弹性变形和非瞬态黏塑性变形存在于材料加载和卸载的各个阶段,而且这两种变形始终是耦合在一起的。

无屈服面黏塑性本构关系的理论主要基于位错动力学的成果和传统的宏观黏塑性本构关系理论的成果。位错动力学认为:存在于材料内部的缺陷即位错在一定的应力作用下会被激活而产生运动,这种位错的运动造成材料颗粒之间的相对滑移,这在宏观上即表现为材料的不可逆塑性变形,故材料的塑性应变率与其位错运动的速率之间存在着一定的关系。这种关系是由如下的 Orowan 关系所表达的:

$$\dot{\varepsilon}^{\mathrm{p}} = \varphi N b v \tag{9.3.1}$$

其中 N 是可动位错密度,b 是 Burgers 矢量,v 是位错运动的平均速度,φ 为取向因子。实验证明位错运动速度是与材料所受应力的大小紧密相关的,当不考虑热效应时,其中最常用的经验公式是 v 正比于如下的应力的函数:

$$v \propto \sigma^n, \quad v \propto \exp\left(-\frac{D}{\sigma}\right) \tag{9.3.2}$$

其中 n、D 为材料常数。以此为基础,Bodner、Parton 等假设了如下两种形式的材料黏塑性应变率的表达式:

$$\dot{\varepsilon}^{\mathrm{p}} = C\left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right)^n \tag{9.3.3}$$

$$\dot{\varepsilon}^{\mathrm{p}} = A\exp\left(-\frac{B}{\sigma}\right) \tag{9.3.4}$$

其中 n 是无量纲的材料常数,σ_0 和 B 是具有应力量纲的材料常数,C 和 A 是具有

应变率量纲的材料常数。当然，在(9.3.3)式中 C、n 和 σ_0 只有两个材料常数是独立的。

与(9.3.3)式和(9.3.4)式相对应，我们可以分别写出如下两种形式的一维应力条件下材料的 Bodner-Parton 无屈服面黏塑性本构关系：

$$\dot{\sigma} = E(\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^{\mathrm{p}}) = E\left[\dot{\varepsilon} - C\left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right)^n\right] \tag{9.3.3$'$}$$

$$\dot{\sigma} = E(\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^{\mathrm{p}}) = E\left[\dot{\varepsilon} - A\exp\left(-\frac{B}{\sigma}\right)\right] \tag{9.3.4$'$}$$

无屈服面黏塑性本构关系与超应力型黏塑性本构关系的主要区别就是：黏塑性变形连同弹性变形发生在材料的任何一种状态之下，即使是材料只有接近于零的很小应力它们也将会发展。下面我们将以幂函数型 Bodner-Parton 无屈服面黏塑性本构关系(9.3.3)′式为例来说明材料变形的一些规律和特性，从而使我们认识到它是可以反映黏塑性材料变形的主要特征的。

1. 材料应力应变曲线的应变率相关特性

满足(9.3.3)′式的材料在等应变率 $\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_c$ 下的应力应变曲线 $\sigma = \sigma(\varepsilon, \dot{\varepsilon}_c)$ 可由常微分方程组：

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_c \\ \dot{\sigma} = E\left[\dot{\varepsilon}_c - C\left(\dfrac{\sigma}{\sigma_0}\right)^n\right] \end{cases} \tag{9.3.5}$$

在初始条件 $\varepsilon(t=0)=0$，$\sigma(t=0)=0$ 之下求解并消去时间 t 而得到；也可由常微分方程：

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\varepsilon} = E - \frac{EC}{\dot{\varepsilon}_c}\left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right)^n \tag{9.3.6}$$

在初始条件 $\sigma(\varepsilon=0)=0$ 之下直接求解得到。

图 9.6 给出的是不同等应变率 $\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_c$ 之下材料的应力应变曲线，其中的材料参数为 $E = 60\ \mathrm{MPa}$，$\sigma_0 = 2\ \mathrm{MPa}$，$n = 6.00$，$C = 0.1\ \mathrm{s}^{-1}$。从图中可以看出：随着应变率的提高，应力应变曲线逐渐上移，材料具有明显的正应变率敏感特性。每一条应力应变曲线大体上经历三个不同的阶段：在应力较小的第一阶段，因为黏塑性应变率很小，所以材料变形主要是弹性变形，应力应变曲线接近于斜率为弹性模量 E 的直线；在第二阶段，随着应力的提高，黏塑性应变率也逐渐增大，即(9.3.6)式中的第二项逐渐增大，所以应力应变曲线的斜率逐渐减小而曲线趋于变缓；在第三阶段，材料的等应变率应力应变曲线将趋于一个水平的渐近线

$$\sigma = \sigma_0\left(\frac{\dot{\varepsilon}_c}{C}\right)^{1/n} \equiv \sigma(\dot{\varepsilon}_c) \tag{9.3.7}$$

这是因为 $t\to\infty$、$\varepsilon\to\infty$ 而 $\sigma\to\sigma(\dot{\varepsilon}_c)$ 时，有 $\frac{d\sigma}{d\varepsilon}\to 0$。但是，当应变率 $\dot{\varepsilon}=\dot{\varepsilon}_c\to\infty$ 时，式(9.3.6)给出 $\frac{d\sigma}{d\varepsilon}=E$，材料的应力应变曲线趋于瞬态弹性应力应变曲线 $\sigma=E\varepsilon$。

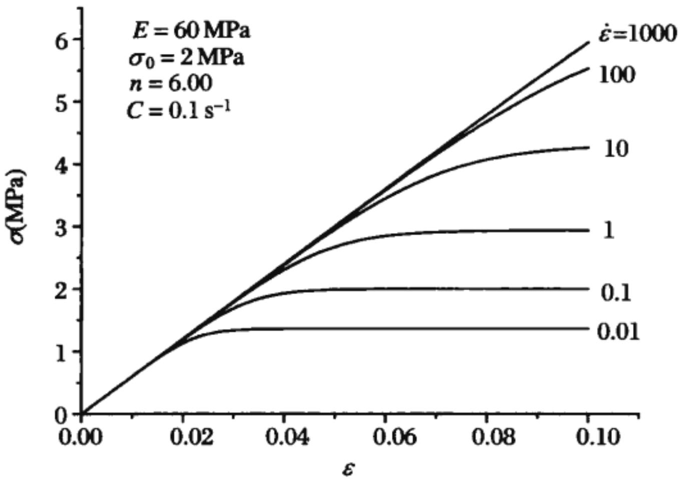


图 9.6　不同应变率下的 Bodner 应力应变曲线

2. 材料在等应变率加载至某一状态后的卸载特性

为了直观和易于理解起见，我们这里将以应变的增加和减少作为加载和卸载，来研究它们所导致的材料应力的加卸载特性。仍然取前面的材料参数。假设材料在某一为正的等应变率 $\dot{\varepsilon}_c>0$ 之下从自然静止状态加载至某一特定状态 (σ^*,ε^*)，然后以某一负的等应变率 $\dot{\varepsilon}_c^*=-|\dot{\varepsilon}_c^*|<0$ 使其应变减小而卸载，则材料的卸载应力应变曲线将由常微分方程：

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon}=E+\frac{EC}{|\dot{\varepsilon}_c^*|}\left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right)^n \tag{9.3.6$'$}$$

在初始条件 (σ^*,ε^*) 之下的解决定之。

图 9.7 给出了从 $\dot{\varepsilon}_c=1\ \mathrm{s}^{-1}$ 加载曲线上的某点 $(\sigma^*=2.93\ \mathrm{MPa},\varepsilon^*=0.10)$ 处，分别以 $\dot{\varepsilon}_c^*=-0.1\ \mathrm{s}^{-1}$、$-1\ \mathrm{s}^{-1}$、$-10\ \mathrm{s}^{-1}$ 的恒定负应变率卸载时材料的等应变率卸载曲线。由图可以看到：对于任何一个确定值的翻转应变率 $\dot{\varepsilon}_c^*=-|\dot{\varepsilon}_c^*|<0$，材料的卸载应力应变曲线都同时具有非线弹性卸载的特征和与应变率相关的特征，而且大体上也可分为三个阶段：在卸载刚发生后的第一阶段，由于应力较高，黏塑性应变率的绝对值较大，故曲线的非线性特性较为明显；在第二阶段，随着应力的降低，黏塑性应变率的绝对值也逐渐减小，曲线的非线性特征逐渐减弱；在应力较

小的第三阶段，黏塑性应变率绝对值很小而主要是为常数的弹性应变率在起作用，故卸载曲线趋近于斜率为 E 的直线。对比不同取值翻转应变率 $\dot{\varepsilon}_c^* = -|\dot{\varepsilon}_c^*| < 0$ 的卸载曲线，我们还可发现卸载的翻转应变率绝对值越小，卸载应力应变曲线的非线弹性特征越明显，卸载的翻转应变率绝对值越大，卸载应力应变曲线的非线弹性特征越不明显，而对绝对值较大的翻转应变率（如 $\dot{\varepsilon}_c^* = -|\dot{\varepsilon}_c^*| = -10\ s^{-1}$），整个卸载应力应变曲线都接近于线弹性的卸载曲线。由此可以看到，幂函数型的 Bodner-Parton 模型可以较好地反映黏塑性材料卸载时的非线性弹性性质、变形滞后性质以及应变率相关特性。

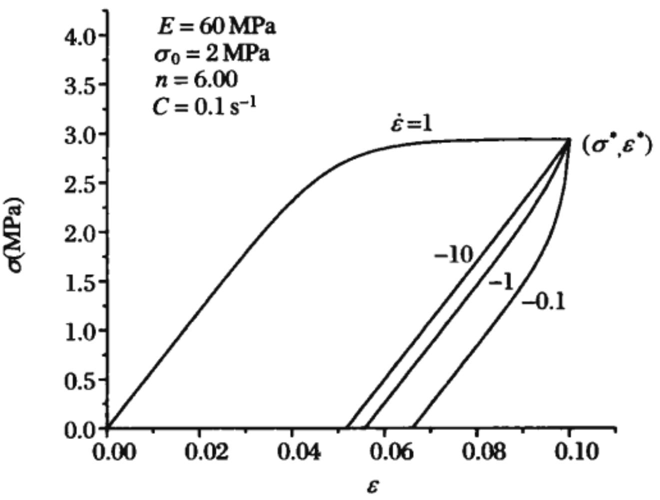


图 9.7 Bodner 模型的卸载性质

3. 材料对应变率历史的记忆效应

图 9.8 的两条虚线给出了应变率发生突变时材料应力应变曲线的形状，其中的一条虚线是由应变率为 $\dot{\varepsilon} = 1\ s^{-1}$ 的加载曲线上的点（$\sigma^* = 2.70$ MPa，$\varepsilon^* = 0.05$）处应变率突降为 $\dot{\varepsilon} = 0.1\ s^{-1}$ 时的流变应力应变曲线，特点是应变率突降的初期应力发生较快的下降，伴随着应变的流动增大曲线逐渐地趋近于低应变率 $\dot{\varepsilon} = 0.1\ s^{-1}$ 时的加载应力应变曲线；另外的一条虚线是由应变率为 $\dot{\varepsilon} = 0.1\ s^{-1}$ 的加载曲线上的点（$\sigma^* = 1.99$ MPa，$\varepsilon^* = 0.05$）处应变率突增为 $\dot{\varepsilon} = 1\ s^{-1}$ 时的流变应力应变曲线，特点是应变率突增的初期曲线按照接近于弹性加载曲线的路径发展，伴随着应变的流动增大曲线逐渐地趋近于高应变率 $\dot{\varepsilon} = 1\ s^{-1}$ 时的加载应力应变曲线。由这些例子可以看出幂函数型的 Bodner-Parton 模型也可以较好地反映材料对应变率历史的记忆作用。

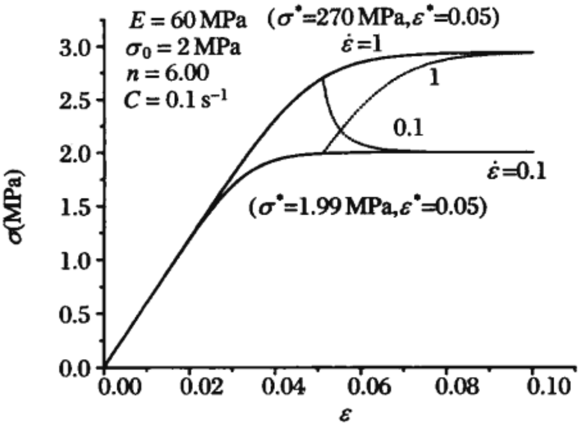


图 9.8 Bodner 模型的应变率历史效应

4. 材料参数的意义和对材料性能的影响

由于无屈服面黏塑性模型不存在所谓的准静态屈服应力，材料在极小的应力下即会发生黏塑性流动，所以式(9.3.3)中的参数 σ_0 不能称之为准静态屈服应力，但是由此式的数学形式显然可见，我们可以把 C 称之为"参考黏塑性应变率"，而 σ_0 就是使材料的黏塑性应变率达至 C 时所需的一个门槛应力。对绝大多数的材料 $n\geqslant 1$，故在应力 $\sigma<\sigma_0$ 的范围内，材料的黏塑性应变率很小而其应力应变曲线将接近于其线弹性的应力应变曲线；而当 $\sigma>\sigma_0$ 时，材料的黏塑性应变率较大且将随着应力的提高而继续较快增大，所以其应力应变曲线将逐渐地变缓并趋近于前面"1. 材料应力应变曲线的应变率相关特性"中所讲的水平渐近线；$\sigma=\sigma_0$ 时，材料的黏塑性应变率等于其参考黏塑性应变率 C，所以在总应变率为参考黏塑性应变率 C 时的材料应力应变曲线将近似于水平线 $\sigma=\sigma_0$，不妨将此条应力应变曲线称之为"参考应力应变曲线"(二者之所以不相重合，是因为总应变率中还包含着弹性应变率，而总应变中还包含着弹性应变)。这就是 C 和 σ_0 的含义，它们控制着"参考应力应变曲线"，此曲线的渐进高度就是使材料的黏塑性应变率等于 C 时所需的门槛应力，或者说 σ_0 就是当材料的黏塑性应变率等于 C 时的流动应力，类似于塑性理论中屈服应力的作用。图 9.9 给出了不同 σ_0(单位为 MPa)下材料在应变率 $\dot{\varepsilon}=1\ \mathrm{s}^{-1}$ 时的应力应变曲线，其中的材料参数为 $E=60$ MPa，$n=6.00$，$C=0.1\ \mathrm{s}^{-1}$。

由于

$$\frac{1}{n}=\frac{\mathrm{d}\ln(\sigma/\sigma_0)}{\mathrm{d}\ln(\dot{\varepsilon}^{\mathrm{p}}/C)} \tag{9.3.8}$$

所以无量纲参数 $1/n$ 可称为材料的应变率敏感因子：n 越小，材料的应变率敏感性越高，使材料塑性应变率提高所需的应力增加越大；n 越大，材料的应变率敏感性越低，使材料塑性应变率提高所需的应力增加越小；n 趋于无穷时，材料的性质将接近于弹性理想塑性材料。图 9.10 给出了不同 n 下材料在应变率 $\dot{\varepsilon}=1\ \mathrm{s}^{-1}$ 时的应力应变曲线，其中的材料参数为 $E=60$ MPa，$n=6.00$，$\sigma_0=2$ MPa，$C=0.1\ \mathrm{s}^{-1}$。

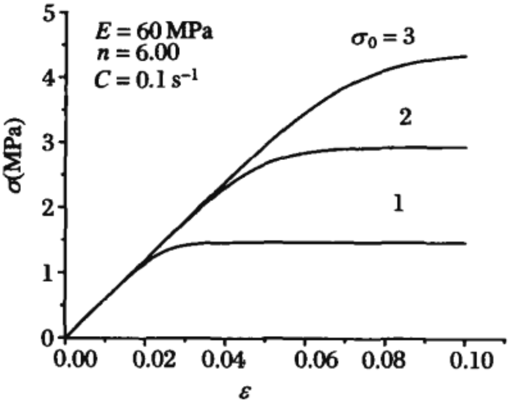


图 9.9　σ_0 对应力应变曲线的影响

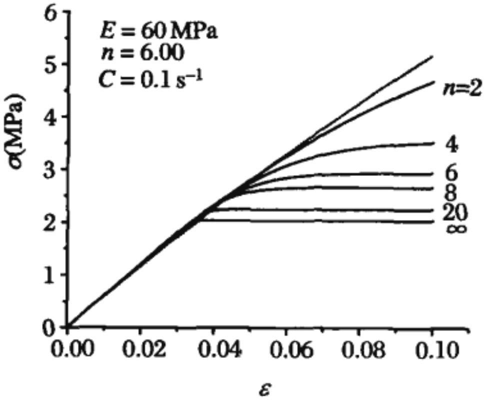


图 9.10　n 对应力应变曲线的影响

最后我们指出：以上所剖析的 Bodner-Parton 无屈服面黏塑性本构关系所刻画的材料性质，对超应力黏塑性模型$\left(\text{例如将式(9.3.3)的右端改为 } C\left(\left\langle\frac{\sigma-\sigma_0}{\sigma_0}\right\rangle\right)^n\right)$也都是定性存在的，因为二者的区别主要是黏塑性流动产生的阈值应力不同而已。

9.3.2　复杂应力状态下的 Bodner-Parton 无屈服面黏塑性本构关系

Bodner 和 Parton 等人在以下的两个基本假定下将前面所讲的一维应力下的无屈服面黏塑性本构关系推广到了复杂应力状态的情况。这两个基本假定是：

(1) 材料的黏塑性应变率满足 Mises 材料的流动法则，即

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}=\dot{\lambda}\boldsymbol{S} \tag{9.3.9}$$

(2) 将式(9.3.3)中的 $\dot{\varepsilon}^{\mathrm{p}}$ 推广为复杂应力状态下的等效黏塑性应变率 $\dot{\bar{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}$、将其中的 σ 推广为复杂应力状态下的等效应力 $\bar{\sigma}$，即将式(9.3.3)推广为如下形式：

$$\dot{\bar{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}=C\left(\frac{\bar{\sigma}}{\sigma_0}\right)^n \tag{9.3.10}$$

在此二假定之下,对(9.3.9)式两端进行二次自点积,可得

$$(\dot{\bar{\varepsilon}}^{\mathrm{p}})^2 = \left(\frac{2}{3}\dot{\lambda}\bar{\sigma}\right)^2, \quad \dot{\lambda} = \frac{3}{2}\frac{\dot{\bar{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}}{\bar{\sigma}} \tag{9.3.11}$$

将式(9.3.10)代入式(9.3.11)之中,可得

$$\dot{\lambda} = \frac{3}{2}\frac{C\left(\frac{\bar{\sigma}}{\sigma_0}\right)^n}{\bar{\sigma}} \tag{9.3.12}$$

由式(9.3.12)和式(9.3.9),我们有

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}} = \frac{3}{2}\frac{C\left(\frac{\bar{\sigma}}{\sigma_0}\right)^n}{\bar{\sigma}}\boldsymbol{S} \tag{9.3.13}$$

于是可得

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{M} : (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}) = \boldsymbol{M} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \boldsymbol{M} : \frac{3}{2}\frac{C\left(\frac{\bar{\sigma}}{\sigma_0}\right)^n}{\bar{\sigma}}\boldsymbol{S} \tag{9.3.14}$$

或

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \dot{\boldsymbol{\sigma}}^{\mathrm{e}} - \dot{\boldsymbol{\sigma}}^{\mathrm{p}}, \quad \dot{\boldsymbol{\sigma}}^{\mathrm{e}} \equiv \boldsymbol{M} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}, \quad \dot{\boldsymbol{\sigma}}^{\mathrm{p}} \equiv \boldsymbol{M} : \frac{3}{2}\frac{C\left(\frac{\bar{\sigma}}{\sigma_0}\right)^n}{\bar{\sigma}}\boldsymbol{S} \tag{9.3.14$'$}$$

式(9.3.13)和式(9.3.14)即是复杂应力状态下的 Bodner-Parton 无屈服面黏塑性本构关系。由式(9.3.13)可以看到:材料的黏塑性应变率$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}$ 完全是由材料的应力状态所决定的,而与材料的整个应变率 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ 毫无关系。式(9.3.14)或式(9.3.14)′说明:材料的应力率 $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ 是由两部分组成的,其中第一部分$\dot{\boldsymbol{\sigma}}^{\mathrm{e}} = \boldsymbol{M} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ 是其瞬态应力率,它是由应变率 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ 来决定并与其同时产生的,在时间间隔 $\mathrm{d}t$ 之中要想产生非零的瞬态增量应力 $\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{e}} = \boldsymbol{M} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}\mathrm{d}t$,必须有应变的改变即非零的应变率 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \neq 0$;而第二部分$\dot{\boldsymbol{\sigma}}^{\mathrm{p}} = \boldsymbol{M} : \frac{3}{2}\frac{C\left(\frac{\bar{\sigma}}{\sigma_0}\right)^n}{\bar{\sigma}}\boldsymbol{S}$ 则是完全由材料的应力状态所决定的,可称之为黏塑性松弛应力率,因为持续时间 $\mathrm{d}t$ 之后材料的应力都将会以此应力率而产生松弛增量应力 $-\dot{\boldsymbol{\sigma}}^{\mathrm{p}}\mathrm{d}t$,而不管 t 时刻的应变率 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ 是否为零以及等于何值。

9.3.3 “无屈服面”的黏塑性本构模型即是“随遇的”黏塑性本构模型

这里我们指出:所谓“无屈服面”的黏塑性本构模型只是表示材料并不存在产生与不产生黏塑性流动的临界屈服面,而是在任何状态(包括外变量状态以及内变

量状态)之下以及在任何加卸载的状态改变之时材料都会产生黏塑性流动,所以更确切地说,“无屈服面”的黏塑性本构模型应该称之为“随遇的”黏塑性本构模型,即认为它随时都在产生黏塑性流动。在此种意义上,式(9.3.10)事实上就可以看做是一种应变率相关的材料屈服准则或动态屈服准则,它表达了材料的动态应力屈服面是如何随着等效黏塑性应变率 $\dot{\bar{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}$ 的增大而扩大的。如果我们将(9.3.10)式右端的函数记为 $f(\boldsymbol{\sigma})$ 而将其写为

$$\dot{\bar{\varepsilon}}^{\mathrm{p}} = f(\boldsymbol{\sigma}) \equiv C\left(\frac{\bar{\sigma}}{\sigma_0}\right)^n, \quad F(\boldsymbol{\sigma}, \dot{\bar{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}) \equiv f(\boldsymbol{\sigma}) - \dot{\bar{\varepsilon}}^{\mathrm{p}} = 0 \qquad (9.3.10)'$$

则 $F(\boldsymbol{\sigma}, \dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}^{\mathrm{p}}) = 0$ 就是以 $\dot{\bar{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}$ 为参数的材料屈服面,于是由与屈服函数相关联的塑性流动的正交法则,可有

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}} = \dot{\lambda}\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \dot{\lambda}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \dot{\lambda} Cn\left(\frac{\bar{\sigma}}{\sigma_0}\right)^{n-1}\frac{1}{\sigma_0}\frac{3}{2}\frac{\boldsymbol{S}}{\bar{\sigma}} \qquad (9.3.15)$$

对(9.3.15)式两端进行二次自点积,可得

$$(\dot{\bar{\varepsilon}}^{\mathrm{p}})^2 = \left[\dot{\lambda} Cn\left(\frac{\bar{\sigma}}{\sigma_0}\right)^n\frac{1}{\bar{\sigma}}\right]^2, \quad \dot{\lambda} = \frac{\dot{\bar{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}\bar{\sigma}}{Cn}\left(\frac{\sigma_0}{\bar{\sigma}}\right)^n \qquad (9.3.16)$$

将(9.3.10)式代入(9.3.16)式,有

$$\dot{\lambda} = \frac{\bar{\sigma}}{n} \qquad (9.3.17)$$

故有

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}} = \frac{3}{2}\frac{C\left(\frac{\bar{\sigma}}{\sigma_0}\right)^n}{\bar{\sigma}}\boldsymbol{S} \qquad (9.3.13)$$

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{M} : (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}) = \boldsymbol{M} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \boldsymbol{M} : \frac{3}{2}\frac{C\left(\frac{\bar{\sigma}}{\sigma_0}\right)^n}{\bar{\sigma}}\boldsymbol{S} \qquad (9.3.14)$$

这恰恰就是前面的(9.3.13)式和(9.3.14)式。事实上,如果我们把(9.3.15)式中 $\boldsymbol{S}$ 前的系数称为新的黏塑性流动因子 $\dot{\lambda}$ 的话,它与前面 Bodner、Parton 作为基本出发点的假设(9.3.9)式就完全相同了。而现在我们是把(9.3.10)式作为一个时率相关的屈服面而导出了它们。这就是说,我们可以从更广义的意义上来理解 Bodner-Parton 黏塑性本构模型,这就是:将(9.3.10)式作为一个应变率相关的随遇屈服面,而直接根据与屈服函数相关联的塑性流动的正交法则而直接得到材料的黏塑性本构关系,而不必把(9.3.9)式作为一个独立的基本假设。这就为我们在下一节中提出广义的 Bodner-Parton 黏塑性本构模型奠定了基础。

将上节所讲的超应力黏塑性本构模型和本节所讲的 Bodner-Parton 黏塑性本构模型进行对比，可以发现二者的区别除了有无明确的屈服面以外，另一个区别就是二者的思路也不同：前者是直接给出黏塑性应变率张量的流动规律，然后再导出与此流动规律相对应的材料动态屈服面；而后者则是首先给出与应变率因子及材料状态有依赖关系的材料动态屈服面，然后再导出黏塑性应变率张量的表达式。由于后一种思路更为自然和严谨，所以在下一节我们将按此思路而导出广义的 Bodner-Parton 黏塑性本构关系。

9.4 一般形式的自恰黏塑性本构关系

9.4.1 Bodner-Parton 黏塑性本构模型的局限性

在 9.3 节中我们介绍了一维应力条件下和复杂应力条件下的 Bodner-Parton 黏塑性本构关系，并且在最后特别地提出了所谓无屈服面的黏塑性本构关系应该更确切地称之为随遇屈服面的黏塑性本构关系，因为此种材料任何时刻都处于其由当时状态所决定的随遇屈服面上并且产生黏塑性流动。我们同时还指出了如果把 Bodner-Parton 关于材料的等效黏塑性应变率$\dot{\bar{\varepsilon}}^{p}$与材料应力状态的依赖关系看做是材料应变率相关的随遇屈服面的话，则以与此屈服函数相关联的黏塑性流动的正交法则出发就可以直接得到材料的黏塑性本构关系，而不必再对材料的黏塑性应变率张量$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{p}$做出任何独立的假定。这就为我们推广 Bodner-Parton 黏塑性本构关系提供了启示。为了对之进行推广，我们首先指出上节所讲的 Bodner-Parton 黏塑性本构关系的如下局限性：

(1) 它只讨论了 Mises 类的材料，即式(9.3.10)的右端是有效应力$\bar{\sigma}$函数的情况，而且不包含材料内变量状态的影响，这在刻画材料黏塑性应变发展的特性方面有其局限性。

(2) 它所取的材料应变率的度量是有效黏塑性应变率$\dot{\bar{\varepsilon}}^{p}$，这也是有其局限性的，因为有时我们可能需要反映材料更为多彩的应变率效应，比如为了反映材料应变率特性的各向异性特征，我们可能需要某种具有张量特性的量作为材料应变率效应的度量，或者需要若干个标量型的应变率因子来共同反映材料的应变率效应，

或者只有黏塑性应变率张量的某些分量才对材料的应变率效应有贡献，等等。

但是，分析一下9.3节最后我们由随遇屈服面导出Bodner-Parton黏塑性本构关系的过程，就会发现我们其实可以突破以上的局限而按照同样的思路将Bodner-Parton黏塑性本构关系进行推广，而导出一般情况之下的所谓自恰随遇黏塑性本构关系，这种本构关系也被称为广义的Bodner-Parton黏塑性本构关系。

9.4.2 自恰随遇黏塑性本构关系

作为例子，我们考虑可以由一个单应变率因子 $\dot{\zeta}$ 来描述材料应变率效应的情况，并假设它是材料黏塑性应变率张量 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}$ 的某种函数，即

$$\dot{\zeta} = y(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}) \tag{9.4.1}$$

如以前所讲过的，之所以假设它是黏塑性应变率张量 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}$ 的函数，是因为弹性应变一般很小，而且由于弹性应变是可逆的和瞬态的，故对材料的应变率效应没什么影响。函数 $y(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}})$ 的形式给出了我们对材料在复杂变形状态下所谓的应变率的一种特定度量，其具体形式可以根据我们对材料性质的认识来选择。特别说来，为了简单起见，我们可以假设(9.4.1)式中的函数 y 是黏塑性应变率张量 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}$ 的一次齐次函数，即它具有性质：

$$y(a\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}) = ay(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}) \tag{9.4.2}$$

其中 a 为任意的常数。需要说明的是：一次齐次函数形式(9.4.2)式的假定对于黏塑性本构关系的导出并不是绝对必要的，而只是为了使本构关系具有相对较简单和实用的形式才做出的，而实践表明对绝大多数工程问题的需要而言这已经足够了。显然，材料的等效黏塑性应变率 $\dot{\bar{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}$、黏塑性体应变率 $\dot{\theta}^{\mathrm{p}}$、黏塑性应变率的任何分量 $\dot{\varepsilon}^{\mathrm{p}}_{ij}$ 等都具有类似(9.4.2)式的一次齐次性质，因为

$$\dot{\bar{\varepsilon}}^{\mathrm{p}} = \sqrt{\frac{2}{3}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}:\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}},\quad \dot{\theta}^{\mathrm{p}} = \dot{\varepsilon}^{\mathrm{p}}_{ii},\quad \dot{\varepsilon}^{\mathrm{p}}_{11},\quad \dot{\varepsilon}^{\mathrm{p}}_{12},\quad \cdots$$

其次，我们假设材料的应变率因子 $\dot{\zeta}$ 是材料应力状态和内变量状态的某个函数，即

$$\dot{\zeta} = f(\boldsymbol{\sigma},\xi_{\alpha}),\quad \Phi(\boldsymbol{\sigma},\xi_{\alpha},\dot{\zeta}) \equiv f(\boldsymbol{\sigma},\xi_{\alpha}) - \dot{\zeta} = 0 \tag{9.4.3}$$

其中 $\xi_{\alpha}(\alpha=1,\cdots,n)$ 是 n 个内变量，比如可以包含累积黏塑性应变 $\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}$ 的各个分量，可以包含等向硬化(功硬化或应变硬化)参数 K，等等。函数 $f(\boldsymbol{\sigma},\xi_{\alpha})$ 的形式决定了材料应变率效应的具体特性，可以借鉴已有的理论或以实验为基础来进行选择，9.3节中给出的等效应力的某种函数形式就是其一种具体特例。如前所述，由

于任何时刻材料都会发生黏塑性流动，所以式(9.4.3)可以看做是材料的一个随遇屈服面，或应变率相关的动态屈服面。

将应变率因子 $\dot{\zeta}$ 的定义代入随遇的动态屈服面(9.4.3)式之中，有

$$y(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}) = f(\boldsymbol{\sigma}, \xi_\alpha) \tag{9.4.3$'$}$$

而其黏塑性应变率 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}$ 可以由与屈服函数 $\Phi(\boldsymbol{\sigma}, \xi_\alpha, \dot{\zeta})$ 或 $f(\boldsymbol{\sigma}, \xi_\alpha)$ 相关的正交流动法则所决定，即

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}} = \dot{\lambda}\frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \dot{\lambda}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \tag{9.4.4}$$

将正交法则(9.4.4)式代入定义应变率因子 $\dot{\zeta}$ 的式(9.4.1)，可得

$$y\left(\dot{\lambda}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right) = f(\boldsymbol{\sigma}, \xi_\alpha) \tag{9.4.5}$$

式(9.4.5)是关于 $\dot{\lambda}$ 的一个隐式方程。由于$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$也只是材料内外状态$(\boldsymbol{\sigma}, \xi_\alpha)$的函数，对于任何给定的应变率因子 $\dot{\zeta}$ 的定义(9.4.1)式，我们可以由(9.4.5)式解出 $\dot{\lambda}$，设其为

$$\dot{\lambda} = \dot{\lambda}(\boldsymbol{\sigma}, \xi_\alpha) \tag{9.4.6}$$

将之代入(9.4.4)式，可得材料的黏塑性本构关系如下：

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}} = \dot{\lambda}(\boldsymbol{\sigma}, \xi_\alpha)\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \tag{9.4.7}$$

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{M} : (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}) = \boldsymbol{M} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \boldsymbol{M} : \dot{\lambda}(\boldsymbol{\sigma}, \xi_\alpha)\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \tag{9.4.8}$$

或

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \dot{\boldsymbol{\sigma}}^{\mathrm{e}} - \dot{\boldsymbol{\sigma}}^{\mathrm{p}}, \quad \dot{\boldsymbol{\sigma}}^{\mathrm{e}} = \boldsymbol{M} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}, \quad \dot{\boldsymbol{\sigma}}^{\mathrm{p}} = \dot{\lambda}(\boldsymbol{\sigma}, \xi_\alpha)\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \tag{9.4.8$'$}$$

其中 $\dot{\boldsymbol{\sigma}}^{\mathrm{e}}$ 和 $\dot{\boldsymbol{\sigma}}^{\mathrm{p}}$ 分别称为材料的瞬态弹性应力率和黏塑性松弛应力率。

特别说来，当应变率因子 $\dot{\zeta}$ 为黏塑性应变率的一次齐次函数时，利用一次齐次函数的性质(9.4.2)式，可由(9.4.5)式得

$$\dot{\lambda}\, y\left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right) = f(\boldsymbol{\sigma}, \xi_\alpha)$$

于是我们可以得到 $\dot{\lambda}$ 的显式解如下：

$$\dot{\lambda} = \frac{f(\boldsymbol{\sigma}, \xi_\alpha)}{y\left(\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right)} \equiv \dot{\lambda}(\boldsymbol{\sigma}, \xi_\alpha) \tag{9.4.9}$$

黏塑性材料的本构关系为

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}} = \frac{f(\boldsymbol{\sigma},\xi_\alpha)}{y\left(\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right)}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \tag{9.4.10}$$

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{M}:(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}-\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}) = \boldsymbol{M}:\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \boldsymbol{M}:\frac{f(\boldsymbol{\sigma},\xi_\alpha)}{y\left(\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right)}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \tag{9.4.11}$$

或

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \dot{\boldsymbol{\sigma}}^{\mathrm{e}} - \dot{\boldsymbol{\sigma}}^{\mathrm{p}},\quad \dot{\boldsymbol{\sigma}}^{\mathrm{e}} = \boldsymbol{M}:\dot{\boldsymbol{\varepsilon}},\dot{\boldsymbol{\sigma}}^{\mathrm{p}} = \boldsymbol{M}:\frac{f(\boldsymbol{\sigma},\xi_\alpha)}{y\left(\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right)}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \tag{9.4.11$'$}$$

由于函数 $f(\boldsymbol{\sigma},\xi_\alpha)$只是材料内外状态$(\boldsymbol{\sigma},\xi_\alpha)$的函数，所以 $\dot{\lambda}$ 因之$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}$ 和$\dot{\boldsymbol{\sigma}}^{\mathrm{p}}$ 也都只是材料内外状态$(\boldsymbol{\sigma},\xi_\alpha)$的函数，而与材料的瞬时应变率 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ 完全无关，所以不管 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ 是否为零，在时间间隔 $\mathrm{d}t$ 之后，材料都将会产生松弛增量应力 $-\dot{\boldsymbol{\sigma}}^{\mathrm{p}}\mathrm{d}t$；而弹性应力率$\dot{\boldsymbol{\sigma}}^{\mathrm{e}}$ 正比于瞬时应变率 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$，所以只有当应变发生改变即 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}\neq\mathbf{0}$ 时，在时间间隔 $\mathrm{d}t$ 之后才会以 t 时的应变率 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ 而产生弹性增量应力$\dot{\boldsymbol{\sigma}}^{\mathrm{e}} = \boldsymbol{M}:\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$。

现在我们来讨论一下得出上述黏塑性本构关系与第 7 章中得出应变率无关的弹塑性材料本构关系的推理过程之间的主要区别。在得出弹塑性材料的本构关系时，我们除了需依据材料的屈服准则和塑性应变流动的正交法则以外，还需要利用内外变量连同屈服面演化的一致性法则，后者是由屈服面求导而得出的。而在前面我们得出黏塑性材料的本构关系时，我们只需要利用材料应变率相关的动态屈服准则和黏塑性应变流动的正交法则，而不需要额外利用由动态屈服准则求导的一致性法则，其原因和意义是：材料在任何状态下都在发生黏塑性流动，而度量材料应变率的应变率因子 $\dot{\zeta}$ 是由正交法则控制的黏塑性应变率$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}$ 的函数并以确定的方式和材料的内外状态相联系，这自然就意味着在每一时刻材料的黏塑性应变率$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}$ 与材料的内外状态之间有着自恰和相容的关系，而这一关系就是将 $\dot{\zeta}$ 的定义代入动态屈服准则所得到的式(9.4.3)′。由于这个原因，我们把上面推广 Bodner-Parton 模型而得到的黏塑性本构关系称之为一般的自恰黏塑性本构关系。

最后我们指出：本节所讲的本构关系既可以包含超应力模型，也可以包含无屈服的本构模型，这取决于我们对式(9.4.3)右端函数的取法：当我们对该函数设置某一种临界状态作为对是否产生黏塑性流动的条件时，它就是超应力模型；当我们不设置此种临界状态而认为在任何状态下材料都会产生黏塑性流动时，它就是无屈服黏塑性模型，或随遇自恰黏塑性模型，也可以称之为广义的 Bodner-Parton 模

型。从工程问题数值计算的角度考虑，不设判别条件的无屈服自恰黏塑性模型显然更加方便。

9.5 含损伤材料的热黏塑性本构关系

9.5.1 概述

材料的塑性和黏塑性本构关系的研究不但是理论和应用力学领域的重要研究课题，而且随着计算机技术和现代计算力学的兴起，其本构关系的研究又与其本构计算流程的研究紧密结合起来。在前面几节中我们已经介绍了涉及时率效应的材料黏塑性本构关系的主要理论，即超应力模型、无屈服黏塑性模型（确切地说应称为随遇屈服模型）和一般的自恰黏塑性本构模型。在本节中，我们将以 9.4 节中所介绍的自恰黏塑性本构关系的理论和推导方法为基础，与动力学问题数值计算的需要和计算流程的编制相结合，研究涉及温度、损伤、内变量、应变率效应等多因素耦合效应的材料本构关系，即含损伤材料的热黏塑性本构关系。值得注意的是：在迄今为止的绝大多数国内外数值软件中，本构计算方法多采用所谓的“半径回归法”，这一方法作为一种近似的本构计算方法，是人们最初在冲击动力学计算中对理想塑性的 Mises 材料提出并进行了证明的，以后被推广到有多种硬（软）化因素的本构计算中，也推广到了有应变率效应的本构计算中，但并未给出一般的证明和适用性的详细说明。因此在本节讨论精确的含损伤材料的热黏塑性本构关系之前，我们将先对“半径回归法”的有关问题（如其证明、适用性和局限性等）给以简单讨论。

9.5.2 “半径回归法”的本构计算公式

在国内外各类高速冲击动力学数值软件中，广泛采用广义的 Mises 屈服准则和相应的“半径回归法”本构计算公式。但是人们只是对无率效应、无热效应、无损伤、无硬化的理想塑性的情况给出了证明，并将之应用于一般情况。以下给出其在一般情况下的证明。

常用的广义 Mises 屈服准则可写为

$$\bar{\sigma} = f(p, \bar{\varepsilon}, \dot{\bar{\varepsilon}}, D, T), \quad \bar{\sigma} - f(p, \bar{\varepsilon}, \dot{\bar{\varepsilon}}, D, T) \equiv \Phi(\boldsymbol{\sigma}, \bar{\varepsilon}, \dot{\bar{\varepsilon}}, D, T) \tag{9.5.1}$$

其中

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{3}{2}\boldsymbol{s} : \boldsymbol{s}}, \quad \bar{\varepsilon} = \int \sqrt{\frac{2}{3}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}}\mathrm{d}t, \quad \dot{\bar{\varepsilon}} = \sqrt{\frac{2}{3}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}} \tag{9.5.2}$$

分别为等效应力、等效塑性应变累积量(内变量)、等效塑性应变率；D 为损伤；T 为温度。

精确的本构计算需要由微过程的增量应变分别求出弹性和塑性的增量应变 $\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{e}}$ 和 $\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}$，进而求出增量应力 $\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$ 以及 $\mathrm{d}D$、$\mathrm{d}T$ 等参量(参见9.5.3节)。但当弹性增量应变与塑性增量应变相比很小而可以忽略时，则可有

$$\dot{\bar{\varepsilon}}^{\mathrm{p}} \approx \sqrt{\frac{2}{3}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}, \quad \bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}} \approx \int \sqrt{\frac{2}{3}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}\mathrm{d}t \tag{9.5.3}$$

而 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ 是可由速度场算出的，故新时刻 $t+\mathrm{d}t$ 的 $\dot{\bar{\varepsilon}}(t+\mathrm{d}t)$ 和 $\bar{\varepsilon}(t+\mathrm{d}t) = \bar{\varepsilon}(t) + \dot{\bar{\varepsilon}}\mathrm{d}t$ 也可由速度场算出；而忽略弹性变形影响时，也可直接由损伤演化方程和温升方程而算出 $D(t+\mathrm{d}t)$ 和 $T(t+\mathrm{d}t)$(参见9.5.3节)，$p(t+\mathrm{d}t)$ 则可由状态方程算出。故新时刻 $t+\mathrm{d}t$ 时的等效应力 $\bar{\sigma}(t+\mathrm{d}t)$ 也可算出。分别以 $\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ 和 $\mathrm{d}\boldsymbol{s}^*$ 表示 $\mathrm{d}t$ 时段内的真实偏应力增量和按弹性变载所算出的偏应力增量，则有

$$\mathrm{d}\boldsymbol{s} = 2G(\mathrm{d}\boldsymbol{e} - \mathrm{d}\boldsymbol{e}^{\mathrm{p}}) = 2G(\mathrm{d}\boldsymbol{e} - 3\mathrm{d}\lambda\,\boldsymbol{s}^0), \quad \mathrm{d}\boldsymbol{s}^* = 2G\mathrm{d}\boldsymbol{e} \tag{9.5.4}$$

其中 $\mathrm{d}\boldsymbol{e}$ 和 $\mathrm{d}\boldsymbol{e}^{\mathrm{p}}$ 分别为增量偏应变和增量塑性偏应变；$\boldsymbol{s}^0$ 为 t 时刻之偏应力。(9.5.4)式的第一式利用了正交法则和屈服准则(9.5.1)式。而由 t 时的起始状态 $\boldsymbol{s}^0$ 经 $\mathrm{d}t$ 到达 $t+\mathrm{d}t$ 时刻的新真实应力状态 $\boldsymbol{s}$ 和按弹性变载而算得的尝试应力状态 $\boldsymbol{s}^*$ 将分别为

$$\boldsymbol{s} = \boldsymbol{s}^0 + 2G(\mathrm{d}\boldsymbol{e} - 3\mathrm{d}\lambda\,\boldsymbol{s}^0), \quad \boldsymbol{s}^* = \boldsymbol{s}^0 + \mathrm{d}\boldsymbol{s}^* \tag{9.5.5}$$

故有

$$\boldsymbol{s} = \boldsymbol{s}^0 + \mathrm{d}\boldsymbol{s}^* - 6G\mathrm{d}\lambda\boldsymbol{s}^0 = \boldsymbol{s}^* - 6G\mathrm{d}\lambda\,\boldsymbol{s}^0 = \boldsymbol{s}^* - 6G\mathrm{d}\lambda(\boldsymbol{s}^* - \mathrm{d}\boldsymbol{s}^*) \tag{9.5.6}$$

当忽略二阶小量时，式(9.5.6)即可写为

$$\boldsymbol{s} = (1 - 6G\mathrm{d}\lambda)\boldsymbol{s}^* \tag{9.5.7}$$

式(9.5.7)说明：$t+\mathrm{d}t$ 时的真实应力状态 $\boldsymbol{s}(t+\mathrm{d}t)$ 和按弹性变载尝试算得的应力状态 $\boldsymbol{s}^*(t+\mathrm{d}t)$ 共线。由此可得 $t+\mathrm{d}t$ 时的真实等效屈服应力 $\bar{\sigma}(t+\mathrm{d}t)$ 为

$$\bar{\sigma}^2 = \frac{3}{2}\boldsymbol{s} : \boldsymbol{s} = \frac{3}{2}(1 - 6G\mathrm{d}\lambda)^2\,\boldsymbol{s}^* : \boldsymbol{s}^* = (1 - 6G\mathrm{d}\lambda)^2\sigma^{*2}$$

$$\bar{\sigma} = (1 - 6G\mathrm{d}\lambda)\sigma^*, \quad 1 - 6G\mathrm{d}\lambda = \frac{\bar{\sigma}}{\sigma^*} \tag{9.5.8}$$

其中

$$\sigma^* = \sqrt{\frac{3}{2}\boldsymbol{s}^* : \boldsymbol{s}^*} \tag{9.5.9}$$

是由按弹性本构关系算出的尝试应力状态$\boldsymbol{s}^*(t+\mathrm{d}t)$所对应的$t+\mathrm{d}t$时的尝试等效屈服应力。将(9.5.8)式代入(9.5.7)式，即可得半径回归法的偏应力计算公式：

$$\boldsymbol{s} = \frac{\bar{\sigma}}{\sigma^*}\boldsymbol{s}^* \tag{9.5.10}$$

由(9.5.8)式可见，当$\sigma^* > \bar{\sigma}$时，必有$\mathrm{d}\lambda > 0$，表明有塑性流动发生，应按式(9.5.10)将尝试应力$\boldsymbol{s}^*$拉回到屈服面上的真实应力状态$\boldsymbol{s}$；当$\sigma^* \leqslant \bar{\sigma}$时，$\mathrm{d}\lambda \leqslant 0$，表明无塑性流动发生，微过程确为弹性变载过程，弹性尝试应力$\boldsymbol{s}^*$即是正确结果，故半径回归法计算公式(9.5.10)式应改写为

$$\boldsymbol{s} = \begin{cases} \boldsymbol{s}^*, & \text{当 } \sigma^* \leqslant \bar{\sigma} \text{ 时} \\ \dfrac{\bar{\sigma}}{\sigma^*}\boldsymbol{s}^*, & \text{当 } \sigma^* > \bar{\sigma} \text{ 时} \end{cases} \tag{9.5.11}$$

其计算流程可归结为：在得出$t+\mathrm{d}t$时刻的速度场之后，首先由(9.5.3)式近似算出新时刻的等效塑性应变率$\dot{\bar{\varepsilon}}$和等效(塑性)应变累积量$\bar{\varepsilon}$，由温升方程、损伤演化方程、状态方程算出新时刻的T、D和p，从而由式(9.5.1)得出$t+\mathrm{d}t$时刻的等效屈服应力$\bar{\sigma}$。再按弹性本构算出尝试偏应力$\boldsymbol{s}^*$，并由式(9.5.9)算出尝试等效屈服应力σ^*。如$\sigma^* \leqslant \bar{\sigma}$，则$\boldsymbol{s} = \boldsymbol{s}^*$；如$\sigma^* > \bar{\sigma}$，则$\boldsymbol{s} = \dfrac{\bar{\sigma}}{\sigma^*}\boldsymbol{s}^*$。

由以上讨论可以看出：半径回归法的本构计算是比较简洁的，但它有一定的局限性。这一局限性主要包括：它首先是一种近似的本构计算法，而不是精确的本构计算公式，其适用条件是弹性变形比之塑性变形很小而可以忽略，故对韧性材料的大变形冲击问题适用性较好；其次，它只适用于所谓的广义 Mises 类的材料，即屈服准则由(9.5.1)式所表述的材料。下面我们将给出一般的黏塑性本构计算公式。

9.5.3 普适的热黏塑性本构关系

以表观应力$\boldsymbol{\sigma}$和温度T为外状态量，内变量$\xi_\alpha(\alpha=1,2,\cdots,m)$和损伤$D$为内状态量，以应变率因子$\dot{\zeta}_\beta(\beta=1,2,\cdots,m)$为参数，应力空间中的时率相关屈服准则可表述为

$$\Phi(\boldsymbol{\sigma},\dot{\zeta}_\beta,\xi_\alpha,D,T)=0 \tag{9.5.12}$$

其中内变量 ξ_α 反映微结构变化引起的材料变形的不可逆特性，它们的演化应该与材料的宏观不可逆塑性应变率 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}$ 相关联，通常可假设它们是 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}$ 的一阶齐次函数，即

$$\dot{\xi}_\alpha=g_\alpha(\boldsymbol{\sigma},\xi_\alpha,D,T,\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}),\quad g_\alpha(\boldsymbol{\sigma},\xi_\alpha,D,T,a\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}})=ag_\alpha(\boldsymbol{\sigma},\xi_\alpha,D,T,\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}) \tag{9.5.13}$$

例如塑性功 $\boldsymbol{W}^{\mathrm{p}}$、塑性应变分量 $\varepsilon_{ij}^{\mathrm{p}}$、等效塑性应变累积量 $\bar{\varepsilon}$ 按定义

$$\boldsymbol{W}^{\mathrm{p}}=\int\boldsymbol{\sigma}:\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}\mathrm{d}t,\quad \varepsilon_{ij}^{\mathrm{p}}=\int\dot{\varepsilon}_{ij}^{\mathrm{p}}\mathrm{d}t,\quad \bar{\varepsilon}=\int\sqrt{\frac{2}{3}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}:\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}}\mathrm{d}t \tag{9.5.14}$$

都具有性质(9.5.13)式，都可取为内变量。此外，为了简明起见，我们假设屈服准则具有率效应分离的形式，即如下的形式：

$$\Phi(\boldsymbol{\sigma},\dot{\zeta}_\beta,\xi_\alpha,D,T)\equiv f(\boldsymbol{\sigma},\xi_\alpha,D,T)-\Gamma(\dot{\zeta}_\beta)=0 \tag{9.5.15}$$

其中应变率因子 $\dot{\zeta}_\beta$ 也假设为塑性应变率张量 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}$ 的一阶齐次函数：

$$\dot{\zeta}_\beta=Y_\beta(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}),\quad Y_\beta(b\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}})=bY_\beta(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}) \tag{9.5.16}$$

例如常用的等效塑性应变率 $\dot{\bar{\varepsilon}}$ 和塑性应变率张量的任何一个分量 $\dot{\varepsilon}_{ij}^{\mathrm{p}}$ 都具有性质(9.5.16)式：

$$\dot{\bar{\varepsilon}}=\sqrt{\frac{2}{3}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}:\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}} \tag{9.5.17}$$

将正交法则

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}=\dot{\lambda}\frac{\partial\Phi}{\partial\boldsymbol{\sigma}}=\dot{\lambda}\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{\sigma}} \tag{9.5.18}$$

代入(9.5.16)式，可得

$$\dot{\zeta}_\beta=Y_\beta(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}})=\dot{\lambda}\,Y_\beta\left(\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{\sigma}}\right) \tag{9.5.19}$$

由(9.5.15)式和(9.5.19)式，可得

$$f(\boldsymbol{\sigma},\xi_\alpha,D,T)-\Gamma\left(\dot{\lambda}\,Y_\beta\left(\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{\sigma}}\right)\right)=0 \tag{9.5.20}$$

由于 f 只是内外状态量 $(\boldsymbol{\sigma},\xi_\alpha,D,T)$ 的函数，故 $\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{\sigma}}$ 也只是内外状态量 $(\boldsymbol{\sigma},\xi_\alpha,D,T)$ 的函数，因此(9.5.20)式事实上是一个确定塑性流动因子 $\dot{\lambda}$ 的隐式方程，对于给定的函数 f、Γ 和 Y_β，解此方程可得到 $\dot{\lambda}=\dot{\lambda}(\boldsymbol{\sigma},\xi_\alpha,D,T)$，它也只是

状态量的函数。故(9.5.20)式事实上已给出了黏塑性本构关系的答案:对黏塑性材料,其塑性流动因子 $\dot{\lambda}$ 完全是由介质当时的内外状态量所确定的。特别地,当 m 个应变率因子中只有某一个因子的影响最大而其他因子的影响可忽略不计时,记此因子为 $\dot{\zeta}$,且不妨设(9.5.15)式中的 $\Gamma(\dot{\zeta}_\beta)$ 为 $\dot{\zeta}$,则(9.5.15)式和(9.5.16)式分别成为

$$\Phi(\boldsymbol{\sigma},\dot{\zeta}_\beta,\xi_\alpha,D,T)\equiv f(\boldsymbol{\sigma},\xi_\alpha,D,T)-\dot{\zeta}=0 \qquad (9.5.15)'$$

$$\dot{\zeta}=Y(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}),\quad Y(b\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}})=bY(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}) \qquad (9.5.16)'$$

则由(9.5.20)式可得

$$\dot{\lambda}=f(\boldsymbol{\sigma},\xi_\alpha,D,T)/Y\left(\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{\sigma}}\right)\equiv\dot{\lambda}(\boldsymbol{\sigma},\xi_\alpha,D,T) \qquad (9.5.21)$$

(9.5.21)式即是塑性流动因子 $\dot{\lambda}$ 的显式表达式,它是完全由屈服准则中的函数 f 和应变率因子(9.5.16)′式中的函数 Y 所确定的,并且只是材料内外状态量 $(\boldsymbol{\sigma},\xi_\alpha,D,T)$ 的函数。求出 $\dot{\lambda}$ 之后即可由正交法则及胡克定律求出塑性应变率 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}$ 和应力率 $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}=\dot{\lambda}\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{\sigma}},\quad \dot{\boldsymbol{\sigma}}=\boldsymbol{M}:\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{e}}=\boldsymbol{M}:(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}-\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}})=\boldsymbol{M}:\left(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}-\dot{\lambda}\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{\sigma}}\right) \qquad (9.5.22)$$

其中 $\boldsymbol{M}$ 为瞬态弹性模量。相应量的增量为

$$\mathrm{d}\lambda=f(\boldsymbol{\sigma},\xi_\alpha,D,T)\mathrm{d}t/Y\left(\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{\sigma}}\right),\quad \mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}=\mathrm{d}\lambda\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{\sigma}},\quad \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{M}:(\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}-\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}) \qquad (9.5.23)$$

这样我们就解决了由微过程 $\mathrm{d}t$ 中的 $\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}$ 求解 $\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$ 的问题,即本构计算的核心问题。

设材料的损伤演化方程和温升方程分别为

$$\dot{D}=F_1(\boldsymbol{\sigma},\xi_\alpha,D,T)+F_2(\boldsymbol{\sigma},\xi_\alpha,D,T,\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}),\quad \dot{T}=\frac{1}{\rho c}[-\mathrm{div}\boldsymbol{h}+r+\alpha\boldsymbol{\sigma}:\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}] \qquad (9.5.24)$$

其中 c、$\boldsymbol{h}$、r 分别是比热、热流矢量和热辐射供热率,α 为塑性功的热转换因子。需要说明的是:对于损伤的演化方程,人们常用的形式可分为两类,一类是不考虑损伤率 $\dot{D}$ 和黏塑性应变率 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}$ 间的耦合作用,另一类是考虑二者之间的耦合作用并假设 $\dot{D}$ 是 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}$ 的一次齐次函数,为了普遍起见,我们特意将之写为上式中二项之和的形式,即认为上式中的函数 F_2 是 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}$ 的一次齐次函数。于是,D、T 以及内变量 ξ_α 的增量将为

$$\mathrm{d}D = F_1(\boldsymbol{\sigma}, \xi_\alpha, D, T)\mathrm{d}t + F_2(\boldsymbol{\sigma}, \xi_\alpha, D, T, \mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}})$$

$$\mathrm{d}T = \frac{1}{\rho c}[(-\mathrm{div}\boldsymbol{h} + r)\mathrm{d}t + \alpha\boldsymbol{\sigma} : \mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}] \tag{9.5.25}$$

$$\mathrm{d}\xi_\alpha = g_\alpha(\boldsymbol{\sigma}, \xi_\alpha, D, T, \mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}})$$

本构计算流程归结如下：设已知 t 时的内外状态量$(\boldsymbol{\sigma}, \xi_\alpha, D, T)$，当算出 $\mathrm{d}t$ 间隔的增量应变 $\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}$ 之后(这是根据运动方程和连续方程完成的)，即可由(9.5.23)式算出 $\mathrm{d}\lambda$、$\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}$ 和 $\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$，再由(9.5.25)式计算出 $\mathrm{d}D$、$\mathrm{d}T$、$\mathrm{d}\xi_\alpha$，这样我们即得到了新时刻 $t+\mathrm{d}t$ 的状态$(\boldsymbol{\sigma}, \xi_\alpha, D, T)$，从而即可进入下一个循环。

9.5.4 几种常用的本构关系和计算公式

实践中很常见的情形是只有一个应变率因子 $\dot{\zeta}$。当将之取为最常用的等效塑性应变率$\dot{\bar{\varepsilon}}$，且当(9.5.15)式中的屈服函数 f 只是通过等效应力 $\bar{\sigma}$ 而依赖于$\boldsymbol{\sigma}$ 时，我们有

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \xi_\alpha, D, T) = g(\bar{\sigma}, \xi_\alpha, D, T), \quad \dot{\zeta} = Y(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}) = \sqrt{\frac{2}{3}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}} \tag{9.5.26}$$

则可由(9.5.21)式给出

$$\dot{\lambda} = g\Big/\sqrt{\frac{2}{3}\frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}}} = g\Big/\sqrt{\frac{2}{3}g'\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : g'\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}} \tag{9.5.27}$$

由于

$$\bar{\sigma}^2 = \frac{3}{2}\boldsymbol{s} : \boldsymbol{s}, \quad \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{3}{2}\frac{\boldsymbol{s}}{\bar{\sigma}} \tag{9.5.28}$$

代入(9.5.27)式，即可得

$$\dot{\lambda} = g/g', \quad \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}} = \frac{3}{2}g(\bar{\sigma}, \xi_\alpha, D, T)\frac{\boldsymbol{s}}{\bar{\sigma}} \tag{9.5.29}$$

其中 $g' = \dfrac{\partial g}{\partial \bar{\sigma}}$。

特别地，对 Bodner-Partom 模型，屈服准则可表达为

$$\bar{\sigma} = Y^*(\bar{\varepsilon}, D, T)\exp\left(\frac{1}{n}\ln\frac{\dot{\bar{\varepsilon}}}{\dot{\varepsilon}_0}\right), \quad \dot{\bar{\varepsilon}} = \dot{\varepsilon}_0\left[\frac{\bar{\sigma}}{Y^*(\bar{\varepsilon}, D, T)}\right]^n \equiv g(\bar{\sigma}, \bar{\varepsilon}, D, T) \tag{9.5.30}$$

其物理意义是：等效塑性应变率是相对等效应力 $\bar{\sigma}/Y^*$ 的幂函数，Y^* 表示参考应

变率 $\dot{\varepsilon}_0$ 下的屈服应力。而(9.5.29)式给出

$$\dot{\lambda} = \frac{\bar{\sigma}}{n}, \quad \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}} = \frac{3}{2}\dot{\varepsilon}_0 \left[\frac{\bar{\sigma}}{Y^*}\right]^n \frac{\boldsymbol{s}}{\bar{\sigma}} \tag{9.5.31}$$

值得注意的是:对此种材料,其塑性流动因子 $\dot{\lambda}$ 与 $\bar{\sigma}$ 成比例,而与温度、内变量和损伤无关,当然,塑性应变增量是与温度、内变量和损伤有关的。

对 Johnson-Cook 模型,屈服准则为

$$\bar{\sigma} = Y^*(\bar{\varepsilon}, D, T)\left(1 + \beta \ln \frac{\dot{\bar{\varepsilon}}}{\dot{\varepsilon}_0}\right), \quad \dot{\bar{\varepsilon}} = \dot{\varepsilon}_0 \exp\left[\frac{1}{\beta}\left(\frac{\bar{\sigma}}{Y^*} - 1\right)\right] \equiv g(\bar{\sigma}, \bar{\varepsilon}, D, T) \tag{9.5.32}$$

其物理意义是:等效塑性应变率是相对超应力 $\left(\frac{\bar{\sigma}}{Y^*} - 1\right)$ 的指数函数。而(9.5.29)式给出

$$\dot{\lambda} = \beta Y^*(\bar{\varepsilon}, D, T), \quad \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}} = \frac{3}{2}\dot{\varepsilon}_0 \exp\left[\frac{1}{\beta}\left(\frac{\bar{\sigma}}{Y^*} - 1\right)\right]\frac{\boldsymbol{s}}{\bar{\sigma}} \tag{9.5.33}$$

值得注意的是:对此种材料,其塑性流动因子 $\dot{\lambda}$ 与应力状态无关,而只是温度、内变量和损伤的函数,且与其屈服应力 $Y^*(\bar{\varepsilon}, D, T)$ 成比例,当然,塑性应变增量是与应力状态有关的。

对 Hill-Tsai 模型,其屈服准则形式为

$$F_1 \equiv \frac{1}{R(\dot{\zeta})^2}\left\{\frac{\sigma_{11}^2}{Y_{11}^2} + \frac{\sigma_{22}^2}{Y_{22}} + \frac{\sigma_{33}^2}{Y_{33}^2} + \frac{\sigma_{12}^2}{Y_{12}^2} + \frac{\sigma_{23}^2}{Y_{23}^2} + \frac{\sigma_{31}^2}{Y_{31}^2} + \bar{Y}_{11}\sigma_{22}\sigma_{33} + \bar{Y}_{22}\sigma_{33}\sigma_{11} + \bar{Y}_{33}\sigma_{11}\sigma_{22}\right\} - 1 = 0 \tag{9.5.34}$$

其中

$$\begin{cases} \bar{Y}_{11} = \dfrac{1}{Y_{11}^2} - \dfrac{1}{Y_{22}^2} - \dfrac{1}{Y_{33}^2} \\ \bar{Y}_{22} = \dfrac{1}{Y_{22}^2} - \dfrac{1}{Y_{33}^2} - \dfrac{1}{Y_{11}^2} \\ \bar{Y}_{33} = \dfrac{1}{Y_{33}^2} - \dfrac{1}{Y_{11}^2} - \dfrac{1}{Y_{22}^2} \\ R(\dot{\zeta}) = 1 + \beta \ln \dfrac{\dot{\zeta}}{\dot{\zeta}_0} \end{cases} \tag{9.5.35}$$

而

$$Y_{ij}^* = Y_{ij}(\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}, D, T) R(\dot{\zeta}) \tag{9.5.36}$$

表示相应简单应力状态下的屈服应力。写为(9.5.15)式的形式，即有

$$\Phi(\boldsymbol{\sigma},\ \dot{\zeta},\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}},D,T)=f(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}},D,T)-\dot{\zeta}=\dot{\zeta}_0\mathrm{e}^{\frac{1}{\beta}[\sqrt{F+1}-1]}-\dot{\zeta}\equiv 0 \tag{9.5.37}$$

其中

$$\begin{aligned} F\equiv & \frac{\sigma_{11}^2}{Y_{11}^2}+\frac{\sigma_{22}^2}{Y_{22}^2}+\frac{\sigma_{33}^2}{Y_{33}^2}+\frac{\sigma_{12}^2}{Y_{12}^2}+\frac{\sigma_{23}^2}{Y_{23}^2}+\frac{\sigma_{31}^2}{Y_{31}^2} \\ & +\bar{Y}_{11}\sigma_{22}\sigma_{33}+\bar{Y}_{22}\sigma_{33}\sigma_{11}+\bar{Y}_{33}\sigma_{11}\sigma_{22}-1 \end{aligned} \tag{9.5.38}$$

当取 $\dot{\zeta}$ 为等效塑性应变率时，则(9.5.21)式给出

$$\dot{\lambda}=1\bigg/\sqrt{\frac{2}{3}\boldsymbol{D}:\boldsymbol{D}\eta} \tag{9.5.39}$$

其中

$$\begin{cases} D_{11}=\dfrac{2\sigma_{11}}{Y_{11}^2}+\bar{Y}_{22}\sigma_{33}+\bar{Y}_{33}\sigma_{22} \\ D_{22}=\dfrac{2\sigma_{22}}{Y_{22}^2}+\bar{Y}_{33}\sigma_{11}+\bar{Y}_{11}\sigma_{33} \\ D_{33}=\dfrac{2\sigma_{33}}{Y_{33}^2}+\bar{Y}_{11}\sigma_{22}+\bar{Y}_{22}\sigma_{11} \\ D_{12}=D_{21}=\dfrac{\sigma_{12}}{Y_{12}^2} \\ D_{23}=D_{32}=\dfrac{\sigma_{32}}{Y_{32}^2} \\ D_{31}=D_{13}=\dfrac{\sigma_{13}}{Y_{13}^2} \end{cases} \tag{9.5.40}$$

而

$$\eta=\frac{1}{2\beta\sqrt{F+1}} \tag{9.5.41}$$

习 题

9.1 对 Bodner-Partom 材料，试证明其黏塑性流动方程(9.5.31)式。

9.2 对 Johnson-cook 材料,试证明其黏塑性流动方程(9.5.33)式。

9.3 对 Hill-Tsai 材料,试证明其黏塑性流动方程(9.5.39)式、(9.5.40)式、(9.5.41)式。

9.4 对 Mises-Drucker-Prager 材料,$\bar{\sigma} = f_c \Psi\left(\frac{p}{f_c}\right)\left[1 + B^* \ln\left(\frac{\dot{\bar{\varepsilon}}^p}{\dot{\bar{\varepsilon}}_1}\right)\right](1-D)$,试导出其黏塑性流动法则。

9.5 设黏弹塑性本构方程为 $\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E}$(当 $\sigma \leqslant \sigma_s$ 时),$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{1}{\eta}(\sigma - \sigma_s)$(当 $\sigma > \sigma_s$ 时),其中 σ 为动态应力($\dot{\varepsilon} \neq 0$),$\sigma = \sigma_s$ 为静态应力($\dot{\varepsilon} = 0$)。设应力历史为 $\sigma(t) = \sigma_s \frac{t}{t_0}$($t_0$ 为有时间量纲的常数),并从 $t = 0$ 加载至 $t = 2t_0$,$\sigma = 2\sigma_s$,其后保持 $\sigma = 2\sigma_s$ 不变。试求 $\varepsilon(t)$。

参 考 文 献

[1] Truesdell C, W Noll. The non-linear field theories of mechanics[M]//Flügge S. Handbuch der Physik. Ⅲ/3. Berlin: Springer-Verlag, 1965.

[2] Fung Y C. Foundations of solid mechanics[M]. New Jersey: Prentice-Hall Inc., 1965.

[3] Malvern L E. Introduction to the mechanics of a continuous medium[M]. New Jersey: Prentice-Hall Inc., 1969.

[4] Eringen A C. Mechanics of continua[M]. 2nd. New York: John Wiley & Sons Inc., 1967.

[5] Eringen A C. Nonlinear theory of continuous media[M]. New York: McGraw-Hill, 1962.

[6] Кочин Н Е. 向量计算及张量计算初步[M].史福培,等,译.北京:高等教育出版社,1958.

[7] 谢多夫. 连续介质力学:第1卷[M].6版.李植,译.北京:高等教育出版社,2007.

[8] 德冈辰雄. 理性连续介质力学入门[M].赵镇,苗天德,程昌钧,译.北京:科学出版社,1982.

[9] Flügge W. Tensor analysis and continuum mechanics[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1972.

[10] 周培基,A·K·霍普金斯. 材料对强冲击载荷的动态响应[M].张宝钎,赵衡阳,李永池,译.北京:科学出版社,1985.

[11] 王仁. 塑性力学基础[M].北京:科学出版社,1982.

[12] 黄克智. 非线性连续介质力学[M].北京:清华大学出版社,北京大学出版社,1989.

[13] 黄克智,黄永刚.固体本构关系[M].北京:清华大学出版社,1999.

[14] 黄克智,薛明德,陆明万.张量分析[M].2版.北京:清华大学出版社,2003.

[15] 王自强. 理性力学基础[M].北京:科学出版社,2000.

[16] 匡震邦.非线性连续介质力学[M].上海:上海交通大学出版社,2002.

[17] 李松年,黄执中.非线性连续统力学[M].北京:北京航空航天学院出版社,1987.

[18] 黄筑平. 连续介质力学基础[M].北京:高等教育出版社,2003.

[19] 范镜泓. 非线性连续介质力学基础[M].重庆:重庆大学出版社,1987.

[20] 李永池,唐之景,胡秀章.关于Drucker公设和塑性本构关系的进一步研究[J].中国科学技术大学学报,1988,18(3):339-345.

[21] 殷有泉,曲圣年.弹塑性耦合和广义正交法则[J].力学学报,1982(1):63-69.

[22] Li Y C, Wang X J, Huang C Y. Further study on the constitutive relations in dynamic plasticity and the application to stress waves[M]//Research and Application in Dynamic Deformation and Fracture of Solids. Hefei: Press of USTC, 1998: 111 - 119.

[23] 李永池,王红五,江松青,等.含损伤材料热塑性本构关系的普适表述[C]//塑性力学和地球动力学进展:王仁院士八十寿辰庆贺文集.北京:万国学术出版社,2000.

[24] Li Yong-chi, Guo Yang, Zhu Lin-fa, et al. Thermoplastic constitutive relation suitable to dynamic problems in anisotropic and damaged materials[J]. The Chinese Journal of Mechanics, 2003, 19(1): 69 - 72.

[25] Соколовский В В. Распространение Улруго-вязко-плас-тических Волн в Стержнях[J]. ПММ Т, 1948, 12 В3.

[26] Malvern L E. Plastic Wave Propagation in a Bar of Material Exhibiting a strain-Rate Effect[J]. Q. Appl. Math., 1951(8): 405.

[27] Cristescu N. Dynamic Plasticity[M]. NHPC, 1967.

[28] Perzyna P. Fundamental Problem in Visco-Plasticity [J]. Advances in Applied Mechanics, 1966(9): 243 - 377.

[29] Bodner S R, Parton Y. Constitutive Equations for Elastic-Viscoplastic Strainhardening Materials[J]. J. Appl. Mech., 1875(42): 385.

[30] Johnson G R, Cook W H. A constitutive model and data for metals subjected to large strains, high strain rates and high temperatures[C]//Proceedings of 7th International Symposium on Ballistics. Hague: Netherlands, 1983: 541 - 547.

[31] Hill. R. A theory of the yielding and plastic flow of anisotropic materials[J]. Pro. Roy. Soc. Ser. A, 1948(193): 281 - 297.

[32] 李永池,谭福利,姚磊,等.含损伤材料的热塑性本构关系及其应用[J].爆炸与冲击,2004,24(4):289 - 298.

[33] 周光泉.关于无屈服面黏塑性理论[J].爆炸与冲击,1983,3(4):25 - 33.